Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

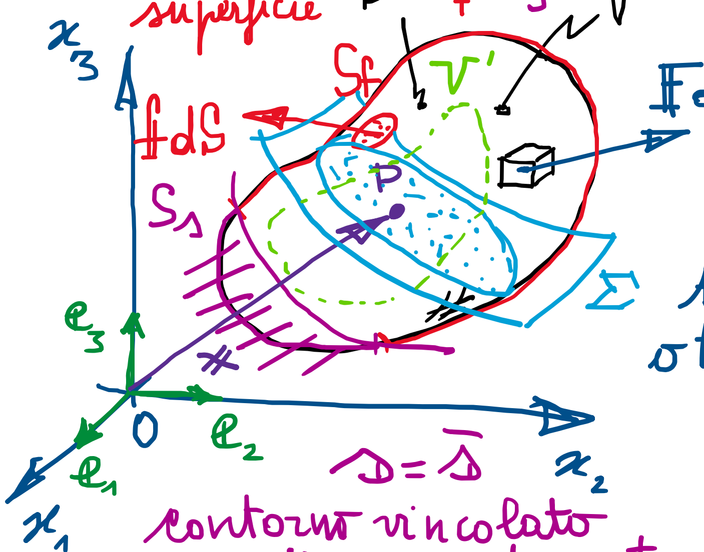
LEZIONE 13

II Meccanica dei Solidi (o dei mezzi continui) $\Rightarrow \forall P \in V$ punto materiale

Statica dei continui: analisi dello stato di sforzo o tensione

$\mathbf{t}_{-n}(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$

forze di superficie $\qquad S = S_f \cup S_s \qquad$ forze di volume



$s = \bar{s}$ contorno vincolato

s: vettore spostamento

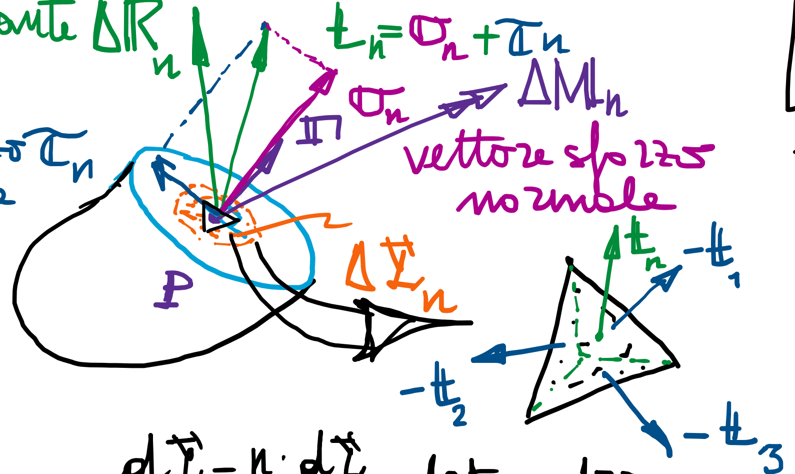
versore normale locale in P

$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \qquad n_i = \cos \widehat{n e_i}$ coseni direttori

risultante ΔR_n $\qquad t_n = \sigma_n + \tau_n$ $\qquad \Delta M_n$

vettore sforzo τ_n tangenziale o tagliante

vettore sforzo σ_n normale



$d\Sigma_i = n_i \, d\Sigma_n$ tetraedro di Cauchy

- $\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta \Sigma_n} = t_n(x)$ vettore sforzo di Cauchy
- $\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n} = 0$ (continuo non polare di Cauchy)

Relazione di Cauchy (~1822)

eq. di equil. alla traslazione

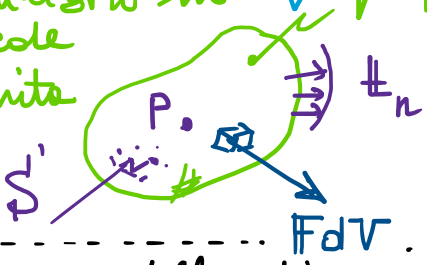
$$t_n = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 = \sum_i t_i n_i$$

$$\Updownarrow$$

$$t_{nj} = \underbrace{t_{ij}}_{\sigma_{ij}} n_i \Leftrightarrow t_n = \sigma^T n = n \cdot \sigma$$

Tensore sforzo di Cauchy

Equilibrio in sede indefinita $\forall V' \cap V$

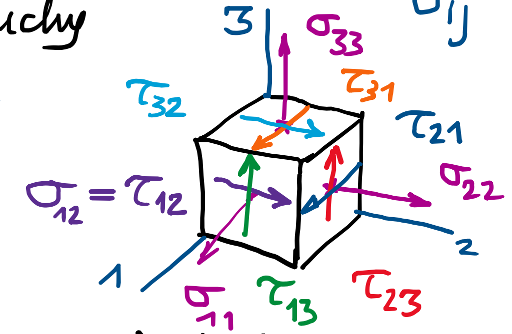


Equil. alla traslazione:

$$\int_{V'} F \, dV + \int_{S'} \underbrace{t_n}_{n \cdot \sigma} \, dS = 0 \qquad \forall V'$$

$$\int_{V'} F \, dV + \int_{V'} \operatorname{div} \sigma \, dV = 0$$

$$\int_{V'} (F + \operatorname{div} \sigma) \, dV = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \sigma + F = 0 \text{ in } V} \quad (\operatorname{div} \sigma = -F)$$



$\sigma_{12} = \tau_{12}$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

significato fisico delle comp.ti di sforzo σ_{ij}

Teorema della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div} g \, dV = \int_S n \cdot g \, dS$$

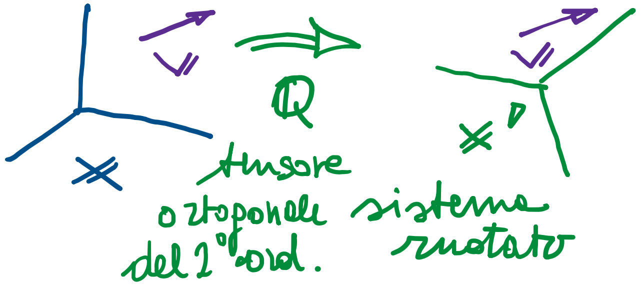
g: campo tensoriale (es. g_{ij}) $\qquad \underbrace{\operatorname{div}}_{\text{divergenza}} = \nabla \cdot = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}}^{\text{gradiente}} \cdot$

equil. alla rotazione:

tensore doppio simmetrico

$$\sigma^T = \sigma \Leftrightarrow \sigma_{ji} = \sigma_{ij}$$

- Trasformazione delle componenti al variare del sistema di riferimento



$$\boxed{\{V\}' = [\mathbb{Q}]\cdot\{V\}} \iff V'_i = Q_{ij}\,V_j \qquad \left(\{V\} = \overset{[\mathbb{Q}]^T}{[\mathbb{Q}]^{-1}}\{V\}'\right)$$

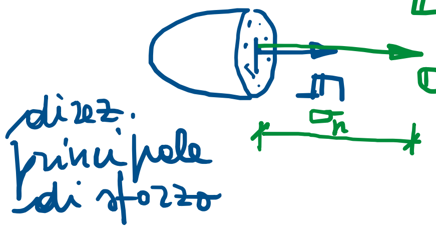
$$\mathbb{Q}^T\cdot\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$$

$\mathbb{I}$ tensore identità del 2° ordine $[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$, $I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$$Q_{ji}\,Q_{jk} = Q_{ij}\,Q_{kj} = \delta_{ik}$$

$$\{t_n\}' = [\mathbb{Q}]\cdot\{t_n\}$$
$$= [\mathbb{Q}]\cdot[\sigma^T]\cdot\{n\}$$
$$= \underbrace{[\mathbb{Q}]\cdot[\sigma^T]\cdot[\mathbb{Q}]^T}_{[\sigma^T]'}\cdot\{n\}' = [\sigma^T]'\{n\}' \Rightarrow \boxed{[\sigma]' = [\mathbb{Q}]\cdot[\sigma]\cdot[\mathbb{Q}^T]} \iff \sigma'_{ij} = Q_{ik}\,\sigma_{kl}\,Q_{jl}$$

- Tensioni principali $(\tau_n = 0)$



$$\left.\begin{array}{l} t_n = \sigma^T\cdot n \\ \sigma_n = \sigma_n\, n \end{array}\right\} \quad \sigma\cdot n = \sigma_n\, n$$

autovalori

autovettori

$(n \neq 0)$

$$\iff (\sigma - \sigma_n\,\mathbb{I})\cdot n = \mathbb{0} \quad \text{Soluz. non banali sse:}$$

pb. agli autovalori associato a σ

$$-\det(\sigma - \sigma_n\mathbb{I}) = +\sigma_n^3 - I_1\,\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n - I_3 = 0 \Rightarrow 3 \text{ radici } \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$$

eq.ne caratteristica

INVARIANTI

primo $I_1 = \mathrm{tr}\,\sigma = \sigma_{ii}$

secondo $I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \mathrm{tr}^2\sigma\right)$

terzo $I_3 = \det\sigma = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\sigma\right)$

$$\sigma^3 - I_1\,\sigma^2 - I_2\,\sigma - I_3\,\mathbb{I} = \mathbb{0}$$

da Th. di Cayley-Hamilton

L'operatore traccia è invariante:

$$\mathrm{tr}[\sigma]' = Q_{ik}\,\sigma_{kl}\,Q_{il} = Q^T_{ki}\,Q_{il}\,\sigma_{kl} = \delta_{kl}\,\sigma_{kl} = \sigma_{kk}$$
$$= \mathrm{tr}[\sigma]$$

Componenti volumetrica e deviatorica:

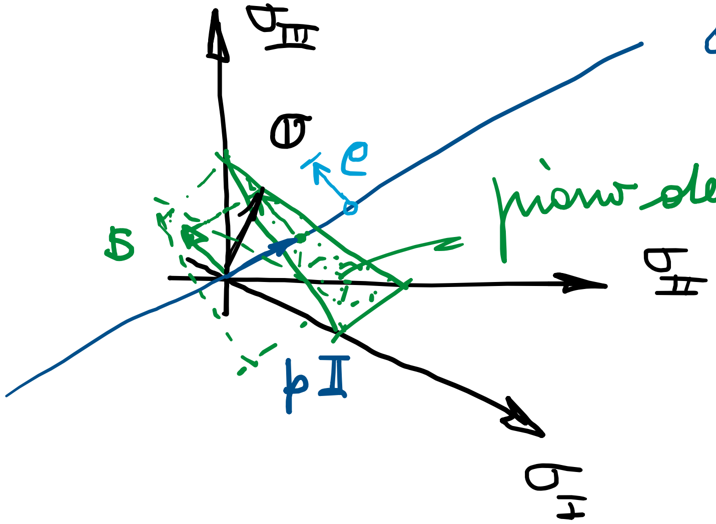
$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D$$

$$= p\,\mathbb{I} + s \Rightarrow s = \sigma - \underbrace{\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}}_{\frac{I_1}{3}}\,\mathbb{I}$$

tensione media $\leftarrow p = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$

deviatore di sforzo

$$\left(\mathrm{tr}\,s = \mathrm{tr}\,\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\cancel{3}}\,\cancel{3} \equiv 0\right)$$



asse idrostatico

$$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$$

piano deviatorico
(⊥ all'asse idrostatico)

Problemi agli autovalori:

$$\sigma_V \cdot n = \sigma_v\, n \qquad \text{autoval. } p$$

$$p\,\mathbb{I} \cdot n = p\, n \qquad \text{autovett. } n \text{ arbitrari}$$

$$s \cdot n = s_n\, n \qquad \text{autoval. } s_n = \sigma_n - p$$

$$(\sigma - p\mathbb{I})\cdot n = \sigma \cdot n - p\,n = s\,n \Rightarrow \sigma \cdot n = \underbrace{(s+p)}_{\sigma_n}\, n \qquad \text{autovet. } n$$

Invarianti del deviatore:

$$\begin{cases} J_1 \equiv \mathrm{tr}\,s \equiv 0 \\ J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,s^2 \\ J_3 = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,s^3 \end{cases}$$

$$s^3 - \cancel{s^2} - J_2\, s - J_3 = 0 \quad \text{(eq.ne in forma depressa)}$$

si cerca soluz. nella forma:

$$s_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\alpha_i = \frac{2}{3}\underbrace{\sqrt{3J_2}}_{\sigma_{eq}^{vM}}\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\underbrace{\sqrt{2J_2}}_{e}\cos\alpha$$

Sostituendo:

$$\frac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2}\cos^3\alpha - J_2\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\alpha = J_3$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2}\underbrace{\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)}_{\cos 3\alpha} = J_3 \Rightarrow \boxed{\cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}}$$

$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2 \\ J_3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1\left(\frac{2}{9} I_1^2 + I_2\right) \end{cases}$$

ove

$$\sigma_i = s_i + p \leftarrow s_i \leftarrow \alpha_i \begin{cases} 0 \le \alpha_1 = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) \le \frac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\pi \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Comportamento e resistenza dei materiali:

- Elastico: disaccoppiamento di risposta elastica isotropa volumetrica e deviatorica:

  $p = K\vartheta$ deformazione volumetrica ; $s = 2Ge$ deviatore di deformaz.

  $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di volume

  $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

  E: modulo di elasticità longitudinale o di Young

  ν: coeff. di contrazione trasversale o di Poisson

- Plastico: risposta oltre il campo elastico per diversi materiali (metallici, lapidei) ⇒ Teoria della Plasticità

  s $\quad$ p, s

Funzione di snervamento: $f(\sigma) = f\left(\xi = \dfrac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\sqrt{3}},\ \rho = \sqrt{2J_2},\ \vartheta = \alpha\right)$ $\quad J_3$

coordinate di Haigh-Westergaard