Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

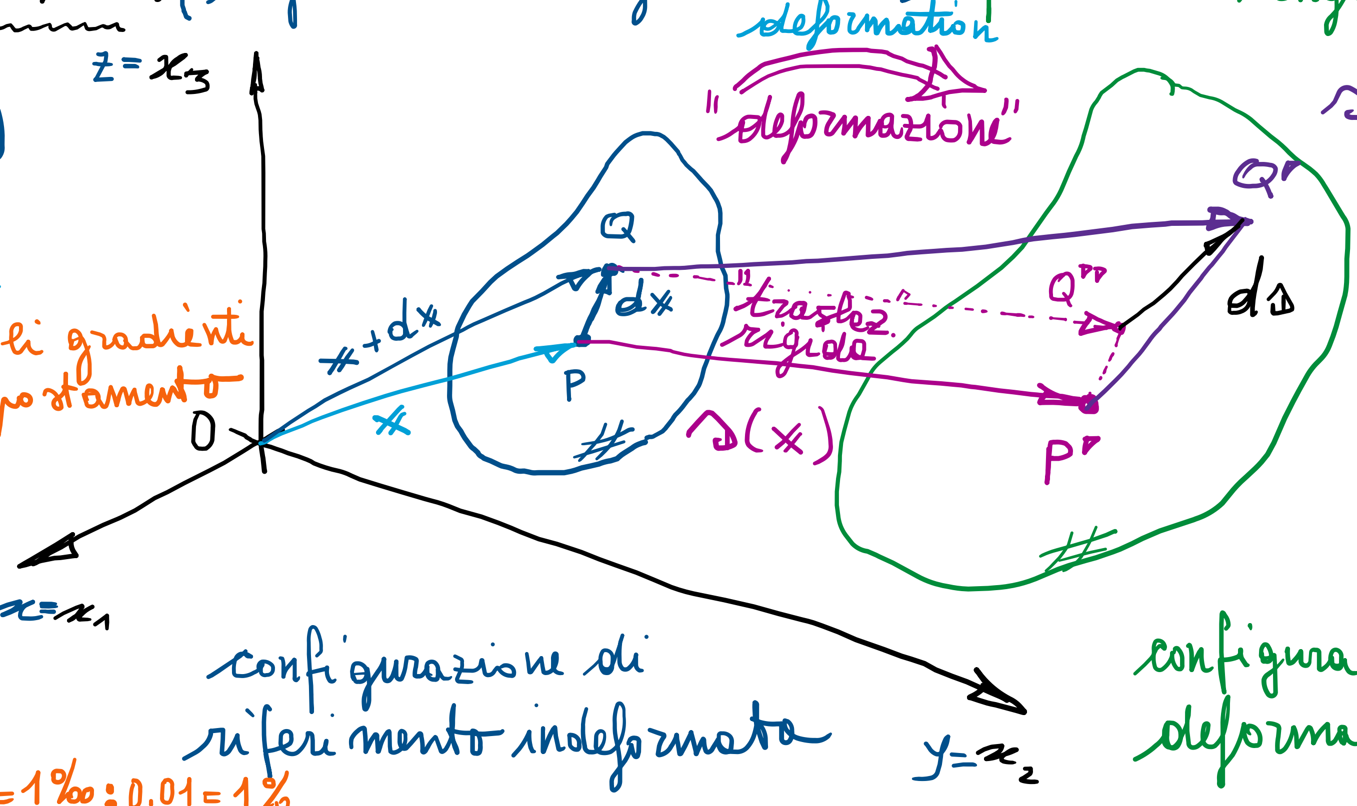
LEZIONE 14

Cinematica dei continui : (definizione di deformazione ; equazioni di congruenza interna)

- Misura (intensiva) della deformazione (in regime di piccole deformazioni) → piccoli gradienti di spostamento

$s(x) \to \varepsilon(x)$

vettore spostamento $s_i(x_k)$ — tensore di deformazione $\varepsilon_{ij}(x_k)$



$s(x+dx) = s(x) + ds$

$ds = s(x+dx) - s(x)$

$= \frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot dx$

$= \underbrace{\nabla s(x)}_{\Psi} \cdot dx$

$= \Psi \cdot dx$

derivata parziale

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$; $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$

$|\Psi_{ij}| << 1 \sim 0.001 = 1‰ ; 0.01 = 1\%$

$\Psi(x) = \nabla s(x) = \frac{\partial s(x)}{\partial x}$ tensore gradiente di spostamento (2° ordine) (deve contenere gradiente la deformazione pura : "strain")

$= \varepsilon + \vartheta$ decomposizione additiva di Ψ $\left(\Psi_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j} \right.$, 9 componenti $\left. \right)$

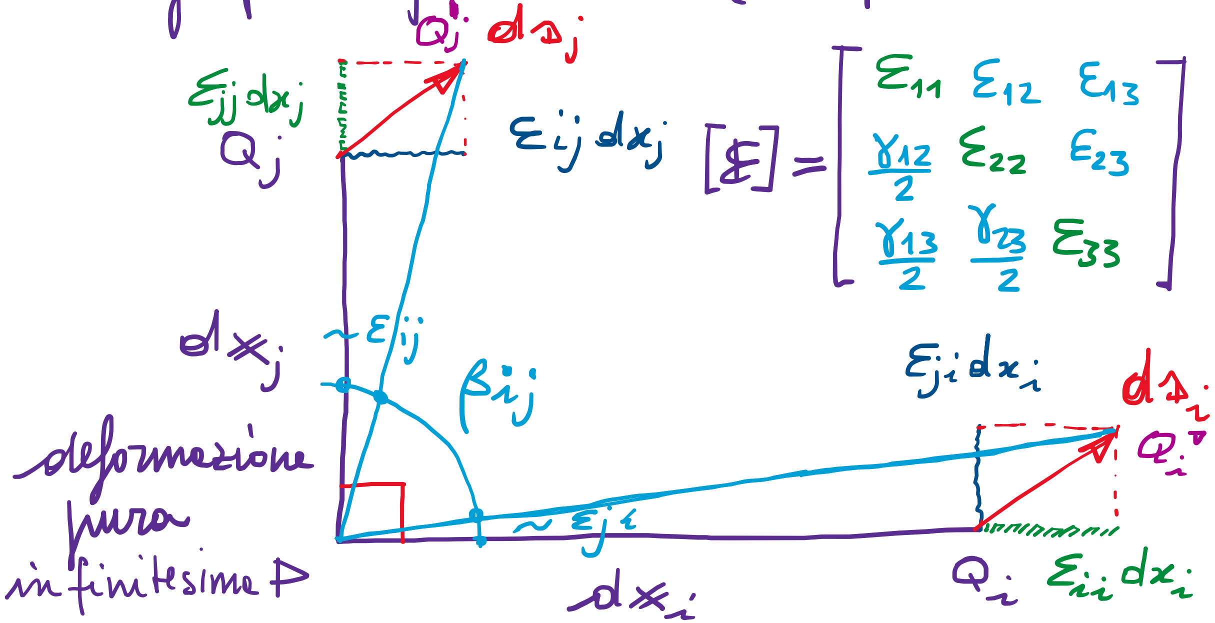
con :

$\Psi = \varepsilon + \vartheta$

$\varepsilon = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T)$ parte simmetrica $[\varepsilon^T = \varepsilon ; \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})]$ "strain" deformazione pura

$\vartheta = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T)$ parte emisimmetrica $[\vartheta^T = -\vartheta ; \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij} = -\frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i})]$ rotazione rigida infinitesime

• Significato fisico di ε (componenti ε_{ij}) : $\Psi = \varepsilon \rightarrow ds = \Psi \cdot dx = \varepsilon \cdot dx \leftrightarrow ds_i = \varepsilon_{ij}\, dx_j$



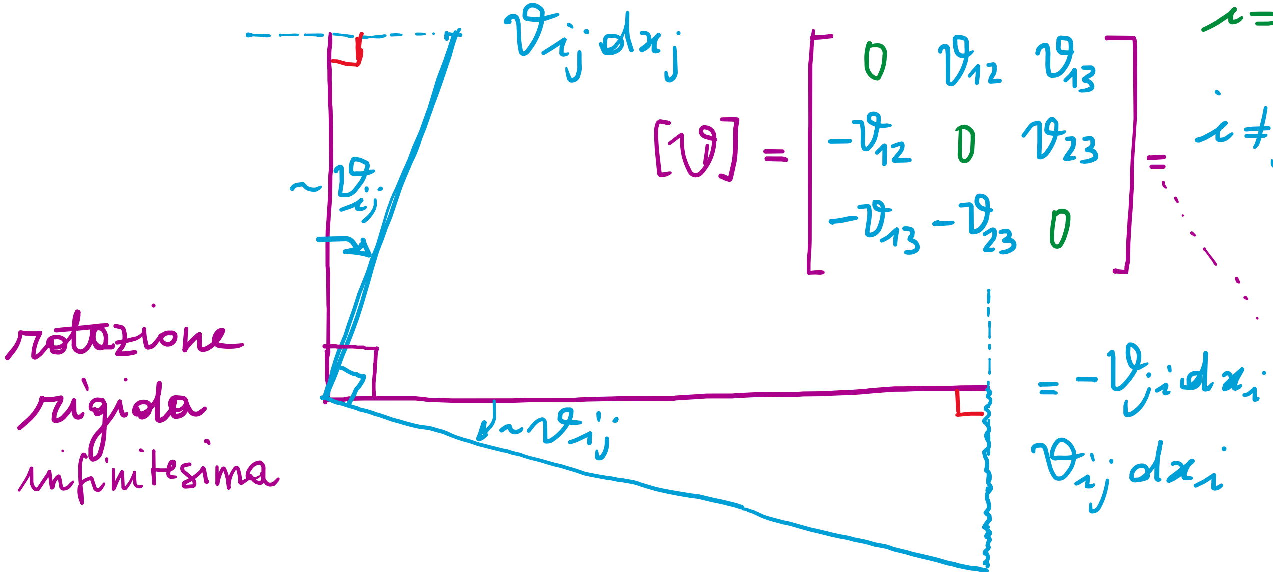
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$i \neq j$ $\varepsilon_{ii} = s_{i,i}$ allungamento specifico nella direzione i (vedi $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$)

$i \neq j$ $\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$ $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij}$ scorrimento angolare tra fibre i e j

... deformazione tagliante

• Significato fisico di ϑ (componenti ϑ_{ij}) : $\Psi = \vartheta$ $(\vartheta^T = -\vartheta\ ;\ \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij})$ $[\vartheta_{ii} \equiv 0]$



$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ -\vartheta_{13} & -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i = j$ $\vartheta_{ii} \equiv 0$

$i \neq j$ ϑ_{ij} rotazione rigida infinitesima delle fibre i,j (rispetto all'asse k)

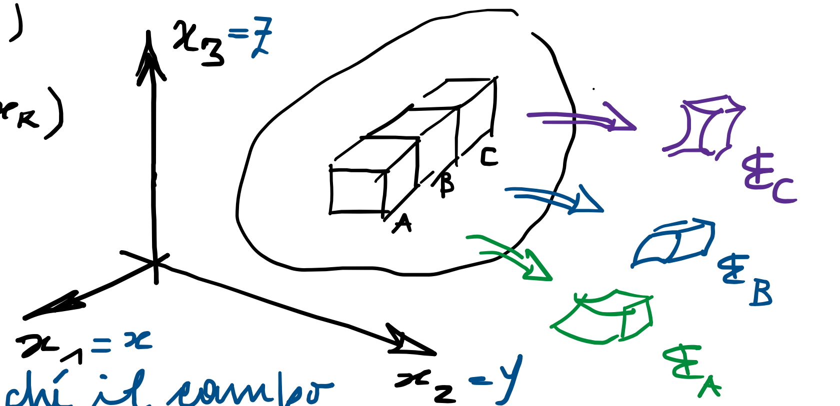
$-2\dot{\omega}_k = 2\dot{\vartheta}_{ij} = \dot{s}_{i,j} - \dot{s}_{j,i}$ $\left(2\dot{\omega} = \text{rot}\, \underset{\dot{s}}{v} = \nabla \wedge v\right)$

velocità angolare

prodotto vettoriale

Equazioni di congruenza interna (o di compatibilità)

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \Updownarrow \varepsilon_{ij}(x_k)$



- CN di congruenza per il campo $\varepsilon_{ij}(x_k)$:

Scarto Residuo

$$
3\begin{cases}
S_{zz} = R_z = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} = 0 \quad (*) \\
S_{xx} = R_x = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0 \\
S_{yy} = R_y = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0
\end{cases}
$$

Affinché il campo di deformazione risulti compatibile ("riassemblaggio dei dadini deformati") la variazione spaziale di $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ deve soddisfare certe relazioni.

$$
3\begin{cases}
S_{yz} = U_x = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} = 0 \\
S_{zx} = U_y = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} = 0 \\
S_{xy} = U_z = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} = 0
\end{cases}
$$

Se $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{s} + \nabla \mathbf{s}^T\right) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{i,j} + s_{j,i}\right)$

$(*)$ $\cancel{s_x}_{,xyy} + \cancel{s_y}_{,yxx} - \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{s_x}_{,y} + \cancel{s_y}_{,x}\right)_{,xy} = 0$

per il Th. di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni $\Rightarrow$ (se $\boldsymbol{\varepsilon}$ è congruente, allora $=0$)

- Scrittura compatta (de Saint Venant) ~ 1884

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk}}$$

$3^4 = 81 \rightarrow 6$ distinte

(equivalenti a 3 relazioni indipendenti, in quanto valgono le identità di Bianchi seguenti)

$\mathbb{S} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$; $\mathbb{R} = \mathbb{U} = \mathbf{0}$

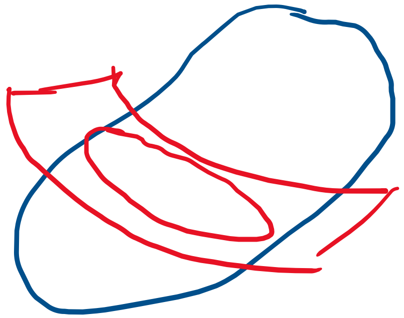
Identità di Bianchi (3 relazioni): [per Th. di Schwarz]

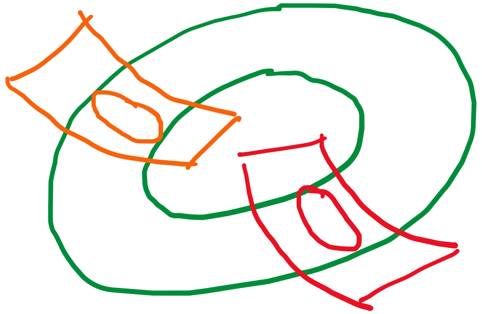
anche per campo $\varepsilon(x)$ non congruente

$$
\begin{cases}
R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} \equiv 0 \\
U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} \equiv 0 \\
U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} \equiv 0
\end{cases}
\iff \nabla \cdot \mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{S} \equiv \mathbf{0}, \quad S_{ij,i} \equiv 0
$$

Sono CS di congruenza? (integrando ε si ottiene un campo s compatibile?)

$\Delta s \neq \mathbf{0}$





Occorre in più una condizione di compatibilità alla interfaccia che giunga ad imporre $\Delta s = \mathbf{0}$

(per ogni interfaccia aggiuntiva, rispetto a corpo monoconnesso)

Sì, per corpi monoconnessi (si scindono in due parti con un unico taglio)

No, per corpi pluriconnessi (es. biconnesso)