Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

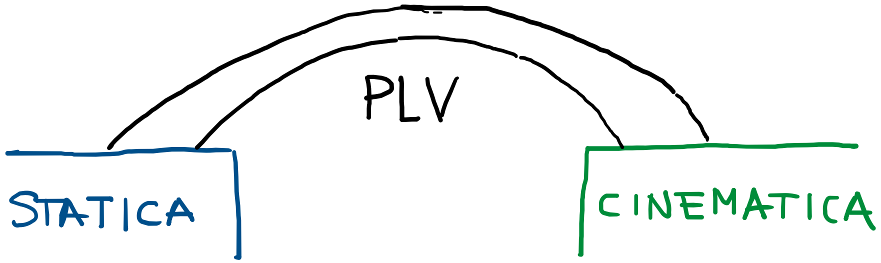
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) → Meccanica dei continui

"Ponte" tra statica e cinematica



Sistema A staticamente ammissibile: Famiglia di quantità statiche equilibrate

$$\mathbf{F}^A, \mathbf{f}^A; \boldsymbol{\sigma}^A$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ in } V$$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \text{ su } S_f$$

"virtuali"

no causa-effetto $\not\Leftrightarrow$

Sistema B cinematicamente ammissibile: Famiglia di quantità cinematiche congruenti

$$\mathbf{s}^B, \bar{\mathbf{s}}^B; \boldsymbol{\varepsilon}^B$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^B = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{s}^B + \nabla \mathbf{s}^{B^T}\right) \text{ in } V$$

$$\mathbf{s}^B = \bar{\mathbf{s}}^B \text{ su } S_s$$

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di congruenza):

$$\forall \left.\begin{matrix}\text{Sistema A}\\ \text{Sistema B}\end{matrix}\right]: \mathcal{L}_e^{AB} = \int_V \underbrace{\mathbf{F}^A \cdot \mathbf{s}^B}_{F_i^A s_i^B} dV + \int_{S_f} \underbrace{\mathbf{f}^A \cdot \mathbf{s}^B}_{f_i^A s_i^B} dS + \int_{S_s} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^A \cdot \bar{\mathbf{s}}^B}_{n_i \sigma_{ij}^A \bar{s}_j^B} dS = \int_V \underbrace{\boldsymbol{\sigma}^A : \boldsymbol{\varepsilon}^B}_{\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B} dV = \mathcal{L}_i^{AB}$$

(valido indipendentemente dal comportamento del materiale)

Manifestazioni del PLV (CS): strumenti applicativi, operativi ("metodi")

PSV (CS di equilibrio)

$$\left.\begin{matrix}\text{Sistema B cinem. amm.}\\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}\end{matrix}\right\}: \text{Sistema A static. amm.}$$

(v. "metodo degli spostamenti")

PFV (CS di congruenza)

$$\left.\begin{matrix}\text{Sistema A static. amm.}\\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}\end{matrix}\right\}: \text{Sistema B cinem. amm.}$$

(v. "metodo delle forze")

Dim. del PLV (CN di equil. e congruenza) => Teorema dei Lavori Virtuali

$\begin{cases} \text{Hp.: } A, B \text{ ammiss.} \\ \text{Tesi: } \mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i \end{cases}$

Th. della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{g} \, dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \, dS \quad , \ \mathbf{g}: \text{campo tensoriale}$$

$g_{i,i}$ $\qquad$ $n_i g_i$ $\qquad$ es. vettore g_i

$$\left[\operatorname{div}(\ ) = \nabla \cdot (\ ) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\ ) \right]$$

Sia $\mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s} \Leftrightarrow g_i = \sigma_{ij} s_j \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{g} = ?$

vettore $\quad$ tensore doppio $\quad$ vettore $\quad$ scalare

$$= g_{i,i} = (\sigma_{ij} s_j)_{,i} \overset{\text{regola del prodotto}}{=} \underbrace{\sigma_{ij,i}}_{(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_j} s_j + \sigma_{ij} \underbrace{s_{j,i}}_{\psi_{ji}}$$

simm. $= \sigma_{ji}$ $(\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma})$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}) = (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(T)} + \cancel{\boldsymbol{\vartheta}^T})$$

$$\nabla \mathbf{s} \doteq \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\vartheta}$$

simm. $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$

emis. $\boldsymbol{\vartheta}^T = -\boldsymbol{\vartheta}$, $\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$

$$\sigma_{ij} \vartheta_{ji} = \cancel{\sigma_{11} \vartheta_{11}} + \sigma_{12} \cancel{\vartheta_{21}} + \dots + \sigma_{21} \cancel{\vartheta_{12}} \equiv 0$$

$$(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\vartheta}^T = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\vartheta} \equiv 0)$$

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_V \overset{A}{\boldsymbol{\sigma}} : \overset{B}{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = \int_V \left[\operatorname{div}(\overset{A}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{B}{\mathbf{s}}) - (\operatorname{div} \overset{A}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \overset{B}{\mathbf{s}} \right] dV$$

th. Div.

$$= \int_S \mathbf{n} \cdot \overset{A}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{B}{\mathbf{s}} \, dS - \int_V (\operatorname{div} \overset{A}{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \overset{B}{\mathbf{s}} \, dV$$

A static. amm.

B cinemat. amm.

$$= \int_{S_f} \overset{A}{\mathbf{f}} \cdot \overset{B}{\mathbf{s}} \, dS + \int_{S_s} \mathbf{n} \cdot \overset{A}{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overset{B}{\bar{\mathbf{s}}} \, dS + \int_V \overset{A}{\mathbf{F}} \cdot \overset{B}{\mathbf{s}} \, dV = \mathcal{L}_e^{AB} \quad \text{c.v.d.}$$

(idem per CS di equilibrio o di congruenza)

Proprietà del "problema elastico lineare"

- Principio di Sovrapposizione degli Effetti (PSE) [Valido per la linearità di tutte le equaz. governanti ⇒ operatori lineari]

α (Sistema ① : $\mathbb{F}^1, \mathbf{f}^1, \bar{\mathbf{s}}^1 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \mathbf{s}^1$)

β (Sistema ② : $\mathbb{F}^2, \mathbf{f}^2, \bar{\mathbf{s}}^2 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \mathbf{s}^2$)

es. $\mathrm{div}(\alpha\,\boldsymbol{\sigma}^1 + \beta\,\boldsymbol{\sigma}^2) = \alpha\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^1 + \beta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^2$

algebriche e differenziali

$$\underbrace{\alpha\mathbb{F}_1 + \beta\mathbb{F}_2,\ \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2,\ \alpha\bar{\mathbf{s}}^1 + \beta\bar{\mathbf{s}}^2}_{\text{combinazione lineare dei dati}} \Rightarrow \underbrace{\alpha\boldsymbol{\sigma}^1 + \beta\boldsymbol{\sigma}^2,\ \alpha\boldsymbol{\varepsilon}^1 + \beta\boldsymbol{\varepsilon}^2,\ \alpha\mathbf{s}^1 + \beta\mathbf{s}^2}_{\text{combinazione lineare delle soluzioni}}$$

- Buona posizione del problema ($\exists$ un numero finito di soluzioni con dipendenza continua dai dati)
  - $\exists$ la soluzione (Teoria dell'Elasticità ⇒ Sokolnikoff, 1956)
  - Unicità della soluzione ($\exists!$: esiste un'unica soluzione) ⇒ Th. di Kirchhoff ~ 1859

Dim.: Da PSE con $\alpha = -\beta = 1$, con $\mathbb{F} = \mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^2$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^2$, $\mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}}^1 = \bar{\mathbf{s}}^2$ (stessi dati)

$$\Delta\mathbb{F} \equiv \mathbf{0}, \quad \Delta\mathbf{f} \equiv 0, \quad \Delta\bar{\mathbf{s}} \equiv 0$$

Hp. (ragionamento per assurdo) : $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2 \neq \mathbf{0}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^1 - \boldsymbol{\varepsilon}^2 \neq \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2 \neq 0$

(diverse soluzioni)

(es. moti rigidi arbitrari)

$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$

Da PLV (A, B sist. reale)

$$\mathcal{L}_e \equiv 0 = 2\int_V \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\sigma} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\, dV = 2\int_V \underbrace{\omega(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})}_{\omega(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) > 0\ \forall \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}}\, dV = \overset{\text{assurdo}}{\mathcal{L}_i} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = 0,\ \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0};\ \Delta\mathbf{s} \neq 0 \text{ in generale}$$

def. pos.

ipotesi smentite

(linearità + elasticità)

unicità su sforzo e deformazione

- Approcci risolutivi
  - analitico (soluzioni esatte o approssimate)
  - numerico (soluzioni approssimate) ⇒ Calcolo Numerico

v. CMSS

Metodo degli Elementi Finiti (FEM)

" " " di contorno (BEM)

Metodo delle Differenze Finite (FD)

Metodo degli Elementi Discreti (DEM)

⇒ (es. murature)

processo di discretizzazione

(∞ gdl ⇒ n. finito di gdl)

- Metodologie di analisi (metodi)
  - Diretto : Dati → Soluzione (soluzione esatta, in forma chiusa, solo per casi particolari)
  - Semi-inverso : Dati ⇄ Soluzione parzialmente nota (a meno di un certo n. di parametri)
  - Inverso : Dati ← Soluzione (es. Structural Health Monitoring (SHM), Identificazione parametrica mediante analisi inversa, Model updating)

es. nota sperimentalmente

Input ⇄ Output