Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

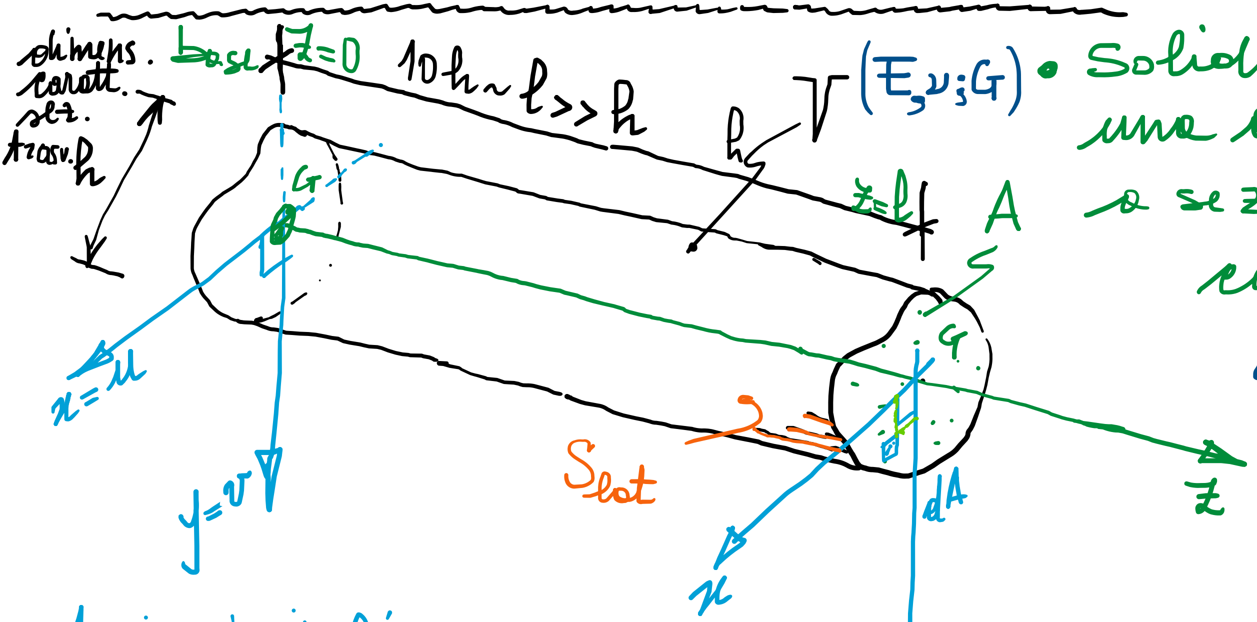
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Problema di de Saint Venant (~ 1855) _ Caso di problema elastico lineare particolare:



- Solido "tipo trave" di forma allungata, cioè con una dimensione prevalente rispetto alle altre due, a sezione costante (di area A) ed asse rettilineo $\Rightarrow$ cilindro o prisma di DSV.
- Composto da materiale elastico, lineare, isotropo, omogeneo $\forall x \in V \Rightarrow E, \nu; G$ cost.
- Privo di vincoli esterni ($S_u = \emptyset$) $\Rightarrow$ soluz. in termini di spostamento nota a meno di moti rigidi.
- Privo di forze di volume ($\mathbb{F} = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie su S_{lat} ($\mathbb{f} = 0$ su S_{lat})
- Soggetto solamente a forze di superficie sulle basi ($z=0$, $z=\ell$), di distribuzione non specificata e note solo in termini di risultanti (tali da formare un sistema di forze autoequilibrato).

Assi principali d'inerzia: (scelta del sistema di rif.)

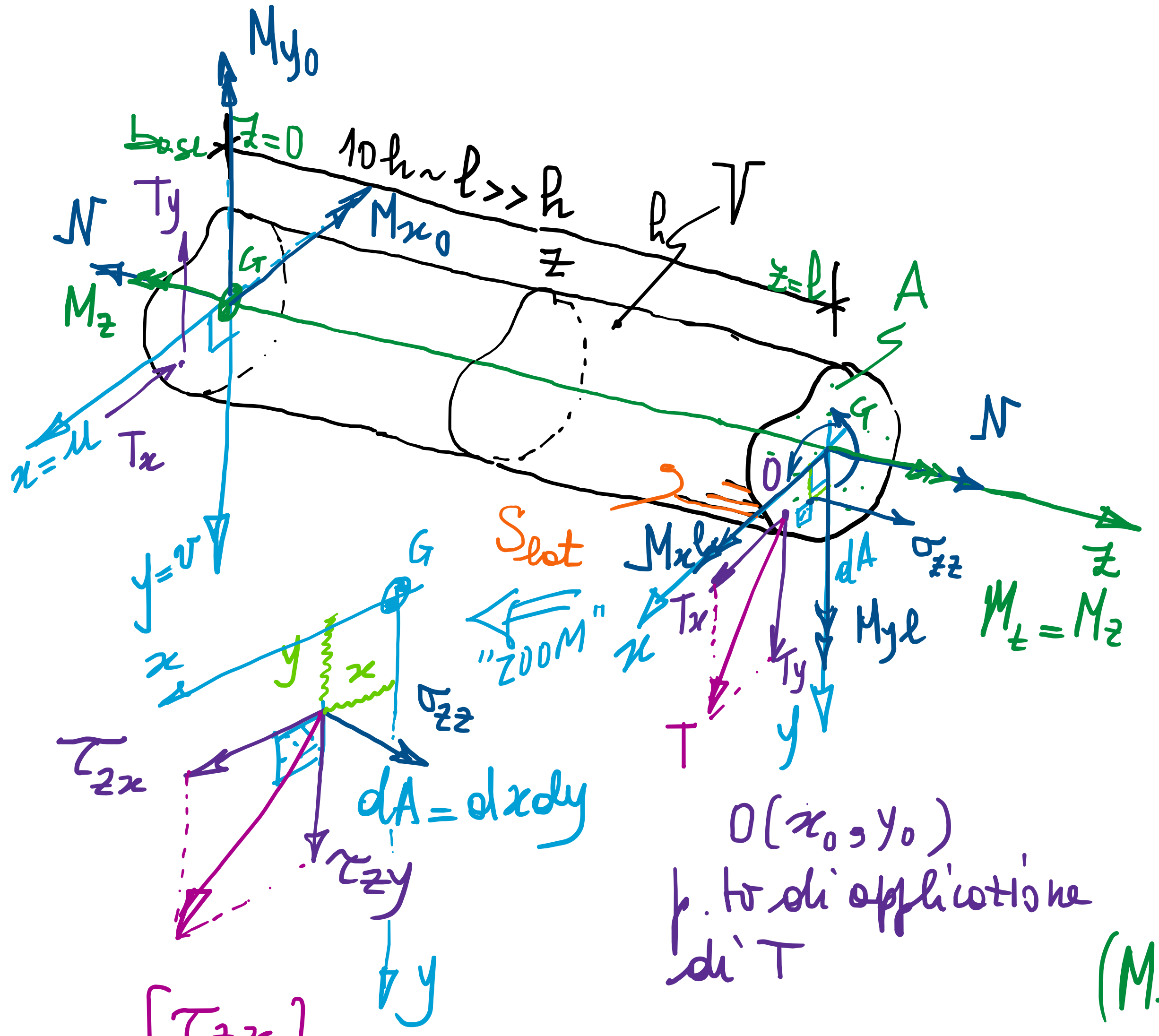
- baricentrici; $G \in x, y \Rightarrow$ momenti statici nulli $S_x = \int_A y \, dA = 0$; $S_y = \int_A x \, dA = 0$
- mutuamente perpendicolari; $x \perp y$
- coniugati $\overset{CNS}{\Longleftrightarrow}$ $J_{xy} = \int_A xy \, dA = 0$ momento d'inerzia centrifugo nullo

(l'uno contiene il "centro" relativo all'altro)

NB: Se $\exists$ asse di simm. retta, tale asse è principale (insieme al $\perp$ per G)

Postulato di DSV: La reale distribuzione di queste forze di superficie, a parità di risultanti, è ininfluente ai fini della soluzione (salvo per possibili "effetti di bordo" localizzati).

Risultanti ⇒ casi di DSV : (equivalenza statica)



$$N = \int_A \sigma_{zz}\, dA = \text{cost}$$ Azione assiale o normale

$$T_x = \int_A \tau_{zx}\, dA = \text{cost}$$

$$T_y = \int_A \tau_{zy}\, dA = \text{cost}$$

Azioni taglianti o taglio (componenti)

$$M_x = \int_A \sigma_{zz}\, y\, dA = M_{x_0} + T_y z$$

$$M_y = -\int_A \sigma_{zz}\, x\, dA = M_{y_0} - T_x z$$

lineari in z

Azioni flettenti (momenti ")

$$(M_t = M_z) + T_y x_0 - T_x y_0 = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$ con

M_t azione torcente (momento ") costante

$$\underline{\tau}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$, σ_{zz} sforzo normale al piano della sezione

vettore delle tensioni tangenziali nel piano della sezione

Equivalenza statica tra risultanti e campo di sforzo da esse indotto.

• Soluzione tramite approccio semi-inverso (agli sforzi):

• Hp. fondamentale di DSV: $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\tau_{xy}=0$; restano σ_{zz} ; $\underbrace{\tau_{zx},\ \tau_{zy}}_{\tau_z}$

$(=\tau_{yx})$

suffragata dall'osservaz. sperimentale
(e supportata dall'unicità della soluzione)

componenti di sforzo da determinare, in $(x, y; z)$.

• Equaz. indefinite di equilibrio:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \cancel{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \ \text{in } V \iff \sigma_{ij,i} = 0$$

(campo di sforzo solenoidale o a divergenza nulla)

$$\begin{cases} \cancel{\sigma_{xx,x}} + \cancel{\tau_{yx,y}} + \tau_{zx,z} = 0 \\ \cancel{\tau_{xy,x}} + \cancel{\sigma_{yy,y}} + \tau_{zy,z} = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{cases}$$

$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx}(x,y) \\ \tau_{zy}(x,y) \end{Bmatrix} \ \text{indip. da } z$$

$$\Rightarrow \left(\boxed{\mathrm{div}\,\tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z}} \right) \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

equazione di equilibrio

$$\Rightarrow 0 = -\sigma_{zz,zz} \Rightarrow \sigma_{zz} \ \text{lineari in } z$$

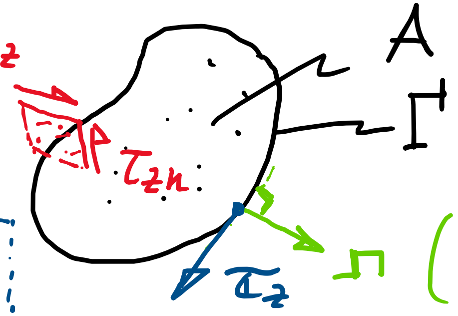
• Condizioni al contorno:

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} = \mathbf{0} \ \text{su } S_{lat} \ (\text{su } \Gamma) \iff n_i\sigma_{ij} = 0$$

$$\begin{cases} n_x \cancel{\sigma_{xx}} + n_y \cancel{\tau_{yx}} + \cancel{n_z} \tau_{zx} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_x \cancel{\tau_{xy}} + n_y \cancel{\sigma_{yy}} + \cancel{n_z} \tau_{zy} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_z \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + \cancel{n_z} \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

sup. laterale scarica

$0 = \tau_{nz}$



$\mathbf{n}$ ($n_z = 0$)

τ_z, su Γ, tangente al contorno

equilibrio al contorno

$$\boxed{\tau_z \cdot \mathbf{n} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0, \quad \tau_z \perp \mathbf{n}}$$

• Legame costitutivo:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu\, \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

lineari in z;

deformazioni normali

$(\gamma_{xy} = 0)$ $\quad \gamma_z = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{\tau_z}{G}$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{2(1+\nu)\tau_{ij}}{E} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{ij} \quad \text{indip. da } z$$

deformazioni taglianti

• Equazioni di congruenza interna:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk} \qquad 81 \to 6 \to 3$$

di DSV

$$\begin{cases} \cancel{\varepsilon_{xx,yy}} + \cancel{\varepsilon_{yy,xx}} = 2\cancel{\varepsilon_{xy,xy}} \quad \checkmark \\ \varepsilon_{yy,\cancel{zz}} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\varepsilon_{yz,y\cancel{z}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} \text{ lin. in } y \\ \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,\cancel{zz}} = 2\varepsilon_{zx,\cancel{z}x} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} \text{ lin. in } x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \cancel{\varepsilon_{xy,xz}} + \varepsilon_{xz,xy} \\ \varepsilon_{yy,zx} + \varepsilon_{zx,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \cancel{\varepsilon_{yx,yz}} \\ \varepsilon_{zz,xy} + \cancel{\varepsilon_{xy,zz}} = \varepsilon_{zx,\cancel{z}y} + \varepsilon_{zy,\cancel{z}x} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} \text{ indip. da } xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{zx,xy} - \varepsilon_{zy,xx} = \varepsilon_{xx,yz} \\ \varepsilon_{zx,yy} - \varepsilon_{zy,yx} = -\varepsilon_{yy,zx} \end{cases}$$

Sforzo normale:

costanti $a_0, a_1, a_2 ; b_0, b_1, b_2$

$$\sigma_{zz}(x,y;z) = a_0 + a_1 x + a_2 y - z(\cancel{b_0} + b_1 x + b_2 y)$$
$$= (a_0 - \cancel{b_0} z) + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z) y$$

Infatti

$$\int_A \operatorname{div} \tau_z \, dA \overset{\text{Th. Div.}}{=} \int_\Gamma \cancel{n \cdot \tau_z} \, d\Gamma$$
$$\int_A -\sigma_{zz,z} \, dA = b_0 A = 0$$

Per equivalenza statica:

$$N = \int_A \sigma_{zz} \, dA = (a_0 - b_0 z)A + (a_1 - b_1 z)\cancel{S_y} + (a_2 - b_2 z)\cancel{S_x} = \text{cost} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{N}{A} \; ; \; b_0 = 0}$$

$$\begin{cases} M_x = \int_A \sigma_{zz} y \, dA = (a_0 - b_0 z)\cancel{S_x} + (a_1 - b_1 z)\cancel{J_{xy}} + (a_2 - b_2 z) J_x \\ M_y = -\int_A \sigma_{zz} x \, dA = \quad -(a_1 - b_1 z) J_y \end{cases}$$

$$J_x = \int_A y^2 \, dA \qquad J_y = \int_A x^2 \, dA$$

momenti di inerzia

$$M_{x_0} + T_y z = M_x = (a_2 - b_2 z) J_x$$
$$M_{y_0} - T_x z = M_y = -(a_1 - b_1 z) J_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_2 - b_2 z = \dfrac{M_x}{J_x} \; ; & a_2 = \dfrac{M_{x_0}}{J_x}, & b_2 = -\dfrac{T_y}{J_x} \\ a_1 - b_1 z = -\dfrac{M_y}{J_y} \; ; & a_1 = \dfrac{-M_{y_0}}{J_y}, & b_1 = -\dfrac{T_x}{J_y} \end{matrix}}$$

campo lineare

$$\boxed{\sigma_{zz}(x,y;z) = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x}$$

(vedi tenso-flessione deviata, per PSE, dovuti a N, M_x, M_y)

- Equazione di congruenza (nelle τ_{zx}, τ_{zy}):

$$\frac{1+\nu}{\cancel{E}}\underbrace{\left(\tau_{zx,y}-\tau_{zy,x}\right)}_{f}{}_{,x} = -\frac{\nu}{\cancel{E}}\sigma_{zz,zy} = +\nu b_2$$

$$\frac{1+\nu}{\cancel{E}}\left(\tau_{zx,y}-\tau_{zy,x}\right)_{,y} = +\frac{\nu}{\cancel{E}}\sigma_{zz,zx} = -\nu b_1$$

sia $\boxed{\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}}$

Integrando: $\int df = \int f_{,x}dx + \int f_{,y}dy$

costante di integrazione arbitraria (sarà legata a M_t)

$$\left(\tau_{zx,y}-\tau_{zy,x}\right) = \bar{\nu}\left(b_2 x - b_1 y\right) - c$$

$$= \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x}x + \frac{T_x}{J_y}y\right) - c$$ equazione di congruenza

- Problema nelle $\tau_z = \{\tau_{zx}, \tau_{zy}\}^T$: (due equazioni governanti) (equazioni differenziali del 1° ordine)

$$\begin{cases} \operatorname{div}\tau_z = \tau_{zx,x}+\tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z} = \cancel{b_0}+b_1x+b_2y = -\left(\frac{T_x}{J_y}x+\frac{T_y}{J_x}y\right) & \text{eq. di equil. in A} \\ -(\operatorname{rot}\tau_z)_z = \tau_{zx,y}-\tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x}x+\frac{T_x}{J_y}y\right)-c & \text{eq. di congruenza in A} \end{cases}$$

c.c. $\tau_z \cdot n = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0$ su Γ (contorno della sez. trasversale)