Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

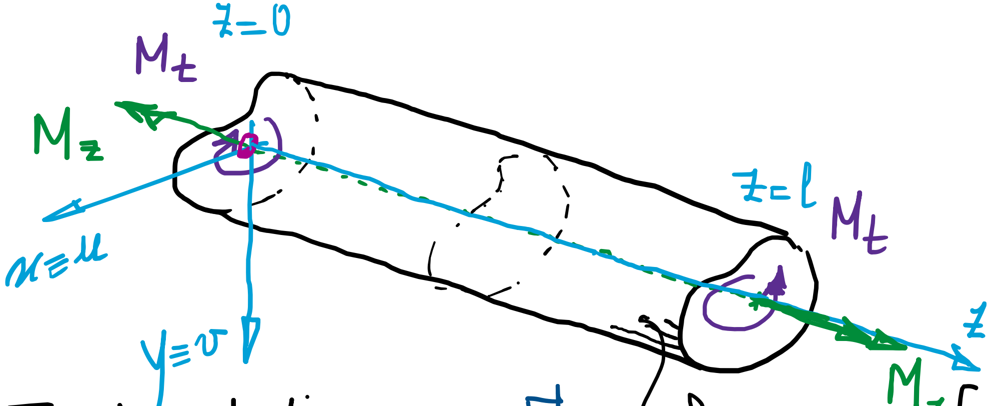
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

• Caso di DSV della torsione : $N = T_x = T_y = 0;\ M_x = M_y = 0$ $\quad (\sigma_{zz} \equiv 0)$

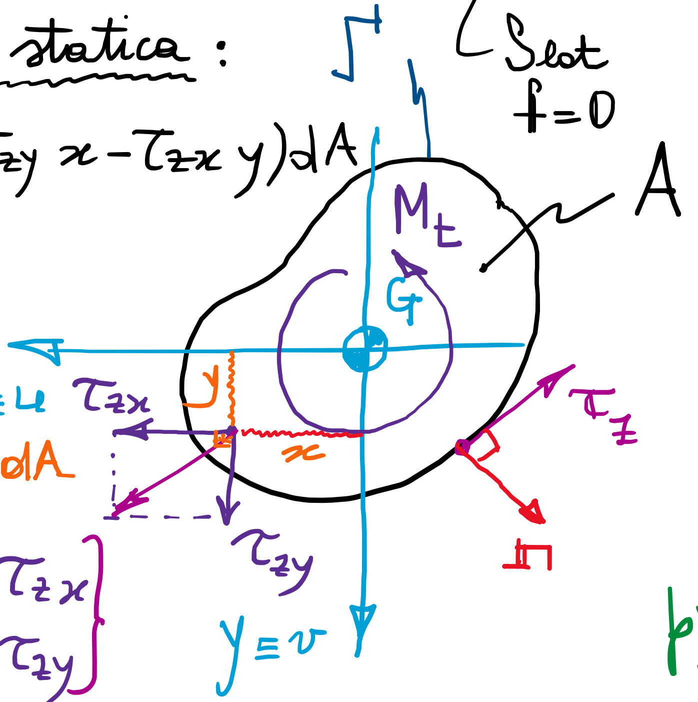


• Presente solo un momento torcente, nel piano della sezione, costante : $M_t = M_z = \text{cost}$

• Equazioni governanti : (differenziali lineari)

Equiv. statica :

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$



$$\begin{cases} \operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \ \ldots\ldots \text{equilibrio in } A \\ -(\operatorname{rot} \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \ \ldots\ldots \text{congruenza} \end{cases}$$

$c \updownarrow M_t$ cost

rotore gradiente

$$\operatorname{rot} \tau_z = \nabla \wedge \tau_z = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = K(\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}) = \underbrace{-(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})}_{(\operatorname{rot} \tau_z)_z} K$$

$,x \quad ,y \quad ,z$

prodotto vettoriale

$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$

vettore delle tensioni tangenziali $\tau_z = \tau_z(x, y)$

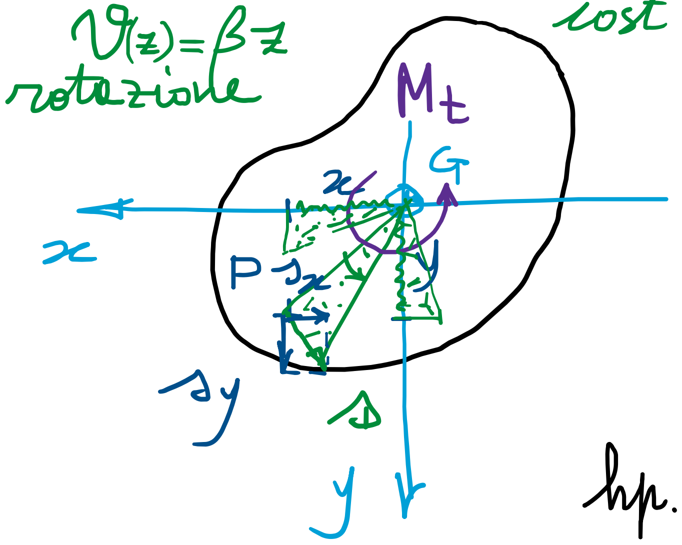
(τ_z tangente al contorno su Γ)

$$+ \quad \tau_z \cdot n = \tau_{zx}\, n_x + \tau_{zy}\, n_y = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

condizione (equilibrio) al contorno

hp. S_{ext} scarica

- Approccio agli spostamenti (pogliamo a priori la congruenza; imponiamo l'equilibrio)



$cost = \beta = \frac{d\vartheta}{dz}$ angolo unitario di torsione (rotazione per unità di lunghezza) $\frac{[1]}{[L]}$

(τ "torsione")

rotazione rigida delle sezione nel suo piano. $(d\vartheta = \beta dz)$

Campo di spostamenti: (osservazione sperimentale)

$$
\text{hp.} \begin{cases} s_x(y,z) = -\overbrace{\beta z}^{\vartheta} y \\ s_y(x,z) = \beta z x \\ s_z(x,y) = \beta \underbrace{\Psi_G(x,y)}_{} \end{cases}
$$

atto di moto piano rotatorio (rispetto a G)

incognite $\beta, \Psi_G(x,y)$

spostamento fuori piano

funzione di ingobbamento (riferita a G)

note a meno di moti rigidi

In genere si impone $\bar{\Psi}_G = \frac{1}{A}\int_A \Psi_G \, dA \equiv 0$ (valor medio)

(spostamento medio fuori piano nullo)

- Sezione indeformata nel piano:

$\varepsilon_{xx} = s_{x,x} \equiv 0$

$\varepsilon_{yy} = s_{y,y} \equiv 0$

$\gamma_{xy} = s_{x,y} + s_{y,x} = -\cancel{\beta z} + \cancel{\beta z} \equiv 0$

- Inoltre:

$\varepsilon_{zz} = s_{z,z} \equiv 0$ (Ψ_G f.ne solo di x e y) $\longleftrightarrow \sigma_{zz} = 0$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

– Campo di deformazione: (scorrimenti angolari)

$$\gamma_z \leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{zx} = s_{z,x} + s_{x,z} = \beta\left(\psi_{G,x} - y\right) \\ \gamma_{zy} = s_{z,y} + s_{y,z} = \beta\left(\psi_{G,y} + x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \\ \tau_z = G\gamma_z \\ \text{legge cost.} \end{matrix} \quad \boxed{\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta\left(\psi_{G,x} - y\right) \\ \tau_{zy} = G\beta\left(\psi_{G,y} + x\right) \end{cases}}$$

campo delle tensioni tangenziali

$\frac{e}{2G} = \beta = \frac{M_t}{GJ}$; $G\beta = \frac{M_t}{J}$

– Eq. di congruenza: Th. Schwarz $y_{,y}$ $x_{,x}$

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = G\beta\left(\cancel{\psi_{G,xy}} - 1 - \cancel{\psi_{G,yx}} - 1\right) = -2G\beta = -e \qquad \boxed{e = 2G\beta}$$

significato fisico

– Eq. di equilibrio:

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = G\beta\Big(\underbrace{\psi_{G,xx} - 0 + \psi_{G,yy} + 0}_{\nabla^2\psi_G \text{ laplaciano}}\Big) = G\beta\left(\psi_{G,xx} + \psi_{G,yy}\right)$$

$$= G\beta\,\boxed{\nabla^2\psi_G(x,y) = 0}$$ equazione di Laplace in A (derivate seconde)

(la f.ne di ingobbamento deve soddisfare l'eq.ne di Laplace in A)

– c.c. di equilibrio:

$$0 = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = \cancel{G}\beta \left[(\psi_{G,x} - y)\, n_x + (\psi_{G,y} + x)\, n_y \right] = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

$$\frac{\partial \psi_G}{\partial n} = \psi_{G,n} = \psi_{G,x}\, n_x + \psi_{G,y}\, n_y = y \underbrace{n_x}_{t_y} - x \underbrace{n_y}_{-t_x} \qquad \text{su } \Gamma$$

derivata direzionale nella direzione $\mathbb{n}$ ($\perp$ al contorno Γ): $\nabla \psi_G \cdot \mathbb{n}$

$$= \mathbf{x} \cdot \mathbb{t} = x t_x + y t_y \quad \text{flusso di } \psi_G \text{ nella direzione } n \text{ assegnato}$$

$$= r(s)\, \dot r(s) \;(*)$$

– Si ottiene pertanto un pb. di Neumann-Dini per l'eq.ne di Laplace:

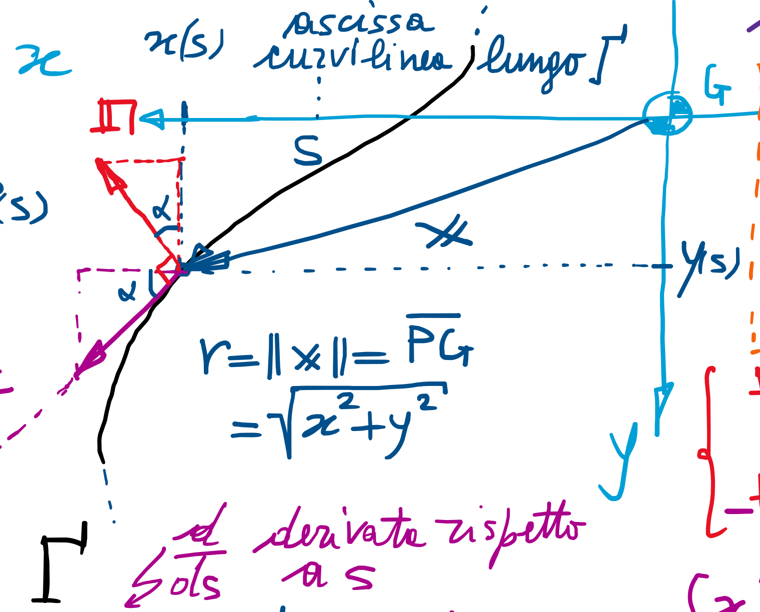
$$\nabla^2 \psi_G(x,y) = 0 \text{ in } A$$

$$\psi_{G,n} = \mathbf{x} \cdot \mathbb{t} \text{ su } \Gamma$$

pb. differenziale del 2° ord. alle derivate parziali

$P(x(s), y(s)) = P(s) \in \Gamma$

c.c. di Neumann-Dini



$r = \|\mathbf{x}\| = \overline{PG} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Sezione circolare

$\nabla^2 \psi_G = 0$
$\psi_{G,n} = 0 \Rightarrow \psi_G \equiv 0$

$r = R = \text{cost} \Rightarrow \dot r = 0$ no ingobbam.

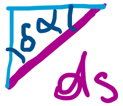
$$\begin{Bmatrix} t_y \\ -t_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \mathbb{n}$$

$(*)$ $x t_x + y t_y =$
$x \dot x + y \dot y =$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2(s)} = \frac{1}{2} (2x\dot x + 2y\dot y)$$

$$\psi_{G,n} = \frac{1}{2} \frac{d r^2(s)}{ds} = r(s)\, \dot r(s)$$

$\neq 0$ se distanza variabile



$\frac{d}{ds}$ derivata rispetto a s

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \dot x(s) = t_x$$

$$\cos\delta = \frac{dy}{ds} = \dot y(s) = t_y$$

$$\mathbb{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \begin{Bmatrix} \dot x(s) \\ \dot y(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (\mathbb{n} \cdot \mathbb{t} = 0)$$

– Da equivalenza statica:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$

$$= \int_A \left[G\beta(\psi_{G,y} + x)x - G\beta(\psi_{G,x} - y)y \right] dA$$

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \underbrace{\int_A (x^2+y^2)\, dA}_{J_G} - \underbrace{\int_A (\psi_{G,x}\, y - \psi_{G,y}\, x)\, dA}_{J_G > J^*_{\psi_G} \geq 0} = J_G - J^*_{\psi_G} > 0$$

momento d'inerzia torsionale

J_G momento d'inerzia polare rispetto a G

$$J_G = \int_A r^2\, dA$$

inerzia legata all'ingobbamento fuori piano

$$J^*_{\psi_G} = \int_A \left[(\psi_{G,x})^2 + (\psi_{G,y})^2 \right] dA \geq 0$$

(× 2 Th. div.) si può dim. (con $\nabla^2 \psi_G = 0$ in A)

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \frac{1}{(G\beta)^2} \int_A (\underbrace{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}_{\tau_z^2})\, dA \quad \text{(via PLV)}$$

$$= \frac{2}{c} \int_A \tau_z^2\, dA > 0$$

$$d\vartheta = \beta\, dz = \frac{M_t}{\boxed{GJ}}\, dz$$

rigidezza torsionale

fattore di torsione ≥ 1

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \eta\, \frac{M_t}{GJ_G} \;;\qquad \eta = \frac{J_G}{J} = \frac{J_G}{J_G - J^*} = \frac{1}{1 - J^*/J_G} \geq 1$$

proprietà geometrica della sezione trasversale