

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

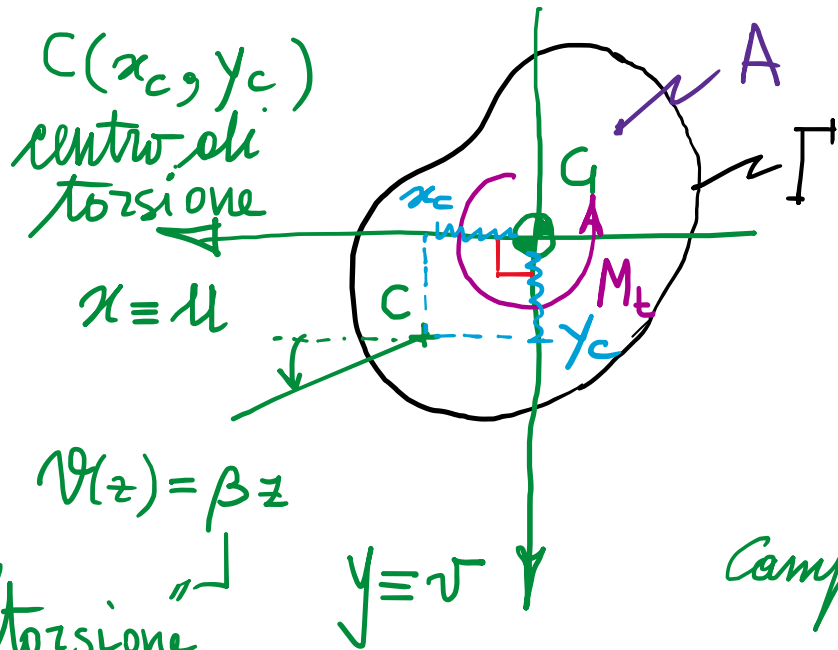
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Centro di torsione

Nell'approccio agli spostamenti si presume un campo di spostamenti ricomprensente:

- una rotazione rigida nel piano della sezione (rispetto a punto C, detto centro di torsione, in generale discosto dal baricentro G);
- un ingobbamento fuori piano della sezione, riferibile a tale punto:



Campo di spostamenti ($x_c \neq 0, y_c \neq 0$):

$$\begin{cases} \Delta x = -\beta z (y - y_c) \\ \Delta y = \beta z (x - x_c) \\ \Delta z = \beta \Psi_C(x, y) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{rotazione rigida rispetto a C} \\ \text{funzione di ingobbamento} \end{array} \right\}$$

Campo delle tens. tangenziali: riferito a C

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta (\Psi_{C,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta (\Psi_{C,y} + x - x_c) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Eq. di congr.} \\ \text{Eq. di equil.} \end{array} \right\}$$

definite a meno di compon. rototraslatorie fuori piano

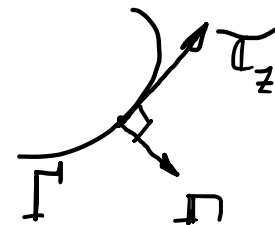
$2G\beta = c$
 $\nabla^2 \Psi_C = 0$ in A
 eq. di Laplace

"torsione"
 (angolo unitario di torsione)
 $\beta = \frac{d\theta}{dz} = \text{cost}$

Condizione al contorno:

$$\tau_z \cdot \Pi = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$= \cancel{G} \beta [(\psi_{c,x} - y + y_c) n_x + (\psi_{c,y} + x - x_c) n_y] = 0$$



derivata direzionale $\psi_{c,n}$ nella direz. n

$$\underbrace{\psi_{c,x} n_x + \psi_{c,y} n_y}_{\psi_{c,n}} + y_c \underbrace{\frac{dx}{dn}}_{\frac{dx}{dn}} - x_c \underbrace{\frac{dy}{dn}}_{\frac{dy}{dn}} = n_x y - n_y x = x \cdot t$$

stesso termine noto visto per ψ_G

$$\underbrace{(\psi_c + y_c x - x_c y)}_{\psi^*}, n = n_x y - n_y x \text{ c.c. di Neumann-Dini}$$

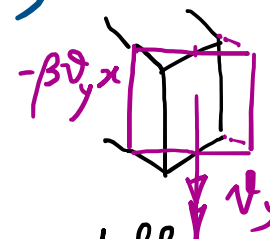
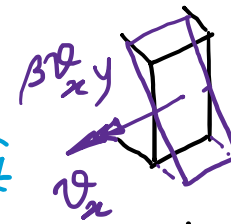
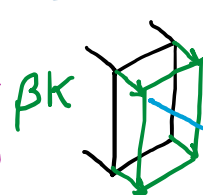
ψ^* differisce da ψ_c per un campo lineare in x e y $\Rightarrow \nabla^2 \psi^* = 0$ in A ($x \nabla^2 \psi_c = 0$)

ψ^* e ψ_G devono risolvere lo stesso pb. di N-D per l'equazione di Laplace:

$$\Rightarrow \psi^* = \psi_G + K \text{ (differiscono al più per una costante)}$$

Pertanto:

$$\psi_c(x, y) = \psi_G(x, y) + \underbrace{K - y_c x + x_c y}_{\text{comp. te di moto rigido fuori piano della sezione}}$$



valore medio $\bar{\psi}_c = \bar{\psi}_G + K \xrightarrow{=0} 0$

comp. te di moto rigido fuori piano della sezione

- Si definisce centro di torsione il punto C rispetto al quale avviene la rotazione rigida nel piano della sezione e risultano nulle le seguenti rotazioni medie fuori piano della sezione rispetto agli assi x e y :

$$\begin{cases} \bar{\vartheta}_x = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\Delta_z}{y} \underbrace{y^2}_{dJ_x} dA = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\Delta_z}{y} dJ_x = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c y dA = 0 \\ \bar{\vartheta}_y = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\Delta_z}{x} \underbrace{x^2}_{dJ_y} dA = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\Delta_z}{x} dJ_y = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c x dA = 0 \end{cases}$$

PLV: $\downarrow$ flessione $\downarrow$ torsione

$$\begin{cases} \cancel{M_x} \bar{\vartheta}_x = \int_A \frac{\cancel{M_x}}{J_x} y dA \Delta_z \\ \cancel{M_y} \bar{\vartheta}_y = \int_A \frac{-\cancel{M_y}}{J_x} x dA \Delta_z \end{cases}$$

coordinate del centro di torsione

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_c(x, y) y dA; y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \psi_c(x, y) x dA$$

N.B. Se $\exists$ asse di simm. retta, $C \in$ a tale asse

ingobbamento medio nullo fuori piano
Quindi

$$\bar{\psi}_c = \frac{1}{A} \int_A \psi_c dA = 0$$

$$\bar{\psi}_c = \frac{1}{A} \int_A \psi_c dA = 0$$

$$\begin{aligned} \int_A \psi_c y dA + \int_A \cancel{ky} dA - \int_A y_c xy dA + \int_A x_c y^2 dA &= 0 \\ \int_A \psi_c x dA + \int_A \cancel{kx} dA - \int_A y_c x^2 dA + \int_A x_c yx dA &= 0 \end{aligned}$$

- Torsione: Approccio agli sforzi (paghiamo a priori l'equilibrio, imponiamo la congruenza)

H_p : $\exists$ f.ne $\varphi = \varphi(x, y)$ funzione potenziale di sforzo o di Airy (definita a meno di cost. arbitrarie)

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \varphi_{,y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\varphi_{,x} \end{cases}$$

[obblata della necessaria "regolarità"
 $\Rightarrow$ Senza delle derivate]

Th. di Schwarz

- Eq. di equilibrio:

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \text{ in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,x} + (-\varphi_{,x})_{,y} = \varphi_{,yx} - \varphi_{,xy} = 0 \quad \checkmark$$

- Eq. di congruenza:

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \text{ in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,y} - (-\varphi_{,x})_{,x} = \underbrace{\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}}_{\nabla^2 \varphi(x,y)} = -c$$

- Condizione al contorno (equil.): t_y

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma \Rightarrow \varphi_{,y} \tilde{n}_x - \varphi_{,x} \tilde{n}_y = \varphi_{,x} t_x + \varphi_{,y} t_y$$



$$\boxed{\varphi = \text{cost} = 0 \text{ su } \Gamma}$$

$\Leftarrow \varphi_{,t} = \varphi_{,s} = 0 \text{ su } \Gamma$
 c.e. di Dirichlet

$$\boxed{\nabla^2 \varphi(x, y) = -c \text{ in } A}$$

Eq. ne di Poisson con termine noto costante

$$c \leftrightarrow M_t$$

- Si ottiene pertanto un pb. di Dirichlet per l'eq. ne di Poisson (con termine noto costante).

- Equivalenze statica (tra il campo delle tensioni tangenziali e il momento torcente che le ha generate):

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= \int_A (-\varphi_{,x} \cdot x - \varphi_{,y} \cdot y) dA$$

$$= - \int_A [(\varphi x)_{,x} + (\varphi y)_{,y}] dA + 2 \int_A \varphi dA$$

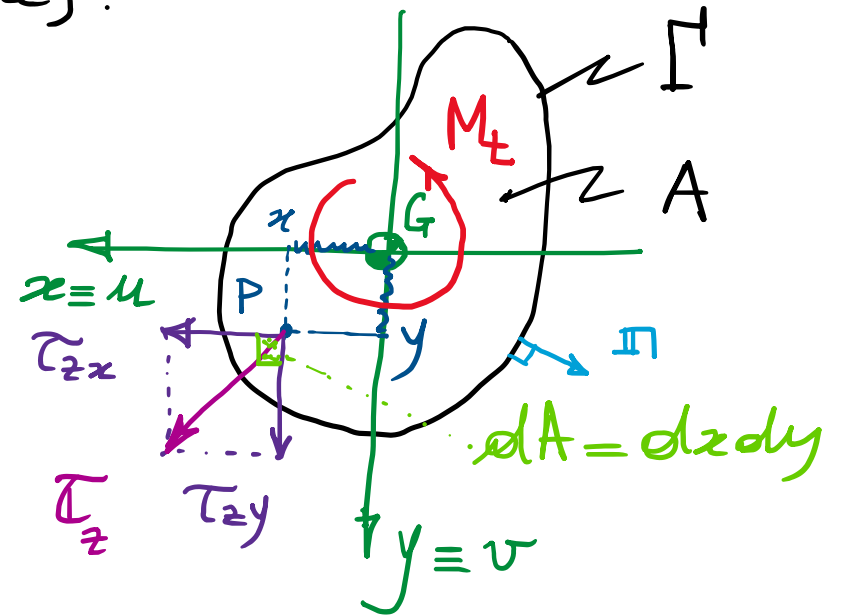
Th. Div.
 $\int_A dA \rightarrow \int_{\Gamma} d\Gamma$

$$= - \int_{\Gamma} \cancel{\varphi} (x n_x + y n_y) d\Gamma + 2 \int_A \varphi dA$$

$0 \text{ su } \Gamma$

Quindi:

$$M_t = 2 \int_A \varphi(x,y) dA \quad M_t \leftrightarrow e$$



$$(\varphi \cdot x)_{,x} = \varphi_{,x} \cdot x + \varphi \cdot \overbrace{x_{,x}}^1$$

$$(\varphi \cdot y)_{,y} = \varphi_{,y} \cdot y + \varphi \cdot \underbrace{y_{,y}}_1$$

$$-\varphi_{,x} x = -(\varphi x)_{,x} + \varphi$$

$$-\varphi_{,y} y = -(\varphi y)_{,y} + \varphi$$

Quadro sinottico (Torsione)

Approccio agli spostamenti

$\Psi_G(x, y) ; \beta$
f.ne di ingobbamento "torsione", cost

incognite

Approccio agli sforzi

$\Phi(x, y) ; c$
f.ne di Airy costante di integrazione

Pl. di Neumann-Dini
per l'eq.ne di Laplace
 $\nabla^2 \Psi_G = 0$ in A
 $\Psi_{G,n} = \underbrace{n_x y - n_y x}_{\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}}$ su Γ

equazioni

Pl. di Dirichlet
per l'eq.ne di Poisson

$\nabla^2 \Phi = -c$ in A
 $\Phi = 0$ su Γ

relazioni

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} ; J(\Psi_G) = \frac{J_G}{\eta \approx 1}$$

$$M_t = 2 \int_A \Phi dA$$

corrispondenze

$$2G\beta = c$$

Infatti: $\Phi_{,xx} + \Phi_{,yy} = -c$
 $G\beta(-\cancel{\Psi_{G,yx}} - 1 + \cancel{\Psi_{G,xy}} - 1) = -c$
 $-2G\beta = -c$

Th.
Schwarz

$$\tau_{zx} = G\beta(\Psi_{G,x} - y) = \Phi_{,y}$$

$$\tau_{zy} = G\beta(\Psi_{G,y} + x) = -\Phi_{,x}$$

campo
delle
tensioni tangenziali

$$\Psi_G \rightarrow \Phi$$

$$\Psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta} \Phi_{,y} + y$$

$$\Psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta} \Phi_{,x} - x$$

$$\Phi \rightarrow \Psi_G$$

Metodi di soluzione:

— Analitici: (problemi differenziali)

— Esatte (possibile solo in casi particolari, in forma chiusa o mediante sviluppi in serie).

es. caso della sezione ellittica

— Approssimate (comunque valide ai fini ingegneristici, in forma chiusa o per sviluppi in serie troncati).

es. profili sottili

— Numerici: (problemi algebrici $\Rightarrow$ per discretizzazione)

(aperti e chiusi)

— Metodo delle Differenze Finite (FDM) $\Rightarrow$ Calcolo Numerico

— Metodo degli Elementi Finiti (FEM) $\Rightarrow$ Computational Mechanics of Solids and Structures

$\Rightarrow$ passaggio da numero ∞ di nodi a numero finito, cioè discreto, di nodi