

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

Analogie fisiche (del pb. della torsione con altri fenomeni fisici retti da equazioni governanti formalmente simili).

Meccanica dei Solidi

- Esse possono risultare utili a:

- cercare ed interpretare la soluzione cercata del pb. in esame;

- concepire eventuali approcci sperimentali utili ad osservazioni qualitative e/o quantitative;

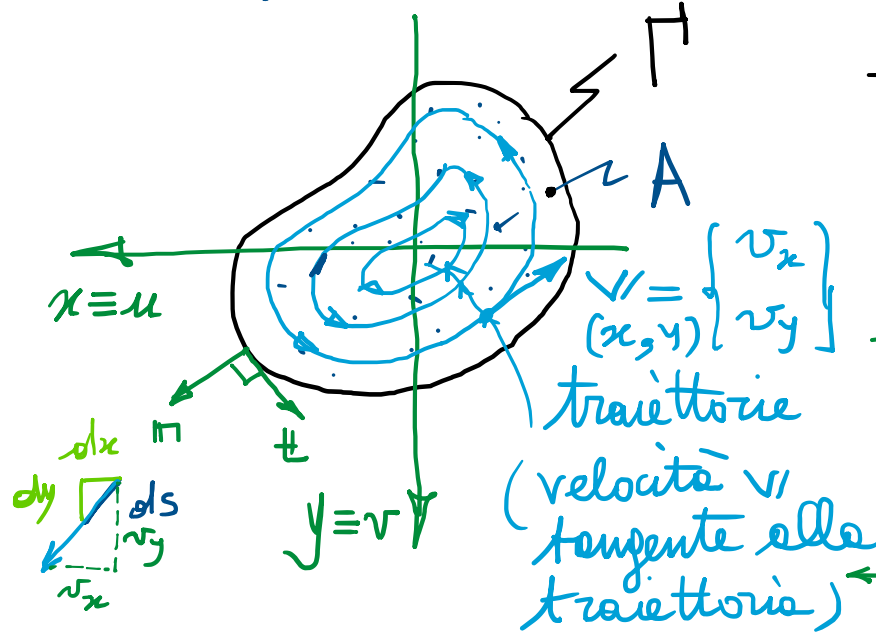
- individuare le caratteristiche salienti del pb. e delle risposte, e fini inegneristici, in particolare riguardo la definizione della capacità portante e del comportamento a torsione.

- Si presentano due analogie principali, in ambito "Meccanica":

- analogia idrodinamica (Lord Kelvin ~ 1869) " dei fluidi

- analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~ 1903) " delle Strutture

- Analogia idrodinamica (Lord Kelvin, 1869)



- Moto pieno di fluido perfetto (non viscoso) incomprimibile all'interno di un recipiente di contorno Γ , con vorticità (velocità angolare) costante.

- Equazioni idrodinamiche governanti:

- eq. ne di continuità (scalare) $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ in A (densità $\rho = \text{cost}$)
campo di velocità solenoidale

$\Phi = \text{cost}$: linee di flusso

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx}$$

$$v_{x,x} + v_{y,y} = 0$$

- vorticità costante (vettoriale)

$$2\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \text{cost in A} \quad \omega \perp (x, y)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = k (v_{y,x} - v_{x,y}) = \omega_z$$

relazione scalare

$$-2\omega_z = v_{x,y} - v_{y,x} = -\frac{c}{L} \text{ costante}$$

- Si presenta la seguente analogia formale (stesse eq. ni governanti):

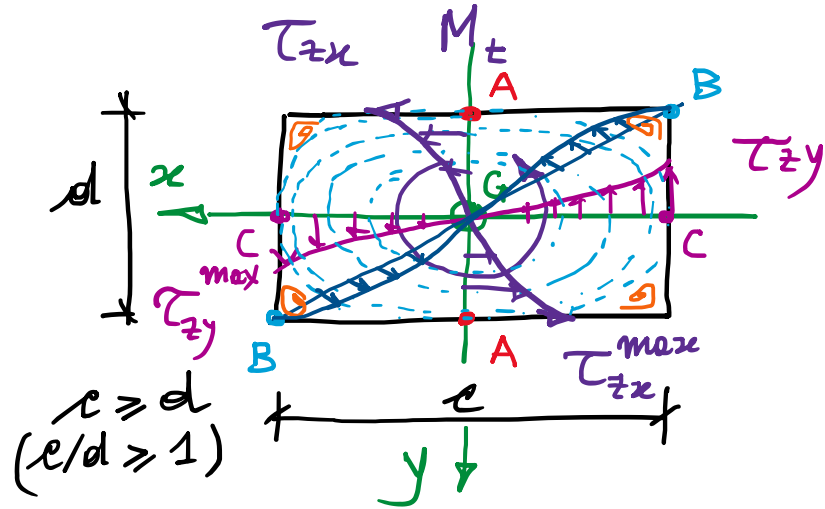
$$\mathcal{T}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

$$\varphi = \varphi(x, y) \leftrightarrow \Phi = \Phi(x, y)$$

f. ne di sforzo di Airy f. ne di flusso ("stream function")

$$\tau_{zx} = \varphi_{,y}; \tau_{zy} = -\varphi_{,x} \leftrightarrow v_x = \Phi_{,y}; v_y = -\Phi_{,x} \quad \text{c.c.} \dots \nabla \cdot \mathbf{n} = v_x n_x + v_y n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

- L'analogia idrocinamica risulta utile a "visualizzare" il campo delle tens. tangenziali.
- Per es. per sezione rettangolare (soluzione per sviluppi in serie):



eq.ne di continuità: portata $Q = VA = \text{cost}$

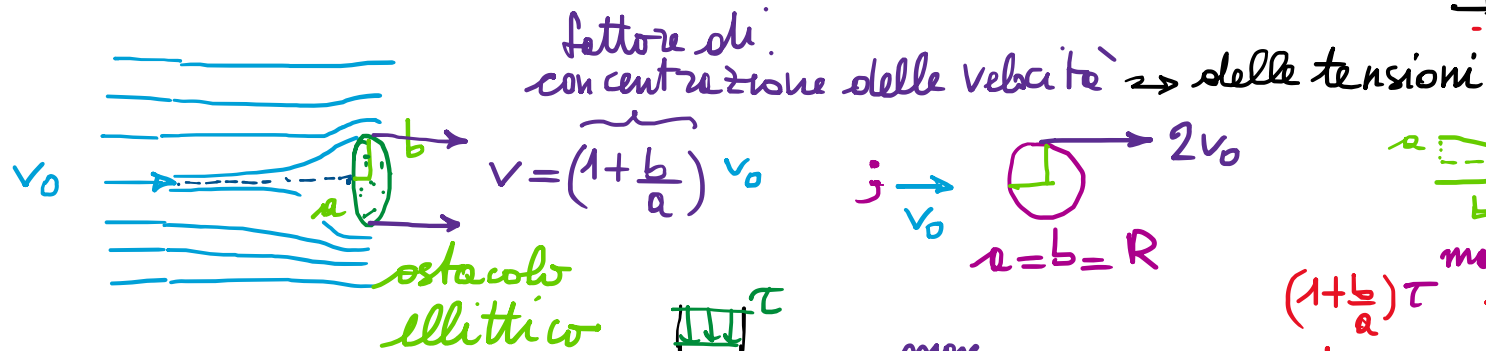
- $\tau^A > \tau^C$ ($\tau^{\max}$ nei p.ti medi dei lati maggiori)
- $\tau^B \approx 0$ (zone di ristagno di fluido) (spigoli sporgenti)

$$\tau^{\max} = k \frac{M_t}{c d^2} ; J = \alpha c d^3$$

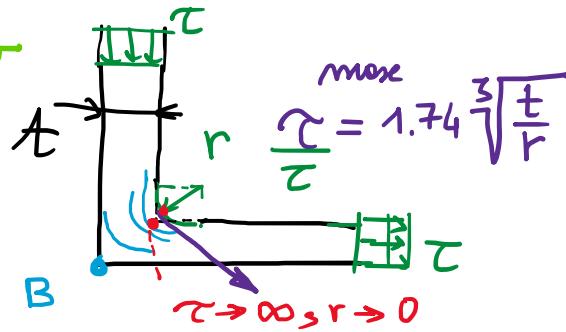
profilo rettangolare
sottile

c/d	k	α
1	4.80	0.141
2	~ 4	~ 0.23
∞	3	$0.333 = 1/3$

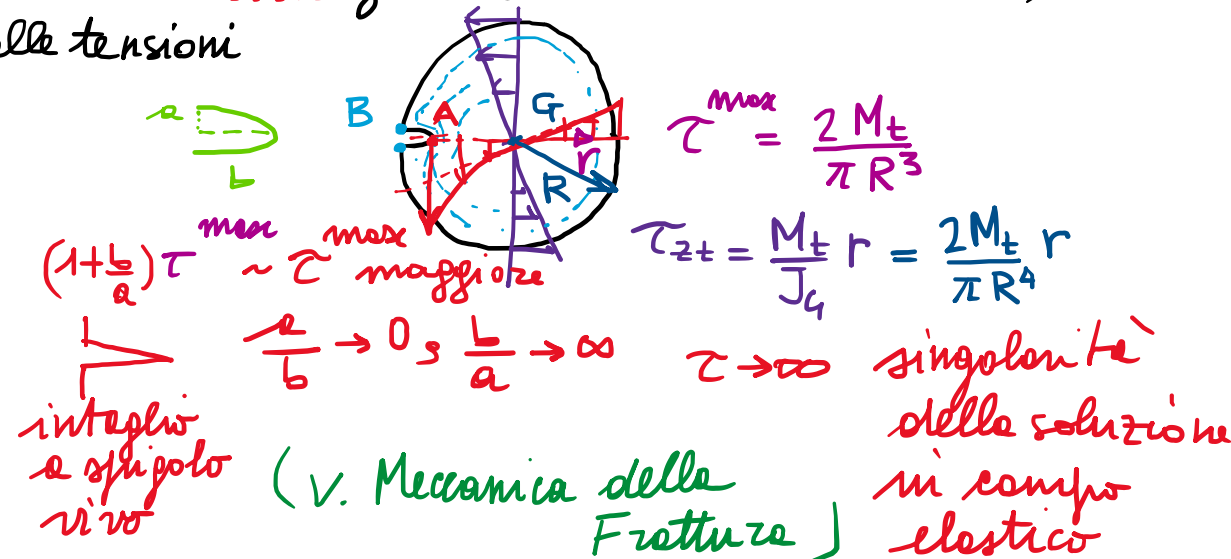
- Concentrazione delle tensioni:



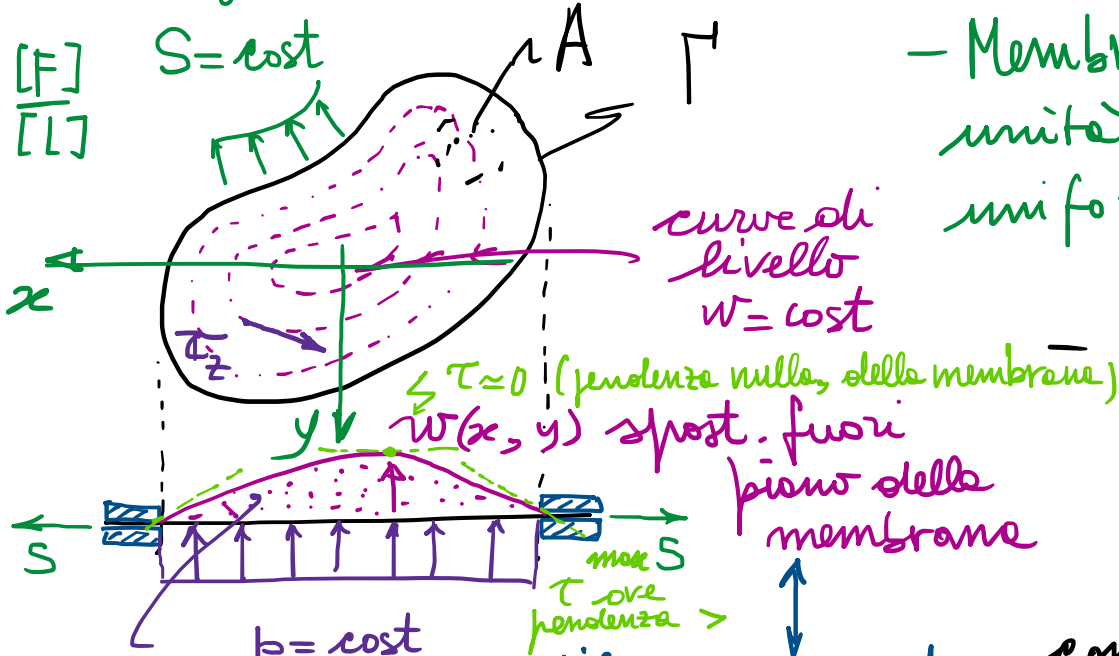
- Formule di Trefftz:
 $\sim (1922)$
profilo "sottile"



Integrio (in sezione circolare)



- Analogo della membrana (Prandtl, 1903) (es. bolle di sapone, tens. superficiale cost.)



– Membrana appoggiata su contorno Γ , con tensione per unità di lunghezza $S = \text{cost}$, soggetta a pressione uniforme p

– Equazione di equilibrio della membrana in direz. ortogonale al piano

$$\nabla^2 w(x, y) = -\frac{p}{S} \text{ in } A$$

Torsione

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = -c \text{ in } A$$

$$\varphi = 0 \text{ su } \Gamma$$

Volume sotteso dalla membrana

$$p = \text{cost} \quad \frac{[F]}{[L]^2}$$

utile a rappresentare la f. ne di Airy

con c.c. $w = 0$ su Γ

$$w \frac{S}{p} = \frac{\varphi}{c} \Rightarrow \varphi = \frac{cS}{p} w$$

$\varphi = \text{cost}$

$$d\varphi = \varphi_{,x} dx + \varphi_{,y} dy = 0$$

$$-T_{zy} dx + T_{zx} dy = 0$$

$$\frac{T_{zy}}{T_{zx}} = \frac{dy}{dx}$$

T_z tangente alle $\varphi = \text{cost}$ ($w = \text{cost}$)

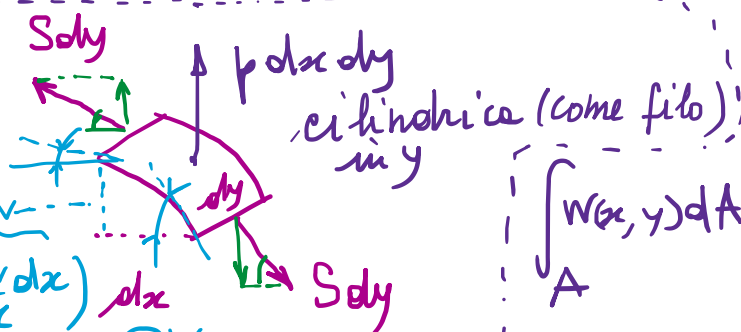
$$\begin{cases} T_{zx} = \varphi_{,y} \\ T_{zy} = -\varphi_{,x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

smv
tenu
angolo

eq. alle tressl. in z:



$$\int_A w(x, y) dA = V \Leftrightarrow M_t = 2 \int_A \varphi dA$$

$$M_t = \frac{2cS}{p} V$$

$$S dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla^2 w}{w_{,xx} + w_{,yy}} = -\frac{p}{S} = \text{cost}$$