

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

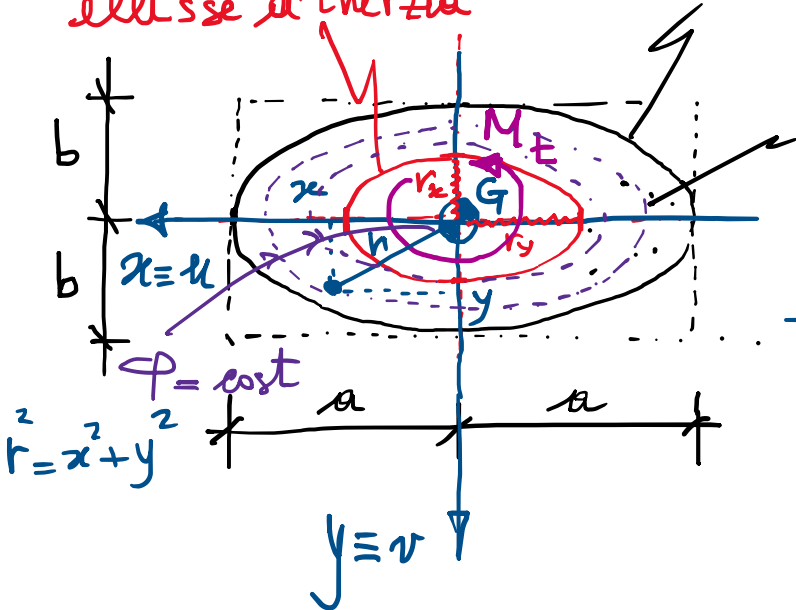
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

Soluzioni analitiche del pb. della torsione

• Sezione ellittica

ellisse d'inertia



$$\Gamma: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$A = \int_A dA = \pi ab$$

$$J_x = \int_A y^2 dA = \frac{\pi ab^3}{4} = \pi ab \left(\frac{b}{2}\right)^2 = A r_x^2 \Rightarrow r_x = \frac{b}{2}$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi a^3 b}{4} = \pi ab \left(\frac{a}{2}\right)^2 = A r_y^2 \Rightarrow r_y = \frac{a}{2}$$

$$J_G = \int_A r^2 dA = J_x + J_y = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2) = A r_G^2 \Rightarrow r_G = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

• Funzione potenziale di sforzo di Airy: $\left(\beta = \frac{M_t}{GJ}, \quad c = 2G\beta = 2\frac{M_t}{J} \right)$

eq. di Poisson con termine noto cost.

$$\varphi = \varphi(x, y) = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \Rightarrow \nabla^2 \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = K \left(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2} \right) = -2K \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = -c \quad \text{in } A$$

• $\varphi = 0$ su Γ c.c. ✓ (Dirichlet)

• $\varphi = \text{cost} \Rightarrow$ traiettorie ellittiche

• $\varphi \sim x^2, y^2 \Rightarrow$ derivate seconde costanti

$$K = \frac{c}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$G\beta = \frac{M_t}{J}$

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\psi_4 = 0; \quad \eta = 1, J = J_G$$

Sez. circolare (caso particolare): $a = b = R$

$$A = \pi R^2$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$J_G = 2J_x = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$r_x = r_y = \frac{R}{2}; \quad r_G = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

- Equivalenza statica:

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2 \int_A K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dA = 2K \left(A - \frac{1}{a^2} J_y - \frac{1}{b^2} J_x \right) = 2KA \left(1 - \frac{r_y^2}{a^2} - \frac{r_x^2}{b^2} \right)$$

$$= 2K \underbrace{A}_{\pi ab} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \cancel{2KA} \frac{1}{2} \Rightarrow K = \frac{M_t}{A} = \frac{M_t}{\pi ab} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow J = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

- Momento d'inerzia torsionale (DSV):

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{4(a^2 + b^2)} \frac{\pi ab}{\frac{\pi^3 ab}{4}} = \frac{A^4}{4\pi^2 J_G} = J$$

$$J_G = \frac{\pi ab}{4} (a^2 + b^2); A = \pi ab$$

$$a=b=R, J = \pi \frac{R^6}{2R^2} = \frac{\pi R^4}{2} = J_G (\eta=1)$$

$$J = \frac{J_G}{\eta}$$

$$\pi^2 \simeq 10 \\ 4\pi^2 \simeq 40$$

$$J \simeq \frac{A^4}{40 J_G}$$

formule utili a stimare il momento d'inerzia di sezioni compatte quali sez. ellittiche equivalenti di pari A e J_G .

- Fattore di torsione

$$\eta = \frac{J_G}{J} = \frac{\frac{a^2 + b^2}{4} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}}{\frac{A^4}{4\pi^2 J_G}} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2} = \frac{(a^2 + b^2 - 2ab + 2ab)^2}{4a^2 b^2} \quad \eta = \frac{J_G}{J} \simeq \frac{J_G}{\frac{A^4}{40 J_G}} = 40 \frac{J_G^2}{A^4} = 40 \left(\frac{J_G}{A^2} \right)^2$$

$$= \frac{[2ab + (a-b)^2]^2}{(2ab)^2} = \left[1 + \frac{(a-b)^2}{2ab} \right]^2 \geq 1 \Rightarrow \text{sez. circ. : } \eta = 1 (J = J_G) \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2$$

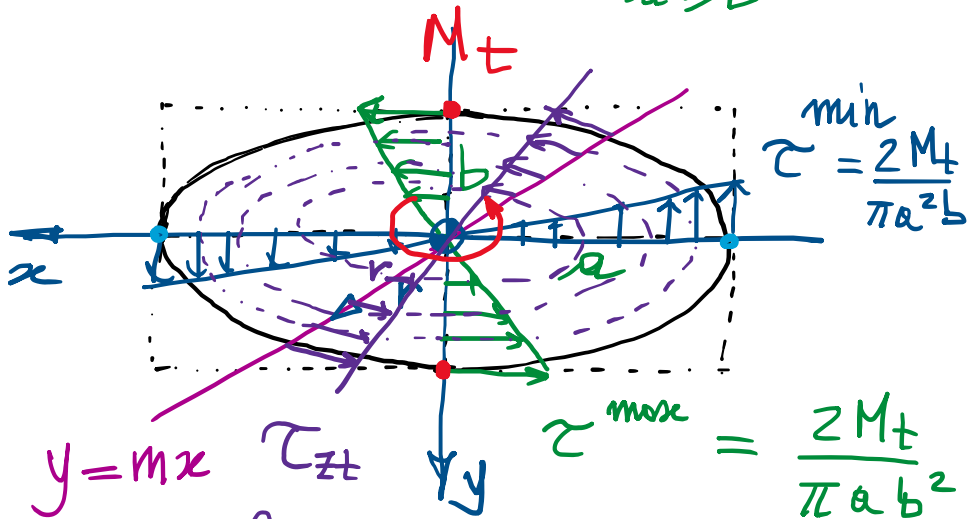
$a=b=R$

• Campo delle tensioni tangenziali:

f.ve di AIRY $\varphi = \frac{M_t}{\pi a b} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \Rightarrow$

$a \geq b$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\frac{2 M_t}{\pi a b^3} y = -\frac{2 M_t}{\pi a b} \frac{y}{b^2} \\ \tau_{zy} = -\varphi_{,x} = \frac{2 M_t}{\pi a^3 b} x = \frac{2 M_t}{\pi a b} \frac{x}{a^2} \end{cases}$$



$$\frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{m} = \text{cost lungo diametro } y = mx$$

lineari in x, y

$$\tau_z = \|\tau_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{2 M_t}{\pi a b} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

$y = mx$
 $r^2 = x^2 + y^2$ lineari in r

tangenti alle traiettorie ellittiche e parallele
a distanze radiale r
(con modulo crescente linearmente con r)

su $y = mx$

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1+m^2)x^2$$

$$r = \sqrt{1+m^2} x$$

$$= \frac{2 M_t}{\pi a b} x \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{m^2}{b^4}}$$

lineare in x
in y
in r

Sez. circolare $a=b=R$

$$\begin{aligned} \tau_{zt} &= \frac{2 M_t}{\pi R^4} r, \quad \tau_{zt}^{\max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3} \\ &= \frac{M_t}{J_u} r \end{aligned}$$

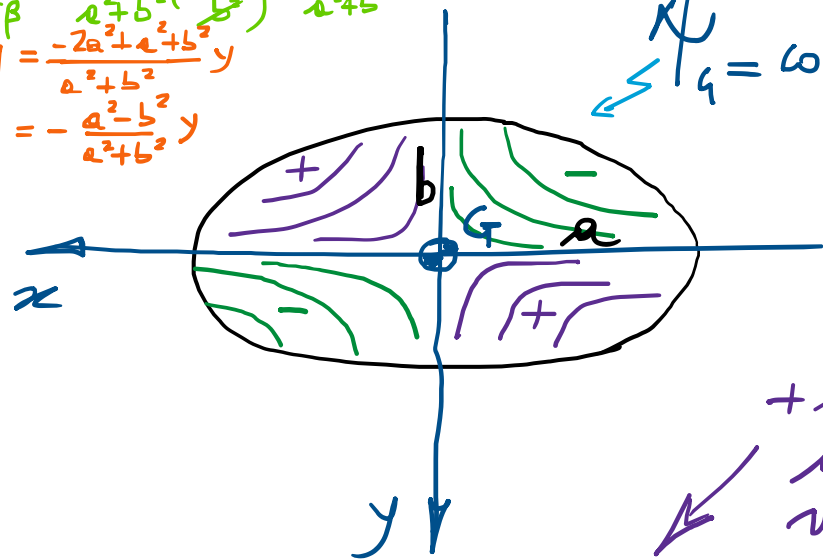
- Funzione di inglobamento (Ψ_G):

$$\begin{cases} \Psi_{G,x} = \frac{1}{4\beta} \varphi_{,y} + y = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y \\ \Psi_{G,y} = - \frac{1}{4\beta} \varphi_{,x} - x = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x \end{cases}$$

$$\frac{\varphi}{4\beta} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

es. $\varphi_{,y} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(-\frac{2y}{b^2} \right) = -\frac{2a^2}{a^2 + b^2} y$

$$+ y = \frac{-2a^2 + a^2 + b^2}{a^2 + b^2} y = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y$$



$\Psi_G = \text{cost}$ paraboloide iperbolico

+ stime approssimate di J per sezioni composte via sez. ellittica equiv.

Quindi: sez. ellittica costituisce caso rilevante con soluzione analitica in forma chiusa esatta (contenente il caso della sez. circolare come particolare).

differenziale delle f. ne $\Psi_G(x, y)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\Psi_G &= \Psi_{G,x} dx + \Psi_{G,y} dy \\ &= - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (y dx + x dy) \end{aligned}$$

integrando:

$$\Psi_G(x, y) = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy + \text{cost}$$

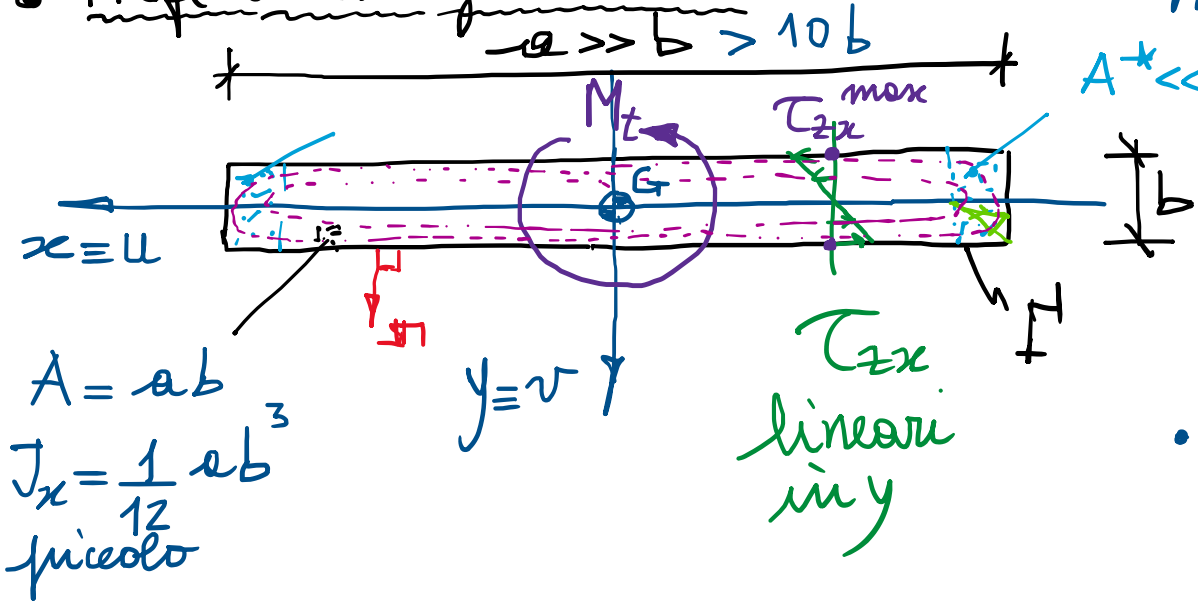
$\bar{\Psi}_G = 0$

N.B. Sez. circolare ($a = b = R$)

$\Psi_G \equiv 0$ non c'è inglobamento

$$\eta = 1, \quad J = J_G = \frac{\pi R^4}{2}$$

- Profilo rettangolare sottile (soluzione ^{analitica.} approssimata)



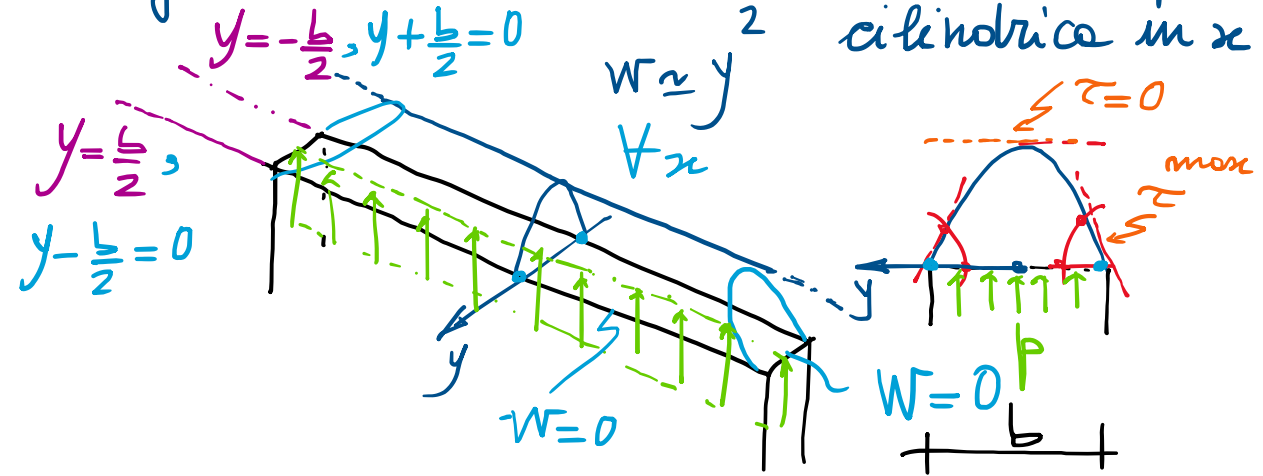
$$A^* \ll A$$

- Analogia idrodinamica! $\frac{b}{a} \rightarrow 0; \frac{a}{b} \rightarrow \infty$

$$\tau_{zx} = -cy; \quad \tau_{zy} = 0 \quad \text{in } A - A^*$$

lineari sullo spessore

- Analogia della membrana: sostanzialmente cilindrica in x



Σq . governanti (torsione):

equil. $\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0$ in A ✓

cong. $\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c$ in A ✓

c.c. $\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ ✓

- Campo delle tensioni tangenziali valido in quasi tutto il profilo rettangolare sottile, salvo nelle zone in corrispondenza delle estremità, di piccola estensione A^* (con τ_2 attese dello stesso ordine di grandezza) $\Rightarrow$ soluzione approx.

$w \sim y$
 lineare in y

- Funzione di sforzo: *eq. in rette lati lunghi*

$\downarrow$ ne di AIRY $\varphi = \varphi(y) = K \left(\frac{b}{2} + y \right) \left(\frac{b}{2} - y \right) = K \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ su } \Gamma - \Gamma^*$

$$\nabla^2 \varphi = \varphi_{,yy} = -2K = -e \Rightarrow K = \frac{e}{2} = 4\beta = \frac{M_t}{J} \Rightarrow J = \frac{M_t}{K}; M_t = KJ$$

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2K \int_A \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) dA = 2K \left(\frac{b^2}{4} A - J_x \right) = 2K \left(\frac{3ab^3}{4} - \frac{ab^3}{12} \right) = 2K \frac{ab^3}{3}$$

$$= K \underbrace{\frac{1}{3} ab^3}_{J} = KJ$$

$$J = \frac{1}{3} ab^3 = 4J_x \sim b^3 \text{ piccolo}$$

cf. a parità di

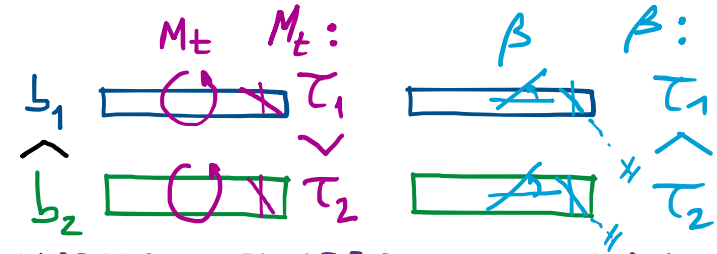
momento d'inerzia torsionale di sezione rettangolare sottile

- Campo delle τ_z :

$$\varphi = \underbrace{\frac{3M_t}{ab^3}}_{\frac{M_t}{J} = 4\beta} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\frac{6M_t}{ab^3} y = -\frac{2M_t}{J} y \Rightarrow \tau_{zx} = \left| -\frac{6M_t}{ab^3} \left(\pm \frac{b}{2} \right) \right| = \frac{3M_t}{ab^2} \\ \tau_{zy} = -\varphi_{,x} = 0 \end{cases}$$

more

$$= \frac{M_t}{J} b = 4\beta b$$



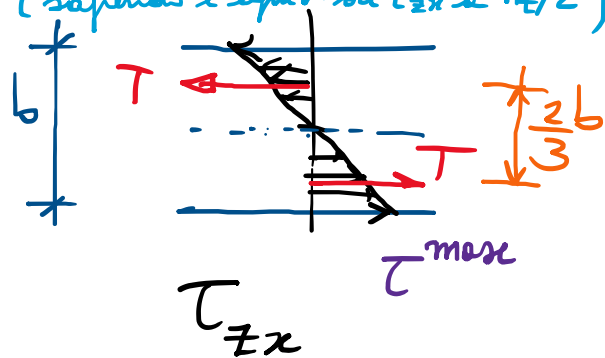
- Equivalenza statica delle τ_{zx} :

$$\int_A -\tau_{zx} y dA = \int_A + \frac{2M_t}{J} y^2 dA = \frac{2M_t}{J} \underbrace{J}_{4J/2} = \frac{M_t}{2}$$

$A^* \ll A$



Derivazione "diretta" di τ_{max}
(sapendo l'equiv. di τ_{zx} a $M_t/2$)



$$T = \frac{1}{2} \frac{b}{2} \tau_{max} a = \frac{ab}{4} \tau_{max}$$

$$\frac{M_t}{2} = T \cdot \frac{2b}{3} = \frac{ab}{4} \tau_{max} \frac{2b}{3} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{3M_t}{ab^2}$$

⚡ Attenzione: equivalenza a metà M_t

Le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti alla metà del momento torcente

L'altra metà di M_t sarà legata alle τ^* nelle zone A^* (stesso ordine di grandezza ma bracci di leva in direz. x lunghi, dell'ordine di a).

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{ab^2}$$

- Funzione di rigonfiamento:

$$\begin{cases} \psi_{4,x} = \frac{1}{4\beta} \psi_{3,y} + y = \frac{1}{4\beta} (-2\beta y) + y = -y \\ \psi_{4,y} = -\frac{1}{4\beta} \psi_{3,x} - x \end{cases} \Rightarrow d\psi_4 = -y dx - x dy \Rightarrow \psi_4(x,y) = -xy + \text{cost}$$

(asse x)
 $y=0 \rightarrow \psi_4=0$
 no impo. b.m.
 lungo l'asse x
 trascurabile sullo spessore ($y_{max} = \frac{b}{2}$)
 $\psi_4 = 0$