

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

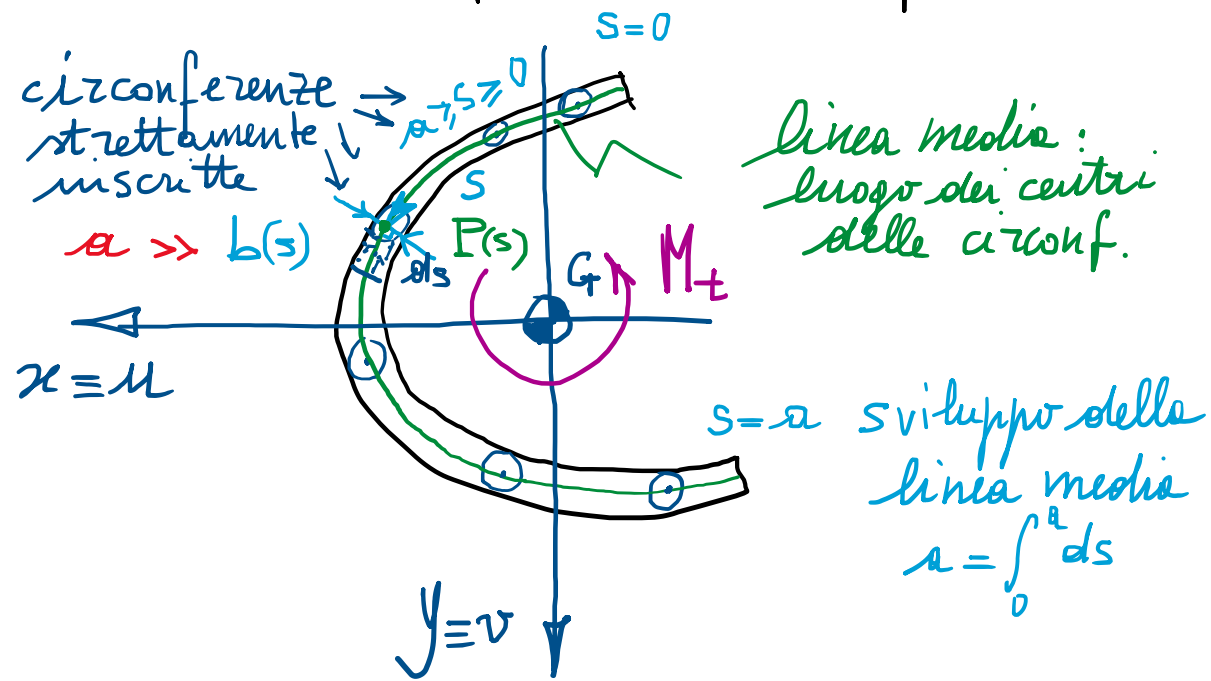
Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

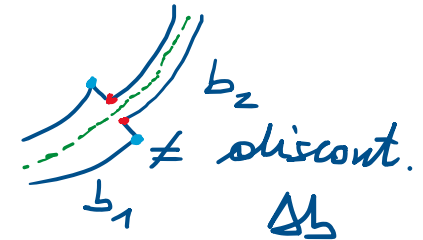
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 22

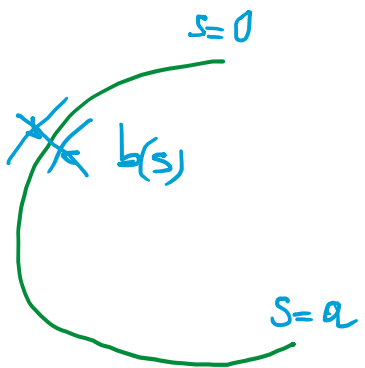
Torsione nei profili sottili aperti ($\Rightarrow$ generalizzazione del caso visto di profilo rettangolare sottile)



- Profilo "in parete sottile", cioè con spessore $b(s)$, anche variabile lungo il profilo ma "piccolo" rispetto allo sviluppo complessivo del profilo (della linea media dello stesso).
- Variazione ammessa, seppur con $b(s) \ll a \forall s$, con continuità: non



Caratteristiche geometriche: (riferite alla linea media)

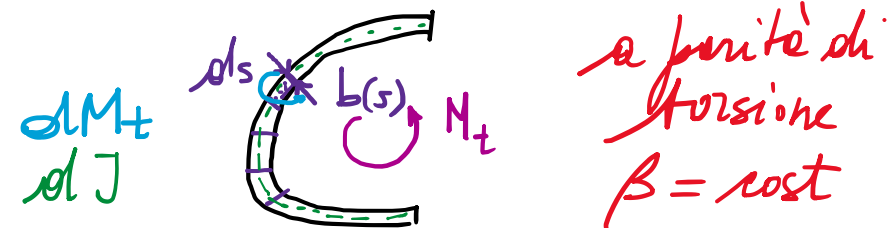


$$A = \int_A dA \approx \int_0^a b(s) ds$$

$$J_x = \int_A y^2 dA \approx \int_0^a y(s)^2 b(s) ds$$

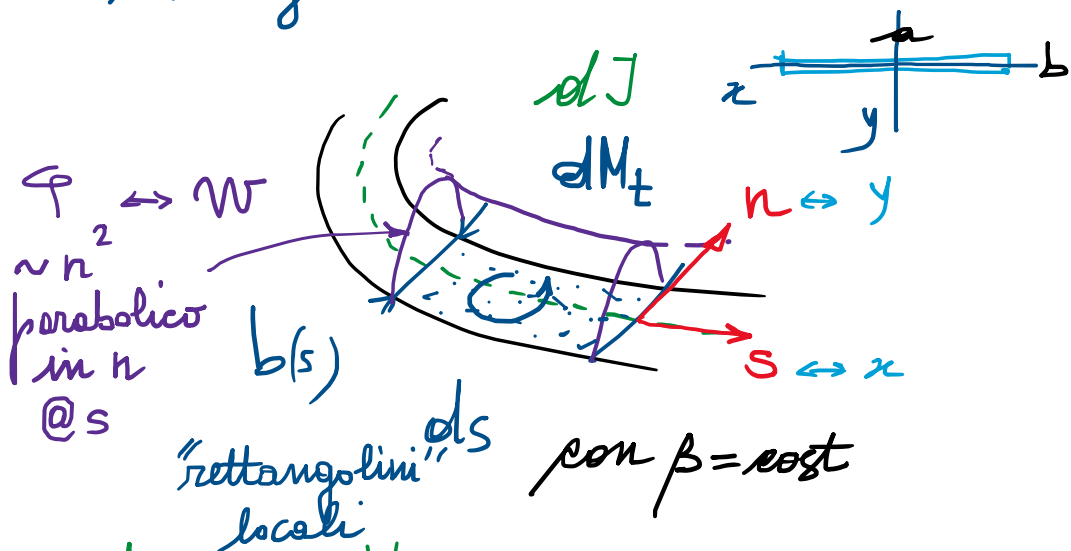
$$J_y = \int_A x^2 dA \approx \int_0^a x(s)^2 b(s) ds$$

- Si ipotizza che ogni "rettangolino" infinitesimo $b(s) ds$ si comporti come un profilo rettangolare sottile soggetto a torsione

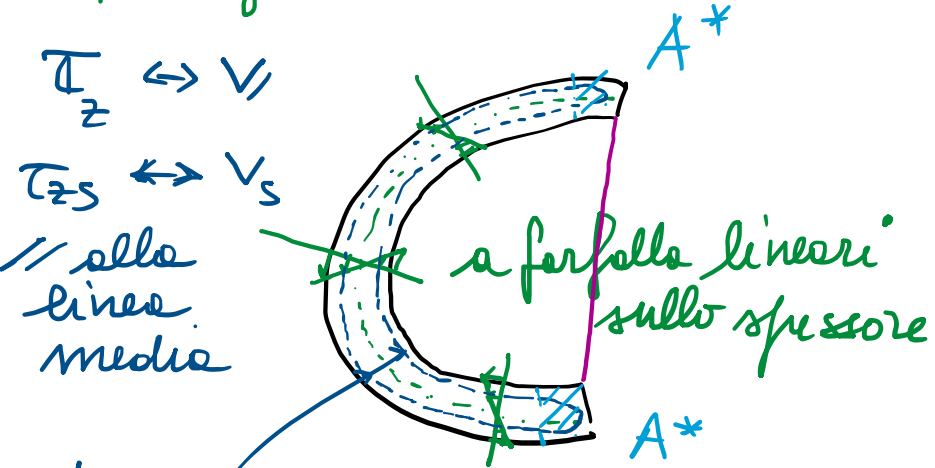


a parità di
torsione
 $\beta = \text{cost}$

- Analogie della membrana:



- Analogia idrodinamica:



traiettorie che si
richiudono all'interno
dello spessore

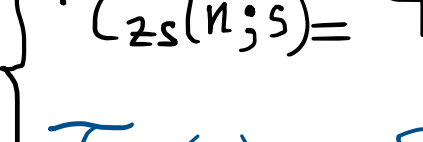
- f. nedli Airy : $\frac{M_t}{J}$

$$\Phi_{\text{locale}}(s, n) = K \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right)$$

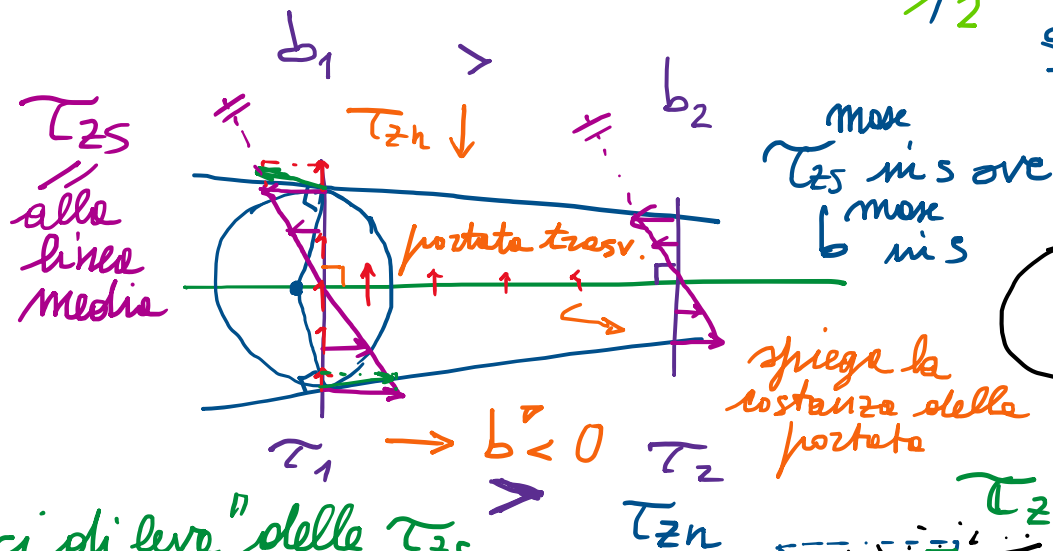
- Tensioni tangenziali:

$$\begin{cases} \tau_{zs}(n;s) = \varphi_{sn} = G\beta(-2n) = -2G\beta n = -2\frac{M_t}{J}n \\ \tau_{zn}(s) = -\varphi_{sn} = K \frac{b(s)}{L} \frac{db(s)}{ds} \approx 0 \end{cases}$$

$\tau_{zn}(s) \approx 0$ trascurabili in senso ingegneristico
 spessore resta piccolo
 max τ_{zs} in s o v e



The diagram shows a beam element of length L between points s and $s+L$. At point s , there is a shear force V acting downwards and a normal force N acting to the right. At point $s+L$, there is a shear force V acting upwards and a normal force N acting to the left. A distributed load q acts downwards along the entire length of the beam.



irrigidimenti
per garanzie
 $\beta = \text{cost}$

"Tracci di leva" delle τ_{zs}
dell'ordine dello spessore b_s
quindi piccoli $\rightarrow$ scarsa capacità portante
e torsione

τ_z tangente al
contorno

τ_{zs} (fluido uscirà dal
profilo)

- J determinabile per equivalenza statica (tra il campo delle τ_{zs} e il momento torcente M_t):

$$M_t = 2 \int_A \varphi \, dA = 2 G \beta \int_0^a \int_{-b(s)/2}^{b(s)/2} \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right) \, dn \, ds$$

$$= 2 G \beta \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 \, ds$$

$\underbrace{\frac{b(s)^2}{4} b(s) - \frac{n^3}{3}}_{\substack{b(s) \\ \text{cost} \Rightarrow J = \frac{1}{3} a b^3}}$
 $\left| \begin{matrix} b/2 \\ -b/2 \end{matrix} \right. = b(s) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \frac{2}{8} \right) = \frac{1}{4} b(s) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{b(s)^3}{3}$

$\underbrace{\frac{1}{3} b(s)^3}_{\substack{dJ \\ \boxed{b(s)}}} ds$

$$= G \beta J$$

$$J = \int_0^a dJ = \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 \, ds$$

"piccolo" $\sim b(s)^3$

momento d'inerzia torsionale

torsione



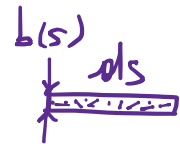
$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; \quad G \beta = \frac{M_t}{J} = \frac{dM_t}{dJ}$$

cost. per tutti i $b(s) \cdot ds$

rigidezza torsionale

$$\Rightarrow dM_t = \frac{dJ}{J} M_t$$

$$\tau_{zs}^{\max} = G \beta b(s) = \frac{M_t}{J} b(s) = \frac{dM_t}{dJ} b(s)$$



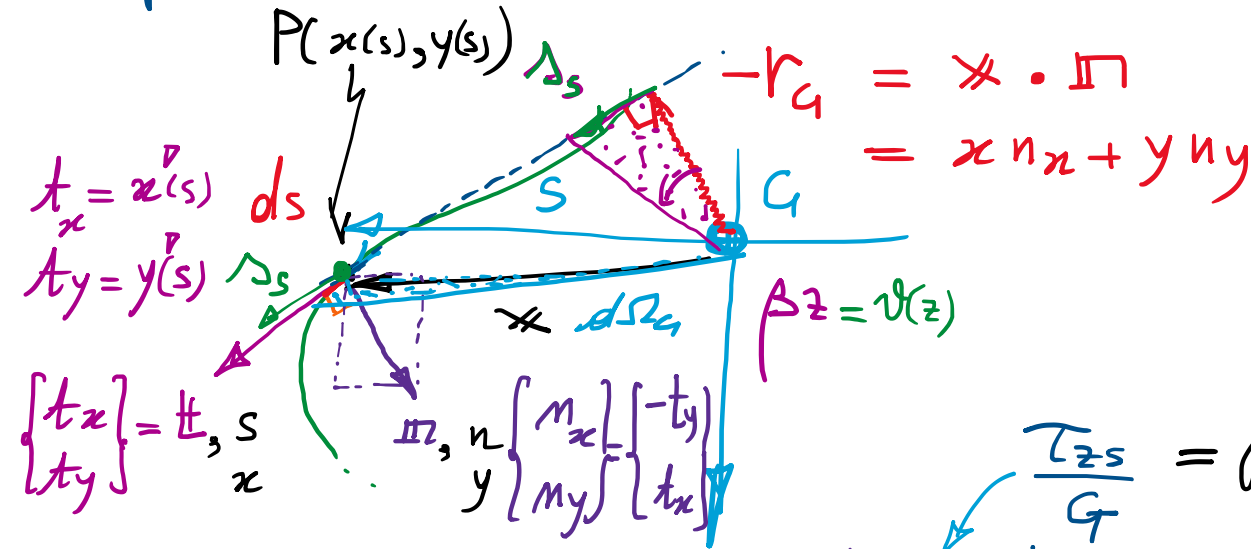
- Ingobbamento fuori piano (riferito alla linea media) $[\Psi_g(s) \neq 0, \Psi_c(s) \neq 0]$

campo
di
sportamenti
(rif. a G)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -\beta z y \\ \Delta y = \beta z x \\ \Delta z = \beta \psi_G(x(s), y(s)) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S &= \mathcal{L} \cdot t = \mathcal{L}_x t_x + \mathcal{L}_y t_y \\ &= \beta z (-y t_x + x t_y) \\ &= \beta z (-y m_y - x m_x) \\ &= -\beta z (x m_x + y m_y) \end{aligned}$$

$= \beta z r_g = \Delta_s$ vedi mappe di spostamento
spostamento nella direzione s



$$\frac{\tau_{zs}}{G} = f_{zs} = \alpha_{z,s} + \alpha_{s,z} = \beta (\psi_{a,s}^{(s)} + r_g^{(s)})$$

$$\frac{d\psi_G}{ds} = \psi_{G,s} = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta} - r_G(s)$$

$$d\psi_g = \frac{\tau_{zs}(s)}{4\beta} ds - 2 \underbrace{\frac{1}{2} r_g(s) ds}_{d\Omega_g}$$

Per i profili sottili aperti,
la funzione di ingobbamento
è definita dalle f. ne area
settoriale

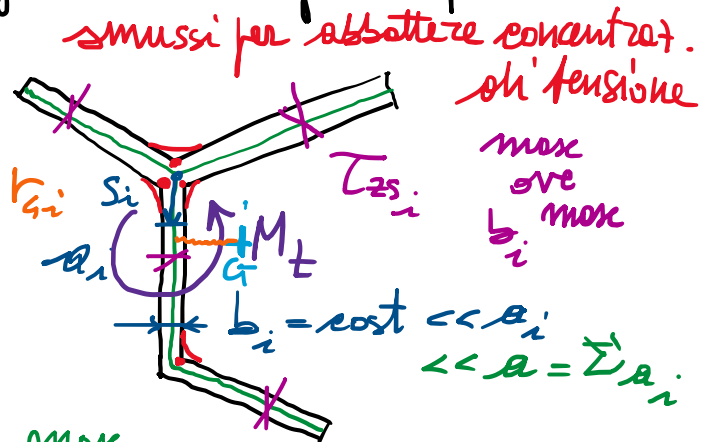
$N_g(s) \Rightarrow x_c, y_c$
le coordinate
del centro di
torsione

$$dV_g = -2 d\Omega_g$$

$$\Psi_4(s) = -2(\Omega_4(s) - \overline{\Omega}_4(s))$$

$$\bar{\Sigma}_4 = \frac{1}{A} \int_0^a \Sigma_4(s) b(s) ds$$

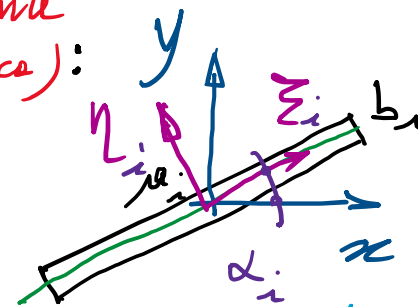
- Profili sottili aperti formati da rettangoli sottili (caso frequente nella pratica):



max
 $(\tau_{zs_i}) = \frac{M_t}{J} b_i = \frac{M_{t,i}}{J_i} b_i$ max

$$\begin{cases} A = \sum_i a_i b_i \\ J_x = \sum_i J_{x_i} \\ J_y = \sum_i J_{y_i} \end{cases}$$

$$J = \sum_i J_i = \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3$$



$$J_{x_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3 \approx 0$$

$$J_{y_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3$$

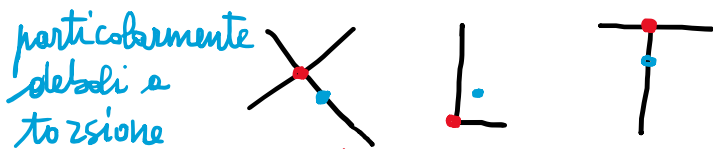
trasf. per rotazione d'assi (con $J_{x_i} \approx 0$)

$$\begin{cases} J_{x_i} = J_{y_i} \sin^2 \alpha_i \\ J_{y_i} = J_{y_i} \cos^2 \alpha_i \\ J_{x_i y_i} = \frac{J_{y_i}}{2} \sin 2\alpha_i \end{cases}$$

vedi Cerchio di Mohr (delle inerzie)

- Funzione di ingobbamento: $\psi_{q_i}(s_i) \sim \Omega_{q_i}(s_i)$ con $r_{q_i} = \text{cost}$ e tratti i lineari e tratti nelle s_i

- Profili "a stella"



centro della stella è il centro di torsione

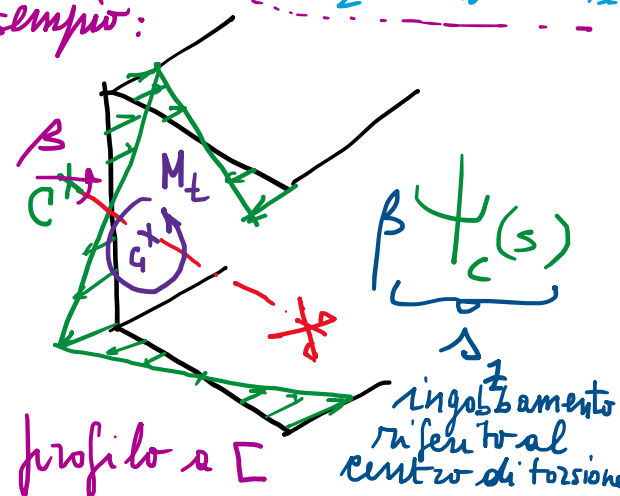
$$r_{q_i} \neq 0$$

$$r_{c_i} \equiv 0 \Rightarrow \Omega_{c_i} \equiv 0 \Rightarrow \psi_c \equiv 0$$

f.ne di ingobbamento riferita al centro della stella identic. nulle

$$\begin{aligned} \int_A \psi_c dA &= 0 \quad \checkmark \\ \int_A \psi_c x dA &= 0 \quad \checkmark \\ \int_A \psi_c y dA &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Esempio:



profilo a C

ingobbamento riferito al centro di torsione

no ulteriori risorse portanti oia ev. ingobbamento impedito (torsione per congruenza \Leftarrow secondaria)