Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

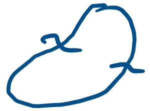
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

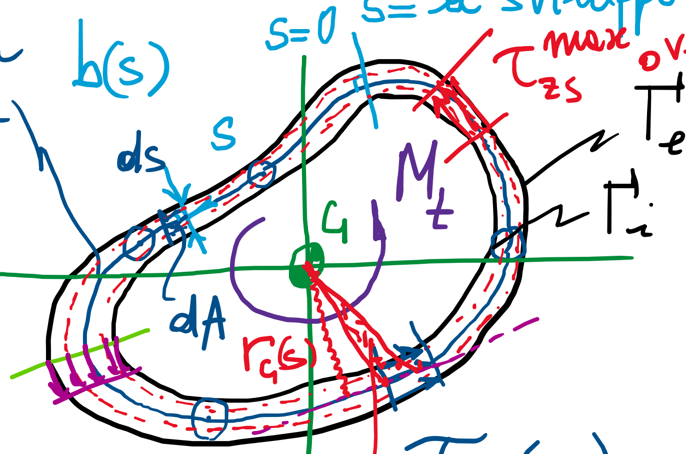
LEZIONE 23

Torsione nei profili sottili chiusi (monocellulari)



– Spessore $b(s)$ in generale variabile con continuità lungo lo sviluppo del profilo, rimanendo "piccolo":

$b(s) \ll a$ $\quad [\,|\dot{b}(s)| \ll 1\,]$ $\quad (a > 10b)$



$d\Omega_G = \frac{1}{2} r_G(s)\, ds$

$A = \oint b(s)\, ds$

– **Analogia idrodinamica:**

– traiettorie che abbracciano l'intero profilo ~ // alla linea media.

– velocità ⇒ tens. tangenziali ~ // alla l.m. ⇒ solo τ_{zs}

– distribuz. di velocità (τ_{zs}) cost. sullo spessore

– "flusso delle tensioni tangenziali": portata costante

$$q(s) = \tau_{zs}(s)\, b(s) = q = cost \Leftrightarrow Q = VA = cost$$

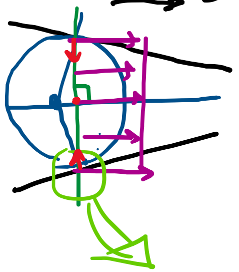
coerenti

– **Analogia della membrana:**

$$\begin{cases} \tau_{zs} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = cost & \text{pendenza cost sullo spessore} \\[2mm] \tau_{zn} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial s} \simeq 0 & \text{pendenza nulla in } s \end{cases}$$

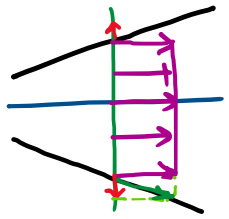
→ b↓ ($\dot{b} < 0$)

$\tau_{zn} = 0$ ⇒



τ_{zn} convergenti verso la linea media

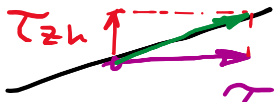
→ b↑ ($\dot{b} > 0$)



τ_{zn} divergenti dalla linea media

$\tau_z \leftrightarrow V$

antisimm. sullo spessore



τ_{zs} // linea media

$\tau_{zn} \ll \tau_{zs}$ ⇒ 0

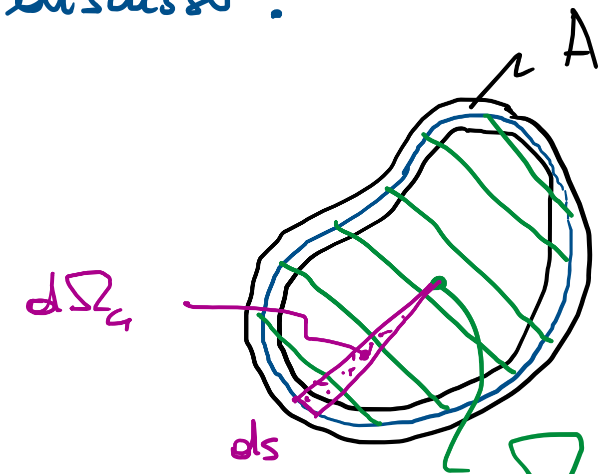
- **Formula di Rudolf BREDT (~1896)** : [ragionamento "isostatico"] $\rightarrow$ soluzione approssimata

- Equivalenza statica tra M_t e le $\tau_{zs}(s)$ come sopra discusso:

$$M_t = \oint \underbrace{\tau_{zs}(s)\, \overbrace{b(s)\, ds}^{dA}}_{\text{hp: } q(s)=q=\text{cost}} \; r_G(s)$$

$$= 2q \oint \underbrace{\frac{1}{2} r_G(s)\, ds}_{d\Omega_G}$$

$d\Omega_G$ ($\Omega_G(s)$: area settoriale riferita a G)



$\Omega >> A$

area racchiusa all'interno della linea media

$$\boxed{M_t = 2q\Omega} \Rightarrow q = \tau_{zs}(s)\, b(s) = \frac{M_t}{2\Omega}$$

Le $\tau_{zs}(s)$ risultano:

- dirett. prop. a M_t
- invers. prop. a Ω
- invers. prop. a $b(s)$

τ_{zs}^{max} ove b^{min} ; τ_{zs}^{min} ove b^{max}

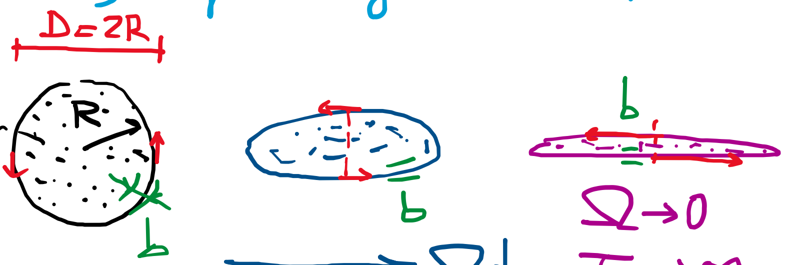
Riguardo l'entità delle τ_{zs}, a parità di spessore, il param. geometrico cruciale è Ω

$$\boxed{\tau_{zs}(s) = \frac{M_t}{2\Omega\, b(s)}}$$

$\tau_{zs} \sim \Omega^{-1}$

$\Omega = \pi R^2$

Ω^{max} a pari $a = 2\pi R$



$\longrightarrow \Omega\downarrow$

$\Omega \rightarrow 0$

$\tau_{zs} \rightarrow \infty$

(idem per J)

– **Momento d'inerzia torsionale**: valutabile, a valle del calcolo delle tau, via PLV

$$\frac{dL_e}{dz} = M_t\,\beta = \oint \tau_{zs}\,\cancel{\gamma_{zs}}\,\frac{\tau_{zs}}{G}\,b(s)\,ds = \frac{dL_i}{dz}$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}\ ;\quad J = \frac{M_t}{G\beta}\qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$J \sim \Omega^2$$

$$\cancel{M_t}\,\frac{\cancel{M_t}}{\cancel{G}J} = \oint \frac{\tau_{zs}^2(s)\,b(s)}{\cancel{G}}\,ds$$

$$\frac{1}{J} = \oint \frac{\cancel{M_t}^2}{(2\Omega b)^2}\,b(s)\,ds = \frac{1}{4\Omega^2}\oint\frac{ds}{b(s)} \Rightarrow \boxed{J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}}} \underset{b\,\text{cost}}{=} \frac{4\Omega^2 b}{a}$$

$$a = \oint ds \qquad \frac{b}{a} \sim \frac{1}{10}$$

Profili scatolari:

tratti rettilinei con $b_i = \text{cost}$

$\tau_{G_i}(s_i)$ lineare in s_i

$$= \frac{4\Omega^2}{\sum_i \frac{a_i}{b_i}} \qquad a = \sum_i a_i$$

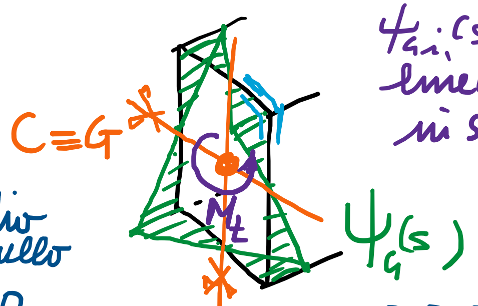
– Ingobbamento (riferito alla linea media) ⇒ Centro di torsione

$$d\psi_G = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta}\,ds - 2\,d\Omega_G$$

$$= \frac{\boxed{J}}{\cancel{M_t}}\,\frac{\cancel{M_t}}{2\Omega\,b(s)}\,ds - 2\,d\Omega_G$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}\,\Omega^{\cancel{2}}}{\oint\frac{ds}{b(s)}}\,\frac{1}{\cancel{2\Omega}}\,\frac{ds}{b(s)} - 2\,d\Omega_G$$

$$d\psi_G = \frac{2\Omega}{\oint\frac{ds}{b(s)}}\,\frac{ds}{b(s)} - 2\,d\Omega_G \Rightarrow \psi_G(s) = \frac{2\Omega}{\oint\frac{ds}{b(s)}}\int_0^s \frac{ds}{b(s)} - 2\Omega_G(s) + \underbrace{\psi_G^0}_{\text{cost}}$$



ingobb. medio nullo

$$\bar{\psi}_G = 0$$

$$\begin{cases} x_C = -\dfrac{1}{J_x}\oint \psi_G(s)\,y(s)\,b(s)\,ds \\[2ex] y_G = \dfrac{1}{J_y}\oint \psi_G(s)\,x(s)\,b(s)\,ds \end{cases}$$

coordinate del C. di To.

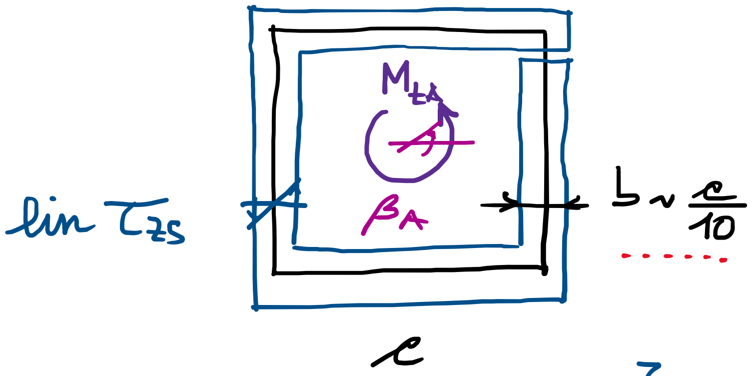
(se ∃ asse di sim, C ∈ a tale asse)

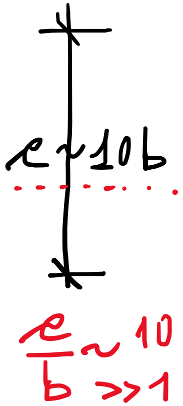
Confronto a torsione tra profilo sottile aperto e profilo sottile chiuso

The winner is... profilo chiuso!

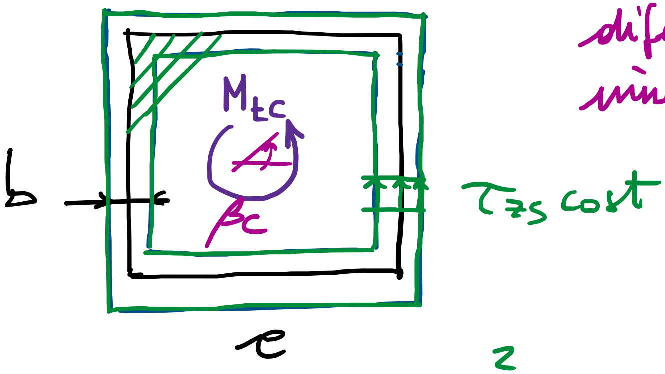
$$\beta = \frac{M_t}{GJ}$$

APERTO

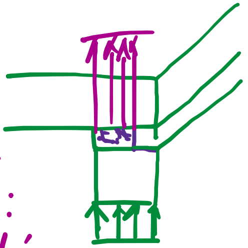




CHIUSO



saldature difettose: innesco di fratture



$\tau \cdot b = \text{cost}$

$$J_A = \sum_i \frac{1}{3} c_i b_i^3 = \frac{4}{3} c b^3 \quad \text{... inerzia torsionale ...} \quad J_c = \frac{4\Omega^2 b}{\sum_i c_i} = \frac{\cancel{4}(c^2)^2 b}{\cancel{4} c} = c^3 b$$

$$\tau_A^{max} = \frac{M_{tA}}{J_A} b = \frac{3}{4}\frac{M_{tA}}{c b^2} \quad \text{... tensione tangenziale ...} \quad \tau_c = \frac{M_{tc}}{2\Omega b} = \frac{M_{tc}}{2c^2 b}$$

(angolo unitario di "torsione")

$$\beta_A = \frac{M_{tA}}{G J_A} = \frac{3}{4}\frac{M_{tA}}{G c b^3} \quad \text{......} \quad \beta_c = \frac{M_{tc}}{G J_c} = \frac{M_{tc}}{G c^3 b}$$

Rapporti:

$$\frac{J_c}{J_A} = \frac{c^3 b}{4/3\, c b^3} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 >>> 1 \sim 0.75 \cdot 100 = 75$$

$$\frac{\tau_A}{\tau_c} = \frac{3}{\cancel{4}2}\frac{M_{tA}}{\cancel{c} b^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{2}c^{\cancel{2}}\cancel{b}}{M_{tc}} = \frac{M_{tA}}{M_{tc}}\frac{3}{2}\left(\frac{c}{b}\right)^1 \sim 1,5\ 10 = 15$$

$$\frac{\beta_A}{\beta_c} = \frac{M_{tA}}{M_{tc}}\frac{J_c}{J_A} = \frac{M_{tA}}{M_{tc}}\frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2$$

due ordini di grandezza $\sim \left(\frac{c}{b}\right)^2$

$\sim \frac{c}{b}$ un ordine di grandezza

Es.:

- a parità di M_t: $M_{tA} = M_{tc}$
  - $\frac{\tau_A}{\tau_c} = \frac{3}{2}\frac{c}{b} \sim 1.5 \cdot 10$
  - $\frac{\beta_A}{\beta_c} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 \sim 0.75 \cdot 100$
- a parità di β: $\beta_A = \beta_c$
  - $\frac{M_{tc}}{M_{tA}} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 \sim 0,75 \cdot 100$