Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

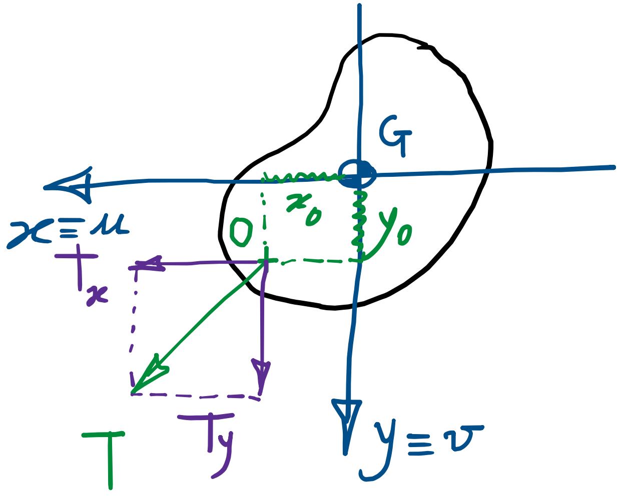
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

Taglio e Centro di Taglio



CTa

<u>Centro di taglio</u>: p.to di applicazione della forza tagliante T tale per cui si registra un'inflessione del prisma di dSV (flessione associata al taglio) <u>senza</u> rotazione della sezione nel suo piano (disaccoppiamento taglio/torsione)

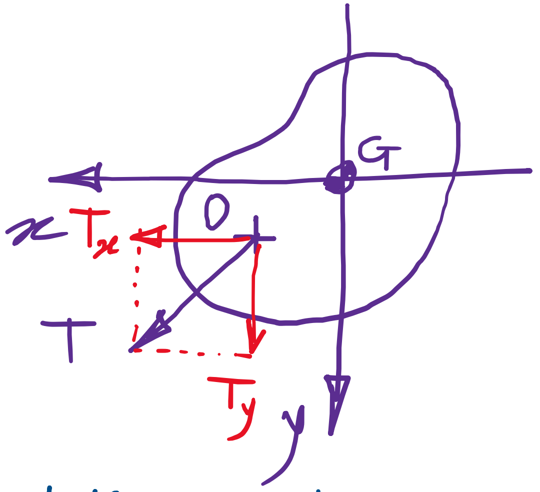
- Quindi, se $O \equiv CTa$, la sollecitazione risulta di puro taglio (flessione composta), senza effetti torcenti (cioè senza "torsione", rotazione della sezione).

- Infatti, vi è in generale presente un accoppiamento taglio/torsione, in base al punto di applicazione dell'azione tagliante T, in quanto, trasponendo la forza T nel piano, restando parallela a se stessa, si genera un momento torcente di trasporto, tale da indurre effetti torcenti.

- Il CTa, pertanto, è quel punto di applicazione dell'azione tagliante T che non induce effetti torcenti sul prisma di dSV (no rotazione della sezione).

- Rotazione ("torsione") nulla: in senso "energetico", via PLV, quando sforzi taglianti e deformazioni torcenti (e viceversa), risultano energeticamente ortogonali, cioè tali da produrre lavoro interno mutuo nullo.

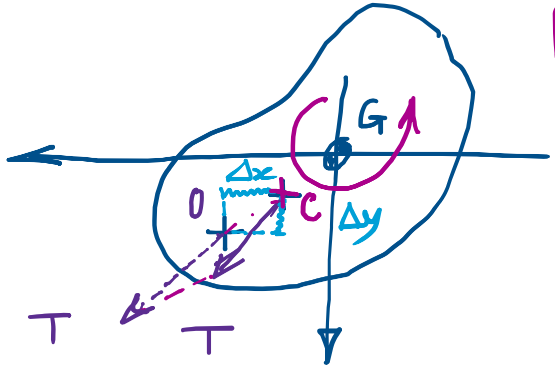
• Sistema (A) (static. ammissibile)



$$\underline{\tau}_z^{T_a} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx}^{T_a} \\ \tau_{zy}^{T_a} \end{Bmatrix}$$

sforzi taglianti

static. equiv. a:

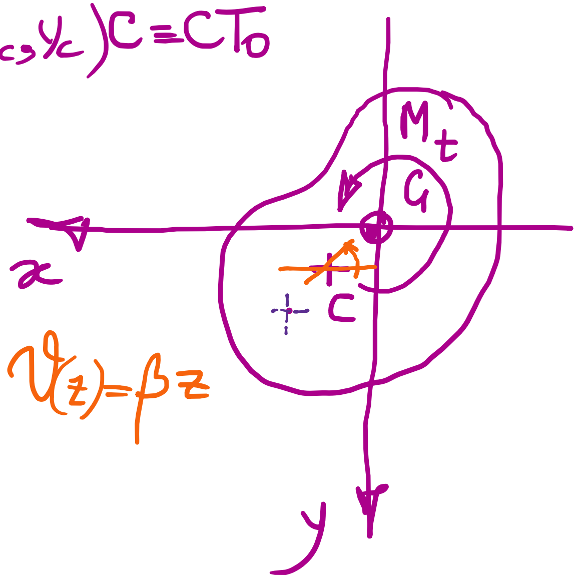


Momento torcente di trasporto

$$T_y\underbrace{(x_0-x_c)}_{\Delta x} - T_x\underbrace{(y_0-y_c)}_{\Delta y}$$

• Sistema (B) (cinematic. ammissibile)

$(x_c, y_c)\ C \equiv C T_0$



$\vartheta(z) = \beta z$

$$T_0 \begin{cases} s_x = -\beta z (y - y_c) \\ s_y = \beta z (x - x_c) \\ s_z = \beta \psi_c(x, y) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\gamma}_z^{T_0} = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx}^{T_0} \\ \gamma_{zy}^{T_0} \end{Bmatrix}$$

deformazioni taglianti

legame elast. lin. isotropo

$$\underline{\gamma}_z^{T_0} = \frac{\underline{\tau}_z^{T_0}}{G}$$

(G: modulo di elast. tangenziale)

PLV:

$$\forall \beta^B \qquad T_a \qquad T_o$$

$$\frac{d\mathcal{L}_e^{AB}}{dz} = T_x^A \cdot \cancel{s_{xc}}^B + T_y^A \cdot \cancel{s_{yc}}^B + \underbrace{\left[T_y (x_0 - x_c) - T_x (y_0 - y_c)\right]}_{=0 \ \forall T_x, T_y} \cdot \beta^B = \underbrace{\int_A \tau_z^A \cdot \gamma_z^B \, dA}_{\text{energeticamente ortogonali}} = \frac{d\mathcal{L}_i^{AB}}{dz} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = x_c \\ y_0 = y_c \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_{T_a} \equiv C_{T_o} \equiv C}$$

Inoltre, invertendo A e B $\Rightarrow$ A $\equiv$ Torsione ; B $\equiv$ Taglio

$$\frac{d\mathcal{L}_e^{T_o T_a}}{dz} = M_t^{T_o} \cdot \beta^{T_a} = \int_A \tau_z^{T_o} \cdot \gamma_z^{T_a} \, dA = \frac{d\mathcal{L}_i^{T_o T_a}}{dz}$$

$$\beta^{T_a} = 0$$

$$\int_A \tau_z^{T_o} \cdot \frac{\tau_z^{T_a}}{G} \, dA = \int_A \frac{\tau_z^{T_o}}{G} \cdot \tau_z^{T_a} \, dA = \int_A \gamma_z^{T_o} \cdot \tau_z^{T_a} \, dA = 0$$

rotazione della sezione dovuta al taglio: nulla se T è applicato in $C \equiv C_{T_a} \equiv C_{T_o}$

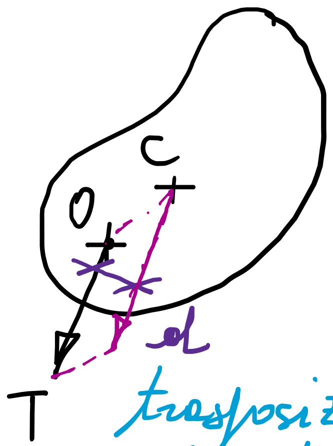
- Determinazione di C
  - se CT_o è noto dal pb. della torsione, è noto anche il CT_a
  - se CT_a " " " " taglio, " " " " CT_o

• Nota la soluz. del pb. del taglio (in generale di difficile determinazione in forma analitica), il CT_a può essere determinato dalla seguente condizione di equivalenza statica:

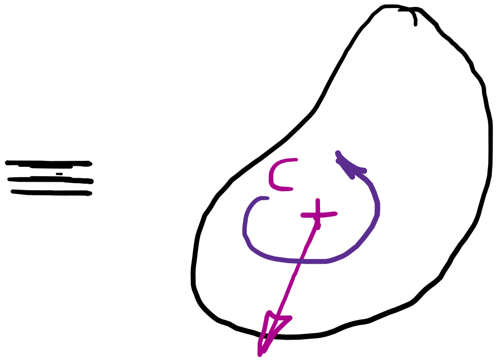
$$\int_A \left(\tau_{zy}^{T_a} x - \tau_{zx}^{T_a} y \right) dA = T_y x_c - T_x y_c \Rightarrow \begin{array}{ll} x_c & (T_x = 0,\ T_y = 1) \\ y_c & (T_x = 1,\ T_y = 0) \end{array}$$

- Soluzioni eventualmente approssimate del pb. del taglio e della torsione che prevedono τ_z e γ_z energeticamente ortogonali consentiranno di determinare $CT_a \equiv CT_o \equiv C$ in forma approssimata (C prossimo al C reale, tanto quanto la soluz. approssimata risulta vicina a quella reale).

- N.B.: se T è applicato in $O \neq C$, la trasposizione di T da O a C induce un momento torcente "parassita", da tenere in debito conto per la valutazione dello stato tenso-deformativo (con effetti che possono risultare rilevanti, per es. nel caso di profili sottili aperti, dotati di scarsa capacità portante a torsione).



trasposizione di T dal punto di applicaz. al centro di taglio



momento torcente "parassita"

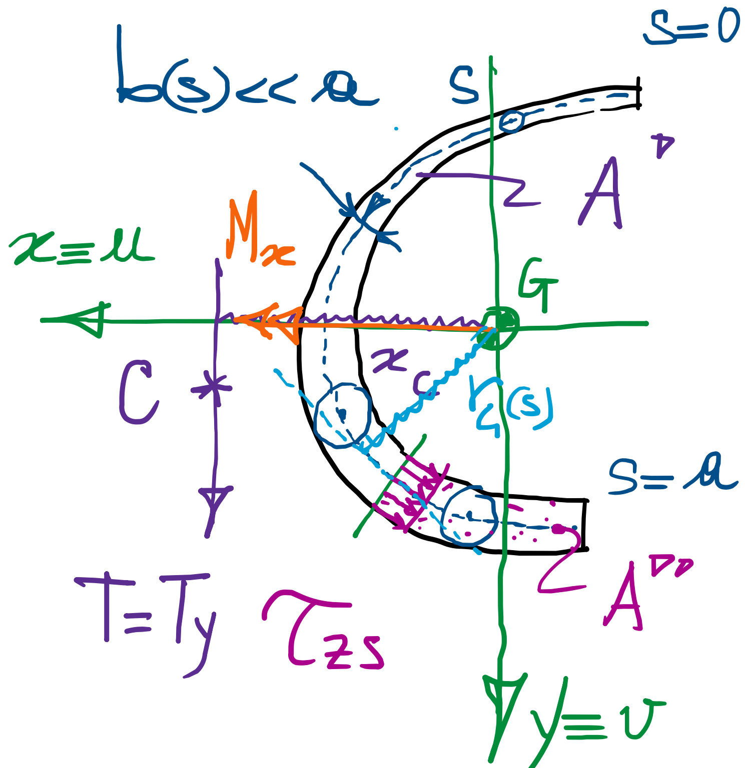
$M_{tp} = T\, d^{OC}$ ⇒ tensioni tangenziali da torsione

T ⇒ tensioni tangenziali da taglio con T applicato nel C_{T_a}

- Se ∃ asse di simmetria, $C \equiv C_{T_a} \equiv C_{T_0} \in$ a tale asse
- Per sezione doppiamente simmetrica, $C \equiv G$ (p.to di intersez. dei due assi di simm.)

- Taglio nei profili sottili (aperti) [soluzione approssimata di D. J. Jourawsky] ~ 1856

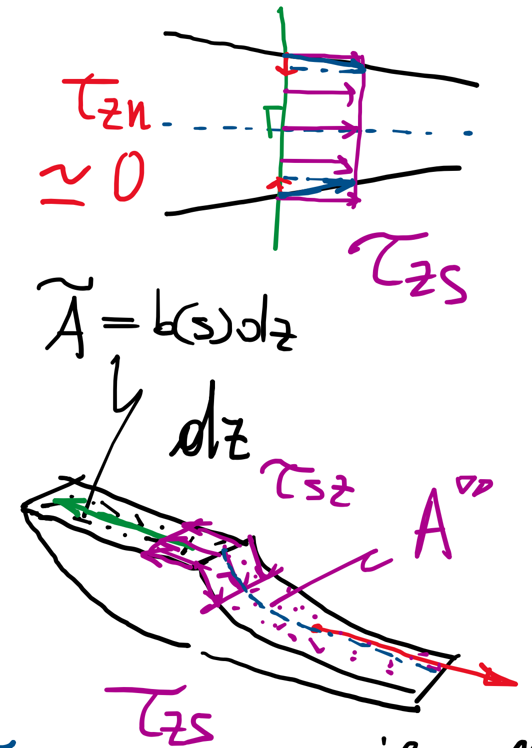
$b(s) << a$



$T = T_y$ τ_{zs}

- Corda di taglio ⊥ alla linea media del profilo sottile ⇒ $\tau_{zs} = \overline{\tau_{zs}}$ = cost. sullo spessore

τ_{zn} (antisimm. e lineari lungo lo spessore) trascurabili a fini ingegneristici



$M = M_x = T_y z$ ⇒ $\sigma_{zz} = \dfrac{T_y z}{J_x} y$

$dM_x = T_y\, dz$

flessione legata al taglio

formula di Navier per la flessione

$dR = \int_{A''} d\sigma_{zz}\, dA = \int_{A''} \dfrac{T_y\, dz}{J_x} y\, dA$

equil. alla traslazione nella direzione z

$\int_{\tilde{A}} \tau_{sz}\, dn\, dz = dR$

valor medio

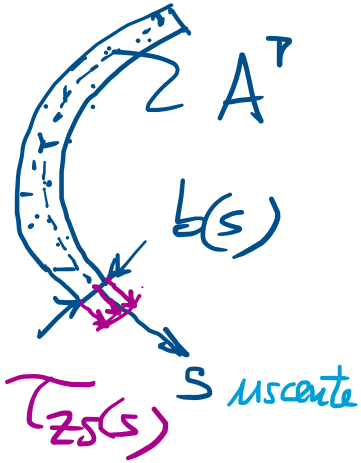
$\cancel{dz}\, \tau_{zs}\, b(s) = \dfrac{T_y\, \cancel{dz}}{J_x} \underbrace{\int_{A''} y\, dA}_{S_x''}$

- Formula di Jourawsky :

$G \in x : \; S_x = S_x' + S_x'' = 0 \Rightarrow S_x' = -S_x''$

valor medio sulla corda

$$\tau_{zs}(s) \underset{\text{Approx.}}{=} \bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y \, S_x''(s)}{J_x \, b(s)} = -\frac{T_y \, S_x'(s)}{J_x \, b(s)}$$



- N.B. : le $\tau_{zs}(s)$ alla J. non dipendono dal punto di applicazione di $T = T_y$; esse possono però riferirsi alla $T = T_y$ applicata nel Centro di Taglio. Esso risulta così determinabile dalla condizione di equivalenza statica (rispetto a G, o a punto comodo):

$$\int_0^a \underbrace{\tau_{zs}(s)\, b(s)\, ds}_{\text{forze}} \; \underbrace{r_G(s)}_{\text{braccio}} = T_y \, x_c$$

$$\int_0^a \frac{\cancel{T_y} \, S_x''(s)}{J_x \, \cancel{b(s)}} \cancel{b(s)} \, r_G(s)\, ds = \cancel{T_y} \, x_c$$

$(T_y = 1)$ CT ⇒

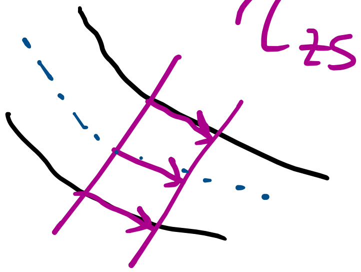
$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{J_x} \displaystyle\int_0^a S_x''(s)\, r_G(s)\, ds \\[2ex] y_c = -\dfrac{1}{J_y} \displaystyle\int_0^a S_y''(s)\, r_G(s)\, ds \end{cases}$$

$(T_x = 1)$

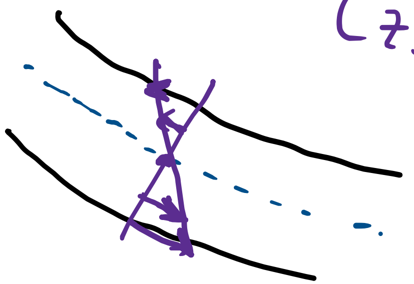
propr. geom. del profilo

- Infatti $\tau_{zs}^{Ta}(s)$ alla Jourawsky, costanti sullo spessore, risultano energeticamente ortogonali a $\gamma_{zs}^{To}(s) = \dfrac{\tau_{zs}^{To}(s)}{G}$ lineari a farfalla sullo spessore:

τ_{zs}^{Ta} cost



τ_{zs}^{To} lineari a farfalla $\rightarrow \gamma_{zs}^{To} = \dfrac{\tau_{zs}^{To}}{G}$



$$\frac{d f_i}{dz} = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs}^{Ta} \underbrace{\gamma_{zs}^{To}}_{\frac{\tau_{zs}^{To}}{G}} \, dn \, ds \equiv 0$$