```
In[1]:= "----------------------------------------------------------------------";
        "INERZIA TORSIONALE DI SEZIONE ELLITTICA EQUIVALENTE
         File Mathematica

         Corso di Complementi di Scienza delle Costruzioni
         Universita' di Bergamo, Facolta' di Ingegneria, Dalmine
         prof. Egidio Rizzi
         Maggio 2008";
        "----------------------------------------------------------------------";

        "Determinazione dell'inerzia torsionale di sezione compatta
         secondo le formule di de Saint Venant";

        J1 = A^4 / (4 * Pi^2 * JG);
        J2 = A^4 / (40 * JG);

         "Esse la interpretano quale inerzia torsionale di sezione
         ellittica equivalente di pari area A e momento d'inerzia
         polare rispetto al baricentro JG";

        "Problema: dati A e JG per la sezione in esame si vogliono
         determinare i semiassi a, b della sezione ellittica equivalente
         tali per cui:
          A=Pi*a*b
          JG=A/4*(a^2+b^2)";

        "Istruzioni d'uso:
         Ogni cella di comandi puo' essere eseguita in Mathematica
         cliccando col mouse nello spazio all'interno dei delimitatori
         visibili a destra e agendo sulla tastiera con sfhit+enter";

        "Disabilita la segnalazione di spelling errors";
        Off[General::spell]
        Off[General::spell1]

        "Determinazione di a,b dati A,JG";
        bq = A^2 / (Pi^2 * aq);
        solaq = Simplify[Solve[JG - A / 4 * (aq + bq) == 0, aq]];
        a = Simplify[Sqrt[aq] /. solaq];
        b = Simplify[Sqrt[bq] /. solaq];

        "Si noti che uno qualsiasi dei vettori a,b qui ottenuti
        contiene la coppia dei semiassi a,b cercati, ad es. il
        secondo";
        ab = b;

        "Output: a,b e verifica su A^2 e JG^2";
        a
        b
        Simplify[(Pi * a * b)^2]
        Simplify[(Pi * a * b / 4 * (a^2 + b^2))^2]
```

Out[21]= $\left\{\frac{\sqrt{\frac{2\,JG\,\pi^2-\sqrt{-A^4\,\pi^2+4\,JG^2\,\pi^4}}{A}}}{\pi},\ \frac{\sqrt{\frac{2\,JG\,\pi^2+\sqrt{-A^4\,\pi^2+4\,JG^2\,\pi^4}}{A}}}{\pi}\right\}$

Out[22]= $\left\{\sqrt{-\frac{A^3}{-2\,JG\,\pi^2+\sqrt{-A^4\,\pi^2+4\,JG^2\,\pi^4}}},\ \sqrt{\frac{A^3}{2\,JG\,\pi^2+\sqrt{-A^4\,\pi^2+4\,JG^2\,\pi^4}}}\right\}$

Out[23]= $\{A^2,\ A^2\}$

Out[24]= $\{JG^2,\ JG^2\}$

In[25]:=
```
"Esempio: sezione rettangolare di lati c,d";
A = c * d;
JG = 1 / 12 * A * (c^2 + d^2);
abelleq = Simplify[ab];
Jelleq1 = Simplify[J1];
Jelleq2 = Simplify[J2];

"Fattore k che compare nella formula J=k*c*d^3 secondo stima
 da sezione ellittica equivalente qui ottenuta e suoi valori
 per vari rapporti c/d";
csudvalues = {1.0, 1.2, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 5.0, 10.0};
kell1 = Simplify[Jelleq1 / (c * d^3) /. {c -> csud * d}];
kell1values = N[kell1 /. {csud → csudvalues}];
kell2 = Simplify[Jelleq2 / (c * d^3) /. {c -> csud * d}];;
kell2values = N[kell2 /. {csud → csudvalues}];

"Fattore k che compare nella formula
  J=k*c*d^3
 secondo soluzione per sviluppo in serie per gli stessi valori
 del rapporto c/d, vedi ad es.
  Timoshenko, Theory of Elasticity, pp. 312-313.
 Tali valori corrispondono alla stima corretta di k per la
 sezione rettangolare";
kserievalues = {0.1406, 0.166, 0.196, 0.229, 0.249, 0.263, 0.281, 0.291, 0.312} ;

"Cf. con sezione ellittica inscritta nella sezione rettangolare.
Si noti che la sezione ellittica inscritta dovra' fornire
una stima per difetto dell'inerzia torsionale";
Ainscr = Pi * c / 2 * d / 2;
JGinscr = Ainscr / 4 * ((c / 2)^2 + (d / 2)^2);
Jinscr = Simplify[Ainscr^4 / (4 * Pi^2 * JGinscr)];
kinscr = Simplify[Jinscr / (c * d^3) /. {c -> csud * d}];
kinscrvalues = N[kinscr /. {csud → csudvalues}];

"Output: a,b e inerzia torsionale";
abelleq

Jelleq1
Jelleq2
Jinscr

kell1
kell2
kinscr

csudvalues
kserievalues
kell1values
kell2values
kinscrvalues
```

Out[46]= $\left\{\sqrt{-\frac{c^3 d^3}{-\frac{1}{6} c d (c^2+d^2) \pi^2+\sqrt{-c^4 d^4 \pi^2+\frac{1}{36} c^2 d^2 (c^2+d^2)^2 \pi^4}}}, \sqrt{\frac{c^3 d^3}{\frac{1}{6} c d (c^2+d^2) \pi^2+\sqrt{-c^4 d^4 \pi^2+\frac{1}{36} c^2 d^2 (c^2+d^2)^2 \pi^4}}}\right\}$

Out[47]= $\frac{3 c^3 d^3}{(c^2+d^2) \pi^2}$

Out[48]= $\frac{3 c^3 d^3}{10 (c^2+d^2)}$

Out[49]= $\frac{c^3 d^3 \pi}{16 (c^2+d^2)}$

Out[50]= $\frac{3\, \mathrm{csud}^2}{(1+\mathrm{csud}^2) \pi^2}$

Out[51]= $\frac{3\, \mathrm{csud}^2}{10 (1+\mathrm{csud}^2)}$

Out[52]= $\frac{\mathrm{csud}^2 \pi}{16+16\, \mathrm{csud}^2}$

Out[53]= {1., 1.2, 1.5, 2., 2.5, 3., 4., 5., 10.}

Out[54]= {0.1406, 0.166, 0.196, 0.229, 0.249, 0.263, 0.281, 0.291, 0.312}

Out[55]= {0.151982, 0.179388, 0.210436, 0.243171,
0.262038, 0.273567, 0.286083, 0.292273, 0.300954}

Out[56]= {0.15, 0.177049, 0.207692, 0.24, 0.258621, 0.27, 0.282353, 0.288462, 0.29703}

Out[57]= {0.0981748, 0.115878, 0.135934, 0.15708,
0.169267, 0.176715, 0.1848, 0.188798, 0.194405}

In[58]:=

```
"Output: Valori di a,b e loro rapporti a/b in funzione del rapporto c/d";
Simplify[abelleq /. {c → csud * Abs[d]}, d > 0]
MatrixForm[Transpose[N[% / d /. {csud → csudvalues}]]]
Simplify[%%[[1]] / %%[[2]], csud > 0]
N[% /. {csud → csudvalues}]
```

Out[59]=

$$\left\{d\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{\frac{\text{csud}^3}{\text{csud}\,\pi+\text{csud}^3\,\pi-\sqrt{-36\,\text{csud}^4+\left(\text{csud}+\text{csud}^3\right)^2\pi^2}}},\right.$$
$$\left.d\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{\frac{\text{csud}^3}{\text{csud}\,\pi+\text{csud}^3\,\pi+\sqrt{-36\,\text{csud}^4+\left(\text{csud}+\text{csud}^3\right)^2\pi^2}}}\right\}$$

Out[60]//MatrixForm=

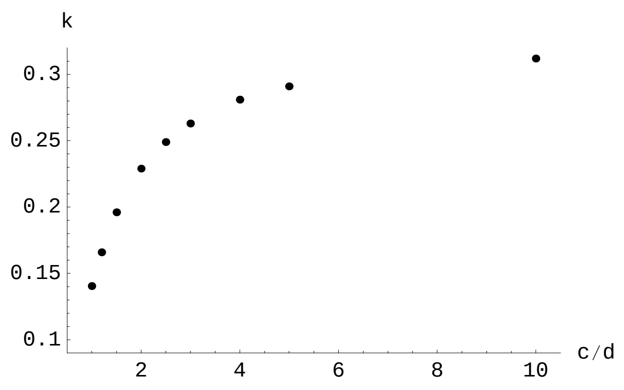
$$\begin{pmatrix} 0.657478 & 0.484138 \\ 0.739067 & 0.51683 \\ 0.893006 & 0.534671 \\ 1.17093 & 0.543689 \\ 1.45521 & 0.546847 \\ 1.74145 & 0.548354 \\ 2.31613 & 0.549727 \\ 2.89203 & 0.550323 \\ 5.77607 & 0.551084 \end{pmatrix}$$

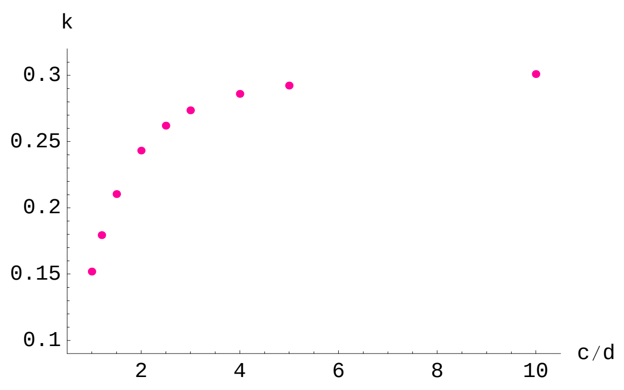
Out[61]=

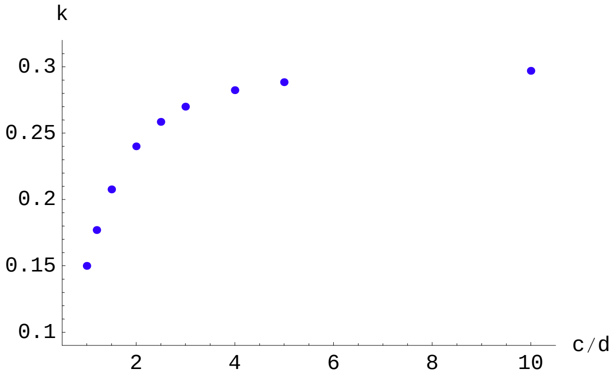
$$\sqrt{\frac{\text{csud}\,\pi+\text{csud}^3\,\pi+\sqrt{-36\,\text{csud}^4+\left(\text{csud}+\text{csud}^3\right)^2\pi^2}}{\text{csud}\,\pi+\text{csud}^3\,\pi-\sqrt{-36\,\text{csud}^4+\left(\text{csud}+\text{csud}^3\right)^2\pi^2}}}$$

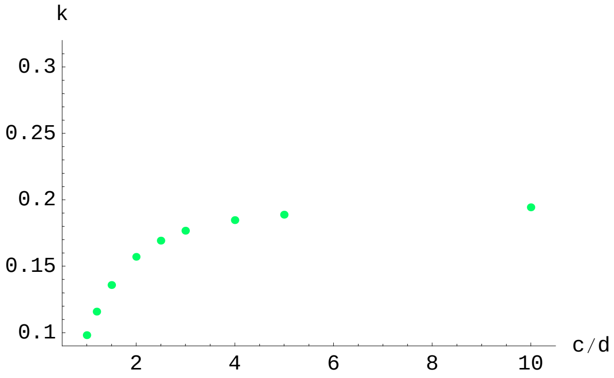
Out[62]= {1.35804, 1.43, 1.6702, 2.15367, 2.66109, 3.17577, 4.21324, 5.25514, 10.4813}

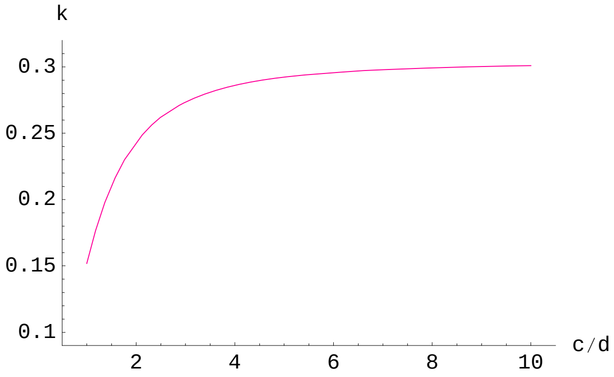
In[63]:=
```
"Grafici";
kcsudserie = Transpose[{csudvalues, kserievalues}];
kcsudell1 = Transpose[{csudvalues, kell1values}];
kcsudell2 = Transpose[{csudvalues, kell2values}];
kcsudinscr = Transpose[{csudvalues, kinscrvalues}];

pkserie =
  ListPlot[kcsudserie, AxesLabel → {"c/d", "k"}, PlotStyle → {PointSize[0.016]},
   PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.09, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.09}];
pkell1discreto = ListPlot[kcsudell1, AxesLabel → {"c/d", "k"},
   PlotStyle → {PointSize[0.016], Hue[0.9]},
   PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.09, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.09}];
pkell2discreto = ListPlot[kcsudell2, AxesLabel → {"c/d", "k"},
   PlotStyle → {PointSize[0.016], Hue[0.7]},
   PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.09, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.09}];
pkinscrdiscreto = ListPlot[kcsudinscr, AxesLabel → {"c/d", "k"},
   PlotStyle → {PointSize[0.016], Hue[0.4]},
   PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.09, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.09}];
pkell1continuo = Plot[kell1, {csud, 1, 10}, AxesLabel → {"c/d", "k"}, PlotStyle →
    {Hue[0.9]}, PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.09, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.09}];
pkell2continuo = Plot[kell2, {csud, 1, 10}, AxesLabel → {"c/d", "k"}, PlotStyle →
    {Hue[0.7]}, PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.09, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.09}];
pkinscrcontinuo = Plot[kinscr, {csud, 1, 10}, AxesLabel → {"c/d", "k"}, PlotStyle →
    {Hue[0.4]}, PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.09, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.09}];

Show[pkell1continuo, pkell2continuo, pkinscrcontinuo, pkserie]
Show[pkell1discreto, pkell2discreto, pkinscrdiscreto, pkserie]
```

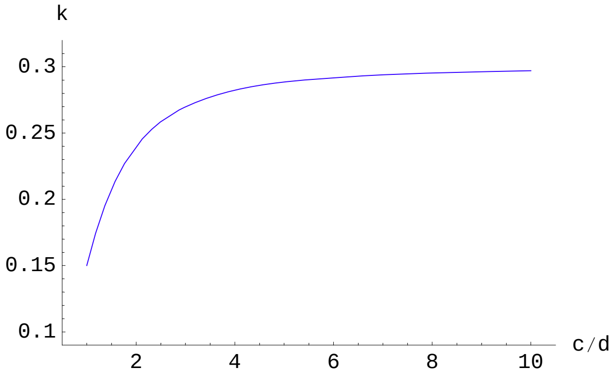


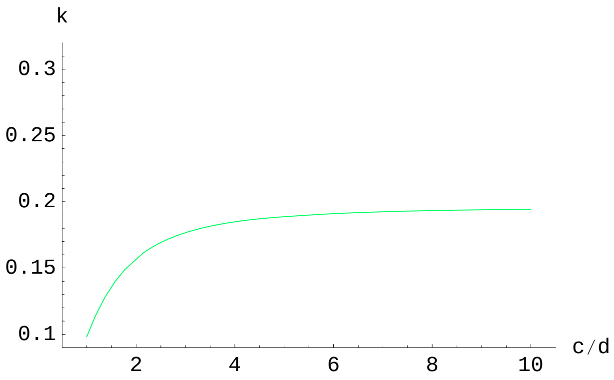


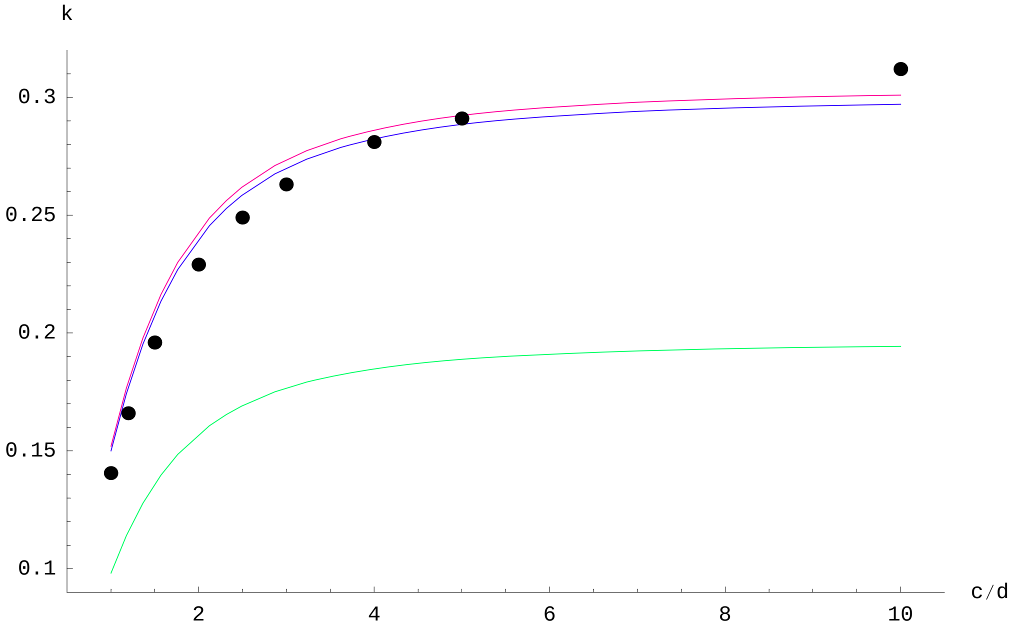

k
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
2
4
6
8
10
c/d


k
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
2
4
6
8
10
c/d

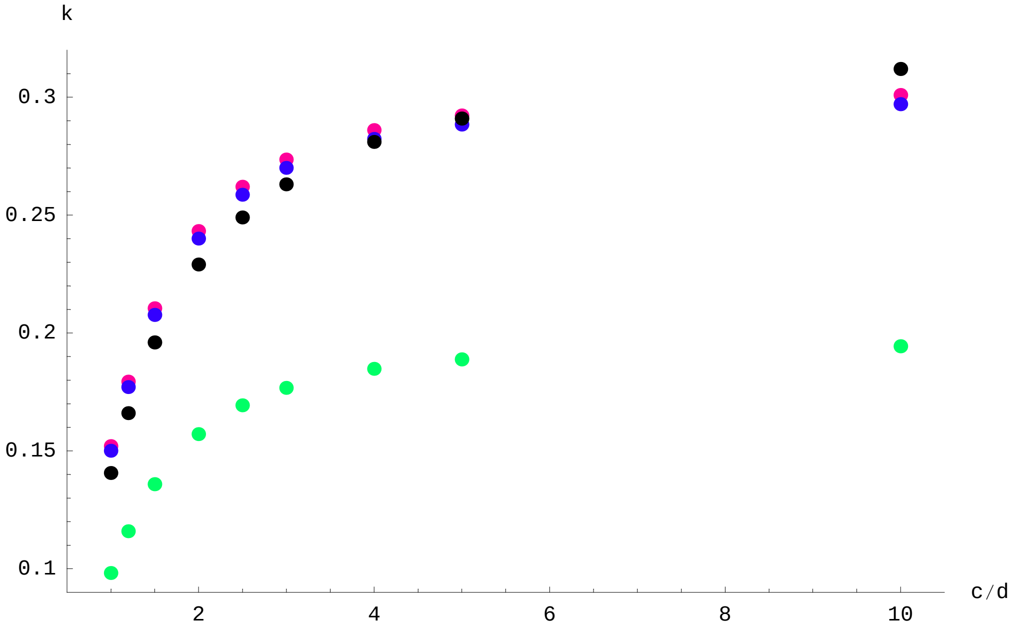

k
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
2
4
6
8
10
c/d


k
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
2
4
6
8
10
c/d





Out[75]= - Graphics -



Out[76]= - Graphics -

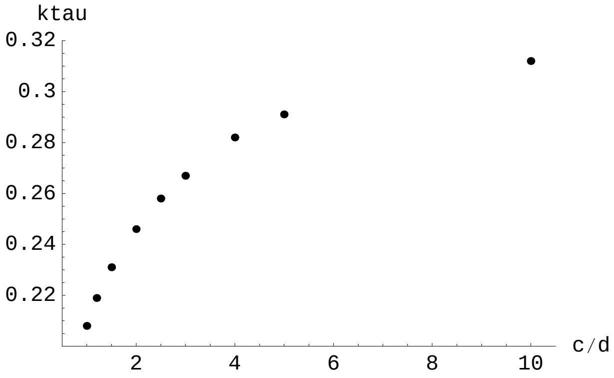
```
In[77]:= "Commenti:
         - le due approssimazioni J1 e J2 fornite dalle formule di DSV
           costitutiscono un'ottima stima della rigidezza torsionale
           della sezione rettangolare;
         - l'approssimazione J2 contenente il fattore 40, al posto di
           4*Pi^2 in J1, e' persino piu' vicina alla stima corretta per
           rapporti c/d minori di un valore caratteristico intorno a 5;
         - intorno a tale valore caratteristico si ha un'inversione dei
           trends delle stime (cambiamento da lieve sovrastima a lieve
           sottostima dell'inerzia torsionale), con valori stimati
           molto vicini a quello reale;
         - la stima corrispondente a sezione ellittica inscritta nella
           rettangolare e' nettamente inferiore alle precedenti";

         "Calcolo delle tensioni tangenziali max che si produrrebbero
          nella sezione ellittica equivalente
           tauelleq=Mt/(Pi/2*a*b^2)
          e loro cf. con la soluzione per sviluppo in serie";


         ktauelleq =
          Simplify[Pi / 2 * abelleq[[1]] * abelleq[[2]] ^2 / (c * d^2) /. {c → csud * Abs[d]}, d > 0]
         ktauelleqvalues = ktauelleq /. csud → csudvalues

         "Fattore ktau che compare nella formula
           tau=Mt/(ktau*c*d^2)
          secondo soluzione per sviluppo in serie per gli stessi valori
          del rapporto c/d, vedi ad es.
           Timoshenko, Theory of Elasticity, pp. 312-313.
          Tali valori corrispondono alla stima corretta di tau per la
          sezione rettangolare";

         ktauserievalues = {0.208, 0.219, 0.231, 0.246, 0.258, 0.267, 0.282, 0.291, 0.312}
         ktaucsudserie = Transpose[{csudvalues, ktauserievalues}];
         pktauserie = ListPlot[ktaucsudserie,
           AxesLabel → {"c/d", "ktau"}, PlotStyle → {PointSize[0.016]},
           PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.2, 0.32}}, AxesOrigin → {0.5, 0.2}]

         ktauelleqcsud = Transpose[{csudvalues, ktauelleqvalues}];
         pktauelleqdiscreto = ListPlot[ktauelleqcsud,
            AxesLabel → {"c/d", "ktauell"}, PlotStyle → {PointSize[0.016], Hue[0.9]},
            PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.24, 0.28}}, AxesOrigin → {0.5, 0.24}];
         pktauelleqcontinuo = Plot[ktauelleq, {csud, 1, 10},
            AxesLabel → {"c/d", "ktauell"}, PlotStyle → {Hue[0.9]},
            PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.24, 0.28}}, AxesOrigin → {0.5, 0.24}];

         Show[pktauserie, pktauelleqcontinuo,
          pktauelleqdiscreto, AxesLabel → {"c/d", "ktau"}]
```

Out[79]=

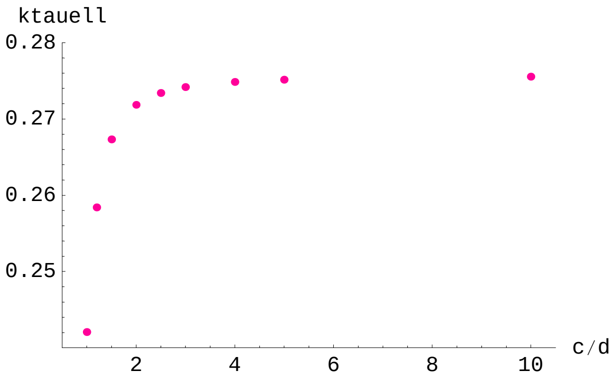
$$\frac{3\,\text{csud}^2\sqrt{\frac{6}{\pi}}\sqrt{\frac{\text{csud}^3}{\text{csud}\,\pi+\text{csud}^3\,\pi-\sqrt{-36\,\text{csud}^4+(\text{csud}+\text{csud}^3)^2\,\pi^2}}}}{\text{csud}\,\pi+\text{csud}^3\,\pi+\sqrt{-36\,\text{csud}^4+(\text{csud}+\text{csud}^3)^2\,\pi^2}}$$

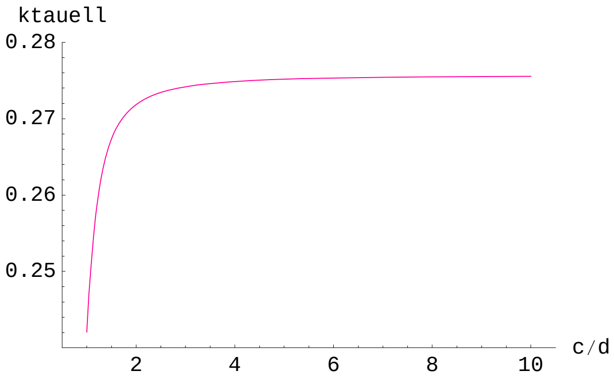
Out[80]= {0.242069, 0.258415, 0.267336, 0.271844, 0.273423, 0.274177, 0.274863, 0.275162, 0.275542}

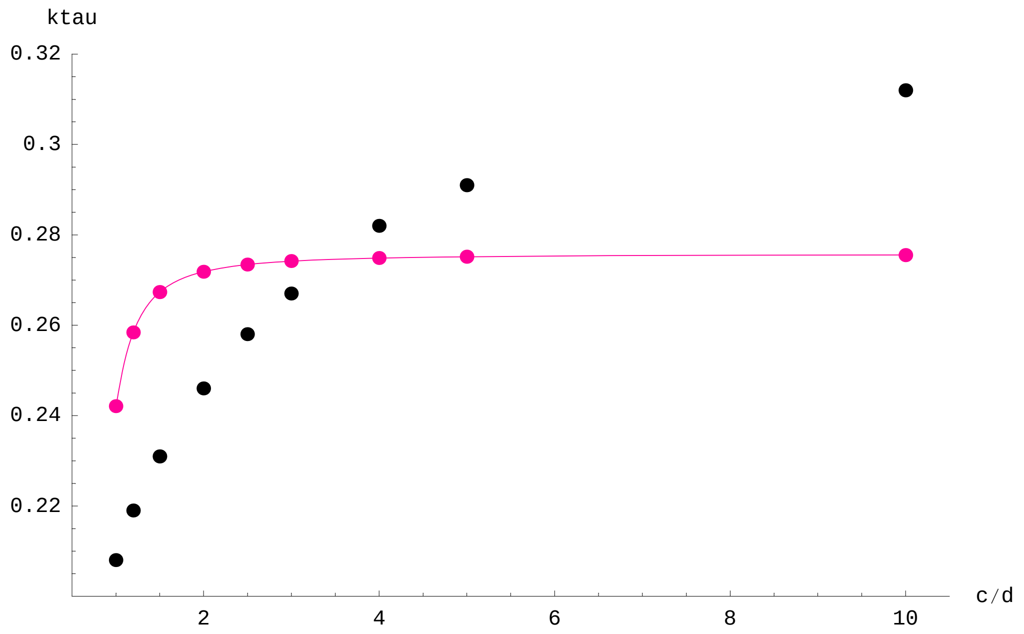
Out[82]= {0.208, 0.219, 0.231, 0.246, 0.258, 0.267, 0.282, 0.291, 0.312}



Out[84]= - Graphics -

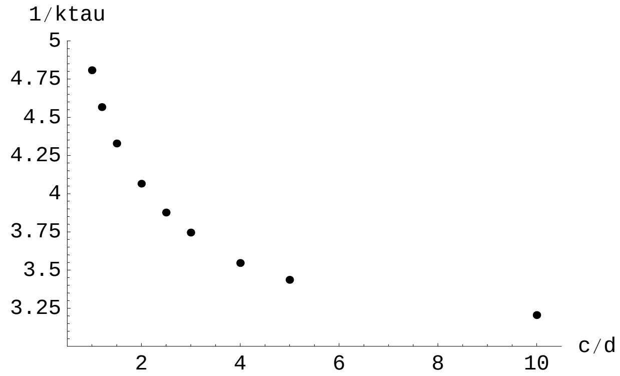




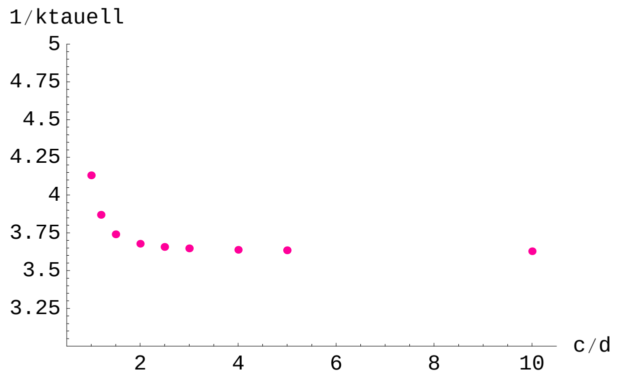


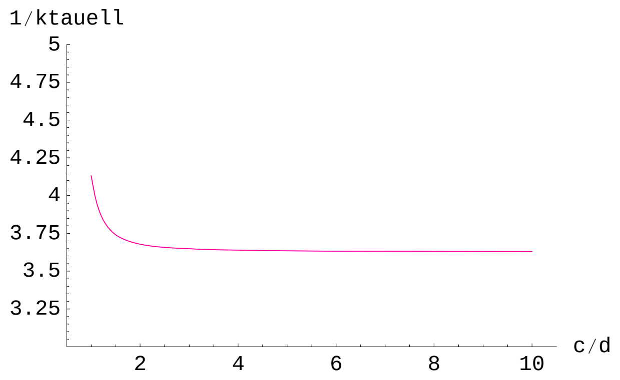
Out[88]= - Graphics -

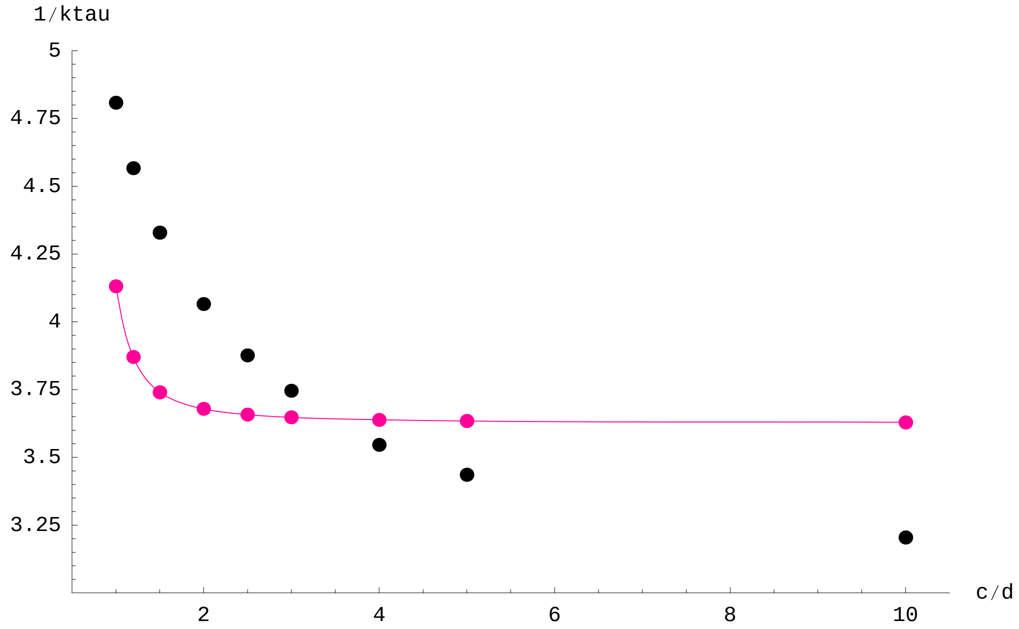
```
In[89]:= "Rappresentazione dell'inverso del fattore ktau";
invktaucsudserie = Transpose[{csudvalues, 1 / ktauserievalues}];
invktauelleqcsud = Transpose[{csudvalues, 1 / ktauelleqvalues}];
pinvktauserie = ListPlot[invktaucsudserie,
  AxesLabel → {"c/d", "1/ktau"}, PlotStyle → {PointSize[0.016]},
  PlotRange → {{0.5, 10.5}, {5, 3.0}}, AxesOrigin → {0.5, 3}]
pinvktauelleqdiscreto = ListPlot[invktauelleqcsud,
   AxesLabel → {"c/d", "1/ktauell"}, PlotStyle → {PointSize[0.016], Hue[0.9]},
   PlotRange → {{0.5, 10.5}, {5, 3.0}}, AxesOrigin → {0.5, 3}];
pinvktauelleqcontinuo = Plot[1 / ktauelleq, {csud, 1, 10},
   AxesLabel → {"c/d", "1/ktauell"}, PlotStyle → {Hue[0.9]},
   PlotRange → {{0.5, 10.5}, {5, 3.0}}, AxesOrigin → {0.5, 3}];

Show[pinvktauelleqcontinuo, pinvktauelleqdiscreto,
 pinvktauserie, AxesLabel → {"c/d", "1/ktau"}]
```



Out[92]= - Graphics -







Out[95]= - Graphics -

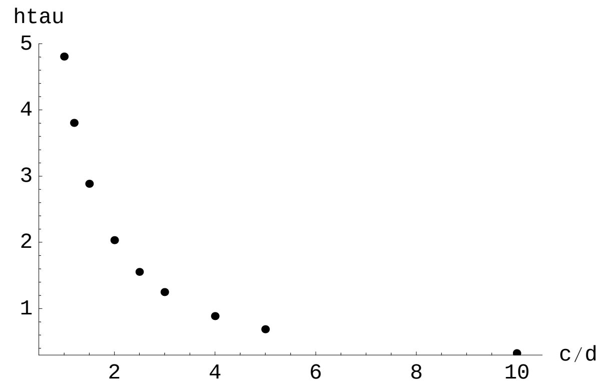
In[96]:=

```
"Valori di tau=h*Mt/d^3 in termini del coefficiente h=k*c/d";
htauelleq = Simplify[1 / (ktauelleq * csud), csud > 0]
htauelleqvalues = 1 / (ktauelleqvalues * csudvalues)
htauserievalues = 1 / (ktauserievalues * csudvalues)
htaucsudserie = Transpose[{csudvalues, htauserievalues}];
htauelleqcsud = Transpose[{csudvalues, htauelleqvalues}];

phtauserie = ListPlot[htaucsudserie,
  AxesLabel → {"c/d", "htau"}, PlotStyle → {PointSize[0.016]},
  PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.3, 5}}, AxesOrigin → {0.5, 0.3}]
phtauelleqdiscreto = ListPlot[htauelleqcsud, AxesLabel → {"c/d", "htauell"},
   PlotStyle → {PointSize[0.016], Hue[0.9]},
   PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.3, 5}}, AxesOrigin → {0.5, 0.3}];
phtauelleqcontinuo = Plot[htauelleq, {csud, 1, 10},
  AxesLabel → {"c/d", "htauell"}, PlotStyle → {Hue[0.9]},
  PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.3, 5}}, AxesOrigin → {0.5, 0.3}]

Show[phtauelleqcontinuo, phtauelleqdiscreto,
 phtauserie, AxesLabel → {"c/d", "htau"},
 PlotRange → {{0.5, 10.5}, {0.3, 5}}, AxesOrigin → {0.5, 0.3}]
```

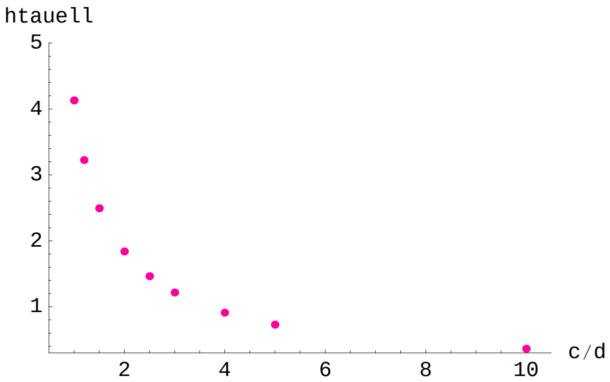
Out[97]=
$$\frac{2\sqrt{6}\,\pi\sqrt{\frac{1}{\pi+\mathrm{csud}^2\,\pi-\sqrt{\pi^2+\mathrm{csud}^4\,\pi^2+2\,\mathrm{csud}^2\,(-18+\pi^2)}}}}{\mathrm{csud}}$$

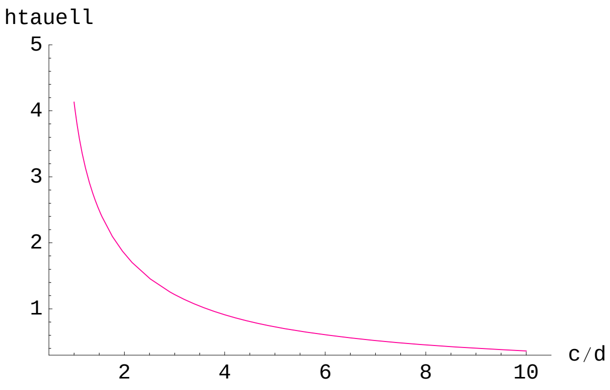
Out[98]= {4.13106, 3.22479, 2.49374, 1.83929, 1.46293, 1.21576, 0.909543, 0.726845, 0.362921}

Out[99]= {4.80769, 3.80518, 2.886, 2.03252, 1.55039, 1.24844, 0.886525, 0.687285, 0.320513}



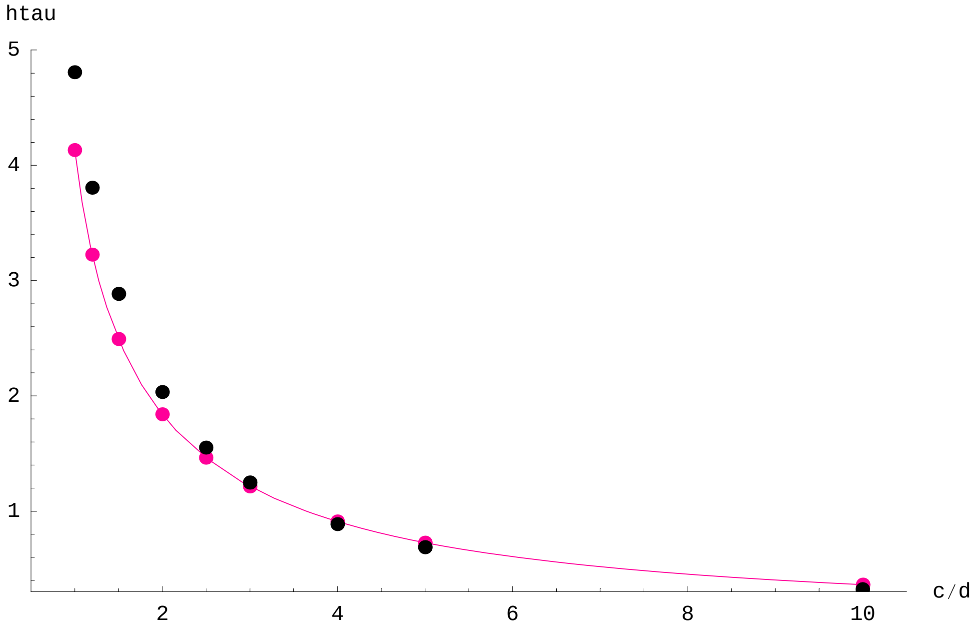
Out[102]=
- Graphics -





Out[104]=

- Graphics -



Out[105]=

- Graphics -

In[106]:=

```
"Commento conclusivo: anche la tau max e' ben rappresentata
 dalla formula tau=h*Mt/d^3, col fattore h stimato tramite
 la sezione ellittica equivalente";
```