

Inserimento di una pagina totalmente bianca,
affinché la stampa di due pagine per foglio
comporti la presenza a destra dei numeri di pagina
dispari (tra cui il titolo del libro, l'inizio
delle varie parti che lo compongono e l'inizio di
ciascun capitolo)

BOZZA
17/03/2012



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Facoltà di Ingegneria (Dalmine)

Corso di Laurea in
Ingegneria Edile

Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Edile

Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Meccanica

**Complementi di
Scienza delle Costruzioni
RACCOLTA DI ESERCIZI**

Esercitatore:

ing. Francesco Mario GHILARDI

Docente:

prof. Egidio RIZZI

Anno Accademico 2011/2012

BOZZA
17/03/2012

Indice

Prefazione	III
I Analisi Cinematica	1
1 Schemi isostatici fondamentali	3
1.1 Introduzione all'analisi cinematica	3
1.1.1 Schemi isostatici fondamentali	4
1.2 Schemi isostatici fondamentali ad unica asta	5
1.2.1 Asta incastrata	5
1.2.2 Asta cerniera-carrello	5
1.2.3 Asta a tre carrelli	10
1.2.4 Asta a tre bielle	11
1.3 Schemi isostatici fondamentali a due aste	15
1.3.1 Arco a tre cerniere	15
1.3.2 Anello chiuso isostatico (a due aste)	21
1.4 Schemi isostatici fondamentali a tre aste	24
1.4.1 Anello chiuso isostatico (a tre aste)	24
1.5 Schemi fondamentali a quattro aste	26
1.5.1 Quadrilatero articolato	26
2 Approccio geometrico	31
2.1 Analisi cinematica	32
2.1.1 Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà	33
2.1.2 Ricostruzione di una sequenza di montaggio	34
2.1.3 Approccio geometrico	37
2.2 Meccanismo e mappe degli spostamenti	44
2.2.1 Meccanismo o spostata	44
2.2.2 Spostamenti nodali	47
3 Approccio analitico	49
3.1 Analisi cinematica	50
3.1.1 Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà	51
3.1.2 Approccio analitico	52
3.2 Meccanismo e mappe degli spostamenti	68
3.2.1 Calcolo del meccanismo	68
3.2.2 Tracciamento del meccanismo	71

Elenco delle figure	79
Bibliografia	80

BOZZA
17/03/2012

Prefazione

In queste note si raccolgono alcuni degli esercizi svolti nelle Esercitazioni dell'insegnamento di Complementi di Scienza delle Costruzioni offerto nel corso di Laurea in Ingegneria Edile e nei corsi di laurea Magistrale in Ingegneria Edile ed in Ingegneria Meccanica presso la Facoltà di Ingegneria (Dalmine) dell'Università degli Studi di Bergamo.

La soluzione degli esercizi è presentata in maniera sintetica, facendo riferimento ai passi principali d'analisi. Si presuppone quindi una buona conoscenza degli argomenti trattati a lezione; i richiami qui presenti si intendono minimali e sostanzialmente mirati al solo uso specifico richiesto all'interno degli esercizi stessi.

La raccolta è rivolta in particolare a trattare le seguenti tematiche caratteristiche del corso: analisi cinematica geometrica ed analitica di schemi non elementari; dualità statica/cinematica nell'analisi di sistemi articolati di corpi rigidi; uso del principio dei lavori virtuali per il calcolo di componenti di reazioni vincolari e di azioni interne; soluzione di strutture staticamente indeterminate, una o più volte, soggette a carichi esterni, distorsioni termiche impresse e cedimenti vincolari elastici o permanenti; analisi di travi reticolari iso o iperstatiche; verifica di sforzo in sezioni compatte non simmetriche ed in profili sottili, aperti o chiusi, soggetti ad azione assiale, momento flettente, taglio e torsione.

L'elenco bibliografico conclusivo presenta opportuni rimandi al lettore, utili allo studio delle tematiche e delle metodologie connesse allo svolgimento degli esercizi qui raccolti.

BOZZA
17/03/2012

Parte I

Analisi Cinematica

BOZZA
17/03/2012

BOZZA
17/03/2012

Schemi isostatici fondamentali

In questo capitolo introduttivo, si riassumono i cosiddetti schemi isostatici fondamentali (piani). In particolare, si approfondiscono qui le considerazioni riguardanti la ricerca dei potenziali Centri di Istantanea Rotazione (CIR), assoluti e relativi, delle aste componenti gli schemi stessi (sistemi articolati di corpi rigidi), affinché la presentazione in oggetto risulti propedeutica all'analisi cinematica geometrica ed analitica, trattate successivamente. Inoltre, si analizzano alcuni esempi labili di schemi fondamentali potenzialmente isostatici ma aventi i vincoli mal posti, introducendo anche i concetti di atto di moto, di meccanismo (anche indicato come spostata o catena cinematica) e di mappe delle componenti di spostamento secondo direzioni di interesse (in particolare orizzontale e verticale).

1.1 Introduzione all'analisi cinematica

L'analisi cinematica, principalmente svolta qui al fine di indagare le eventuali condizioni di labilità di una struttura, si compone di due fasi distinte:

1. computo dei gradi di vincolo v e dei gradi di libertà l , affinché risulti verificata la condizione necessaria di non labilità $v \geq l$ (in assenza della quale il sistema risulta labile, poiché cinematicamente ipodeterminato);
2. studio della buona posizione dei vincoli applicati alla struttura, al fine di dedurre se i vincoli stessi risultano *ben posti* o *efficaci*, cioè tali da garantire la fissità della struttura stessa.

In particolare, per stabilire se i vincoli risultano ben posti, si hanno a disposizione sostanzialmente tre approcci:

- Ricostruzione, ove possibile, di una *sequenza di montaggio* di schemi non labili già noti, spesso indicati come *schemi fondamentali*, specificamente schemi cinematicamente isodeterminati o isostatici.
- *Approccio geometrico*, valido in generale e basato sulla ricostruzione di tutti i centri di istantanea rotazione (assoluti e relativi) del sistema, determinando se questi soddisfano o meno le condizioni di allineamento fornite dai cosiddetti *primo e secondo teorema sulle catene cinematiche* e se ne caratterizzano, più o meno univocamente, la spostata.
- *Approccio analitico*, valido in generale e basato sulla scrittura esplicita delle equazioni cinematiche di vincolo, tipicamente in forma matriciale, con studio delle proprietà algebriche del sistema di equazioni lineari conseguentemente ottenuto.

Nel presente capitolo si riassumono gli *schemi isostatici fondamentali*, utili all'applicazione del primo dei tre approcci sopra descritti. Come accennato, tale approccio non è applicabile in generale, bensì solamente nei casi dei cosiddetti *schemi elementari*, vale a dire di strutture realmente interpretabili come la sovrapposizione di schemi fondamentali mediante opportuna sequenza di montaggio. Si fa esplicito riferimento al caso piano.

I prossimi due capitoli saranno invece dedicati rispettivamente alla presentazione dell'approccio geometrico e dell'approccio analitico, ambedue aventi validità più generale. Non solo, grazie al fatto che la struttura scelta nel Capitolo 2 per l'applicazione dell'approccio geometrico sarà costituita da uno schema elementare, si sfrutterà tale esempio anche per mostrare come operare nell'individuazione di un'opportuna sequenza di montaggio basata sugli schemi elementari illustrati nel seguito della presente trattazione (alternativa quest'ultima non possibile nel Capitolo 3, dedicato all'approccio analitico, causa l'assegnazione di uno schema cinematico non elementare).

1.1.1 Schemi isostatici fondamentali

Per chiarezza espositiva si suddividono gli schemi fondamentali (piani) potenzialmente isostatici in funzione del numero n delle aste che li compongono:

- Schemi isostatici fondamentali ad unica asta ($n = 1$):
 - asta incastrata;
 - asta cerniera-carrello;
 - asta a tre carrelli;
 - asta a tre bielle (qui presentato in quanto strettamente analogo allo schema precedente, sebbene già dotato di quattro aste).
- Schemi isostatici fondamentali a due aste ($n = 2$):
 - arco a tre cerniere;
 - anello chiuso isostatico (nella configurazione a due aste).
- Schemi isostatici fondamentali a tre aste ($n = 3$):
 - anello chiuso isostatico (nella configurazione a tre aste).
- Schemi isostatici fondamentali a quattro aste ($n = 4$):
 - quadrilatero articolato.

Poiché trattasi di schemi isostatici, il numero dei gradi di vincolo v applicati a ciascuna struttura qui presentata risulta pari al numero dei suoi gradi di libertà l . A sua volta, il numero dei gradi di libertà l del sistema di n aste viene calcolato mediante la relazione $l = 3n$, in quanto ciascuna asta (corpo rigido) possiede, nel piano, tre gradi di libertà (traslazione orizzontale u , diretta parallelamente all'asse x ; traslazione verticale v , diretta parallelamente all'asse y e rotazione φ nel piano x, y in cui giace la struttura bidimensionale); il numero dei gradi di vincolo v è invece dato dalla somma dei gradi di vincolo presenti in ciascun punto dello schema in esame ove siano assegnati dei vincoli (assoluti o relativi).

1.2 Schemi isostatici fondamentali ad unica asta

1.2.1 Asta incastrata

L'*asta incastrata* rappresenta uno schema isostatico fondamentale in quanto il vincolo incastro (vincolo triplo) blocca di per sè tutte le possibilità di movimento del corpo rigido cui esso è applicato ed esclude quindi l'esistenza di un possibile centro di istantanea rotazione assoluto dell'asta stessa. Inoltre, risulta evidentemente $v = l = 3$, coerentemente con la condizione necessaria di isostaticità caratterizzante tutti gli schemi ad unica asta in oggetto.

Analisi cinematica

Si consideri, ad esempio, la struttura di Figura 1.1, composta da un'asta 1 di lunghezza pari a $2b$ ed incastrata nell'estremo A (mentre l'altro estremo B risulta libero). Dalla presenza dell'incastro in A si deduce che:

$$\text{incastro in } A \longrightarrow \nexists \Omega_1 \quad (1.1)$$

Il vincolo incastro quindi, poiché triplo (tre gradi di vincolo presenti in A , $v_A = 3$), esclude l'esistenza di un possibile centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 dell'asta 1 (asta avente potenziali $l = 3$ gradi di libertà), determinando la non labilità della struttura e quindi la sua isodeterminazione cinematica.

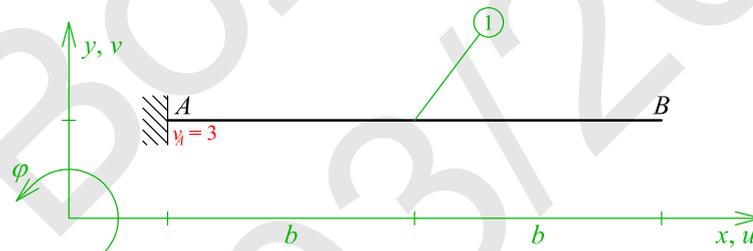


Figura 1.1: Schema fondamentale di asta incastrata.

Nella Figura 1.1 stessa, è altresì indicato, in verde, il sistema di riferimento piano x, y che verrà abitualmente utilizzato nel seguito della trattazione. L'unità b , con dimensioni di una lunghezza, $[b] = [L]$, fissa la dimensione caratteristica della maglia strutturale; u, v indicano, invece, le componenti di spostamento orizzontale e verticale secondo le direzioni x, y del sistema di riferimento precedentemente introdotto, mentre φ individua, infine, la rotazione antioraria (positiva) nel piano x, y .

1.2.2 Asta cerniera-carrello

L'*asta cerniera-carrello* rappresenta uno schema isostatico fondamentale purché i vincoli che la caratterizzano risultino ben posti. Pertanto, si tratta di una schema fondamentale solo potenzialmente *cinematicamente isodeterminato* (in effetti si ha $v = 2 + 1 = 3$, coincidente con $l = 3$). I vincoli risultano efficaci quando il possibile centro di istantanea rotazione dell'asta, determinato dalla presenza della cerniera, non giace sull'asse del carrello, luogo di altrettanti potenziali centri di istantanea rotazione dell'asta stessa. Anticipando le conclusioni proprie della successiva spiegazione, lo schema isostatico può quindi

essere sintetizzato dicendo: *asta cerniera-carrello avente asse del carrello non passante per la cerniera*.

Analisi cinematica

Si consideri, ad esempio, la struttura di Figura 1.2, composta da un'asta 1 di lunghezza pari a $\sqrt{5}b$ ed inclinata di $1/2$ rispetto all'orizzontale, vincolata nell'estremo A mediante una cerniera propria (vincolo doppio) e nell'estremo B mediante un carrello (vincolo semplice) avente asse b (retta passante per la cerniera B ed ortogonale al piano di scorrimento del carrello) inclinato di un angolo α rispetto alla direzione orizzontale x .

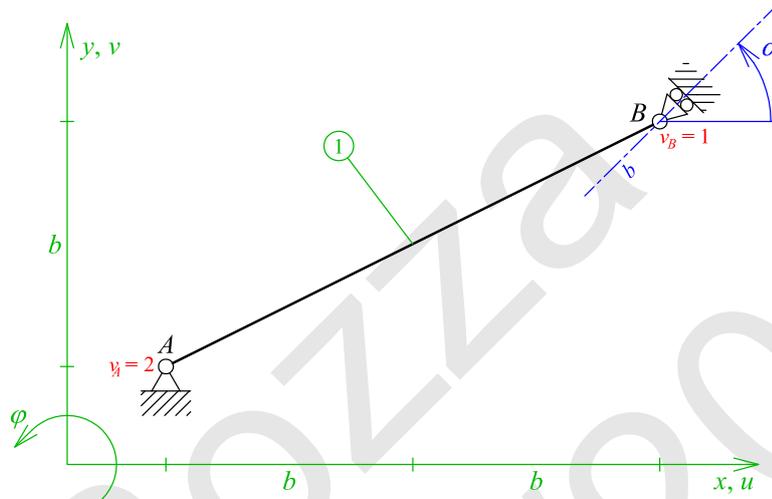


Figura 1.2: Schema fondamentale di asta cerniera-carrello.

Da considerazioni sulle condizioni di vincolo applicate alla struttura, risulta possibile identificare immediatamente la possibile collocazione del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 dell'asta 1:

$$\begin{cases} \text{cerniera (propria) in } A & \longrightarrow \Omega_1 \equiv A \\ \text{carrello in } B & \longrightarrow \Omega_1 \in b \end{cases} \quad (1.2)$$

Tali condizioni sono riportate in rosso, in Figura 1.3, per entrambe le casistiche proposte nella figura stessa. Pertanto:

- Se l'asse b del carrello in B non passa per il potenziale centro di istantanea rotazione dell'asta 1 individuato dalla cerniera in A (ovvero se il punto A non giace sull'asse b), le due condizioni risultano incompatibili ed il centro di istantanea rotazione Ω_1 non esiste; i vincoli risultano quindi ben posti e la struttura cinematicamente isodeterminata. Si tratta del primo dei due casi rappresentati in Figura 1.3, ove l'angolo α di inclinazione dell'asse del carrello stesso assume valori diversi da $\arctan(1/2)$.
- Se l'asse b del carrello in B passa per il potenziale centro di istantanea rotazione dell'asta 1 individuato dalla cerniera in A (ovvero se il punto A giace sull'asse b), le due condizioni risultano compatibili e consentono l'individuazione univoca del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 dell'asta 1, coincidente quindi col punto A medesimo. Nonostante l'eguaglianza fra gradi di vincolo v e gradi di libertà l la struttura risulta quindi cinematicamente indeterminata, con grado di labilità L pari

ad uno ($L = 1$). Si tratta del secondo dei due casi rappresentati in Figura 1.3, ove l'angolo α di inclinazione dell'asse del carrello stesso assume valore esattamente pari ad $\arctan(1/2)$.

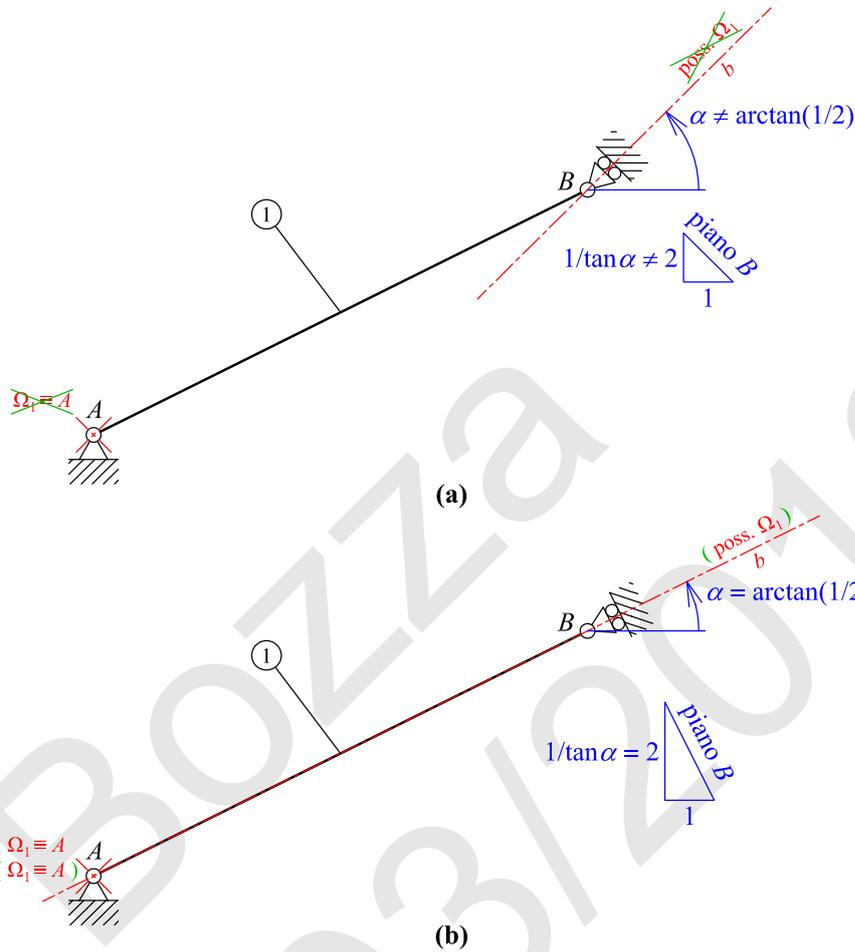


Figura 1.3: Analisi cinematica dello schema fondamentale di asta cerniera-carrello: le conclusioni variano in funzione dell'inclinazione dell'asse del carrello in B.

In conclusione:

$$\underbrace{v = l = 3}_{\text{C.N. di non labilit\`a}} + \begin{cases} \alpha \neq \arctan(1/2) \longrightarrow \text{struttura cinematicamente} \\ \hspace{10em} \text{isodeterminata (non labile),} \\ \alpha = \arctan(1/2) \longrightarrow \text{strutt. cinem. indeterminata} \\ \hspace{10em} \text{(una volta labile, } L = 1\text{).} \end{cases} \quad (1.3)$$

Meccanismo o spostata

Dalla trattazione precedente \u00e8 emerso che, nel caso in cui l'asse b del carrello posto in B risulti passante per il centro di istantanea rotazione individuato dalla cerniera in A , lo schema fondamentale asta cerniera-carrello risulta labile, nonostante il pareggio ottenuto tra gradi di vincolo v e gradi di libert\`a l . In tal caso \u00e8 possibile tracciare il *meccanismo*, ossia la configurazione *spostata* in seguito al compimento di un *atto di moto* consentito dalle condizioni di vincolo ivi applicate. Poich\u00e9 il grado di labilit\`a L \u00e8 pari ad uno, la caratterizzazione di suddetto atto di moto avviene attraverso l'utilizzo di un solo *parametro* (o *coordinata libera*, o *coordinata lagrangiana*, o *grado di libert\`a del sistema*).

Imponendo, come riportato in Figura 1.4, una rotazione (infinitesima) di entità φ all'asta 1 rispetto ad $\Omega_1 \equiv A$, lo spostamento (infinitesimo) del punto B in direzione ortogonale alla congiungente \overline{BA} risulta pari a:

$$s_B = \varphi \overline{AB}, \tag{1.4}$$

ove \overline{AB} indica la distanza tra l'estremo B ed il nodo A , sede del centro di istantanea rotazione Ω_1 . Poiché la distanza \overline{AB} è qui pari alla lunghezza dell'asta, ossia $\sqrt{5}b$, si ottiene:

$$s_B = \sqrt{5}\varphi b = \sqrt{5}\delta, \tag{1.5}$$

ove la quantità δ individua uno spostamento (infinitesimo) di entità pari a φb ; $\delta = \varphi b$ è quindi l'unità con la quale possono essere misurati gli spostamenti lineari del sistema. Si rammenta che, secondo la cinematica di un atto di moto, il suddetto spostamento s_B , poiché infinitesimo, ha direzione perpendicolare alla congiungente i punti B e $A \equiv \Omega_1$. Esso può quindi essere scomposto in una componente orizzontale u_B (di entità pari a $-\delta$) ed una componente verticale v_B (di entità pari a 2δ). L'individuazione di tali componenti risulta inoltre facilitata dal tracciamento delle mappe degli spostamenti orizzontale e verticale, come rappresentato ancora in Figura 1.4.

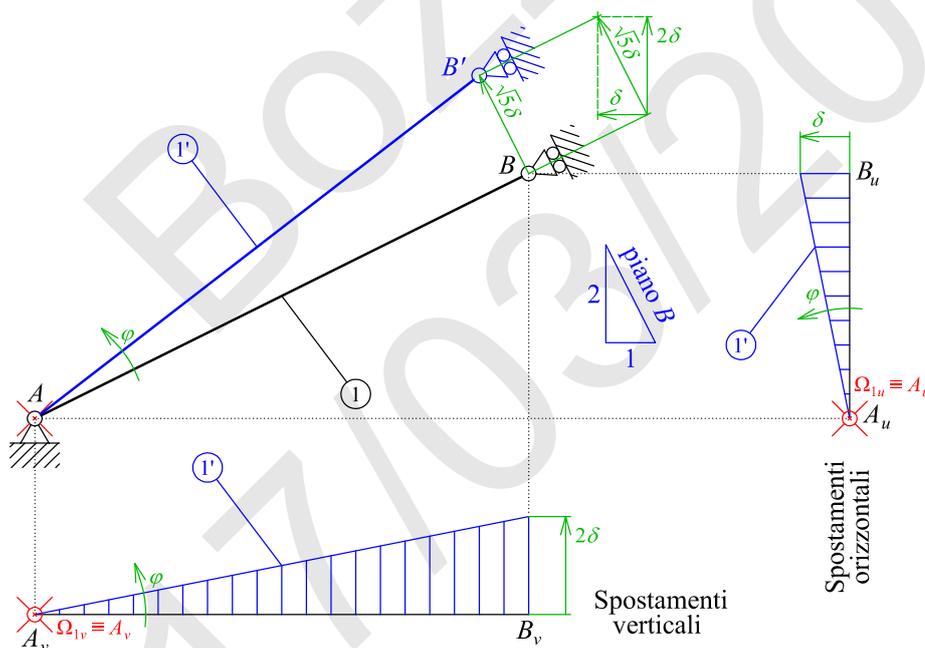


Figura 1.4: Configurazione spostata, completa delle mappe degli spostamenti orizzontali e verticali, di schema di asta cerniera-carrello con vincoli mal posti (una volta labile).

Tali mappe si ottengono proiettando dapprima la struttura, con tutti i suoi centri di istantanea rotazione, su fondamentali orizzontale e verticale e dando, coerentemente con la spostata reale, cioè mediante la stessa rotazione, la spostata delle proiezioni così ottenute. I punti A_u, B_u, Ω_{1u} e A_v, B_v, Ω_{1v} rappresentano quindi, rispettivamente, le proiezioni orizzontale (su fondamentale verticale) e verticale (su fondamentale orizzontale) dei punti A, B, Ω_1 . Le componenti di spostamento di B sopra determinate possono essere rilette agevolmente nelle mappe così preparate, in corrispondenza dei punti B_u e B_v .

Altre configurazioni simili

Nella trattazione precedente si è dettagliatamente illustrato uno schema fondamentale di *asta cerniera-carrello*; cioè, in senso stretto, uno schema realizzato vincolando l'asta con una cerniera propria ed un carrello avente asse contenente sia punti propri che il punto improprio nella direzione dell'asse stesso (col termine *proprio*, secondo i concetti di geometria proiettiva, si indica un punto posto al finito, mentre col termine *improprio* si indica un punto posto all'infinito). In realtà qualunque altra configurazione che preveda un'asta fissa a terra (o connessa ad una restante parte di struttura ritenuta fissa) mediante un vincolo doppio (cerniera, pattino o manicotto) ed un vincolo semplice (carrello o bipattino) può essere ricondotta alla medesima tipologia di schema.

In Figura 1.5 sono proposte tre differenti varianti, aventi tutte i vincoli ben posti, quindi non labili. Da questi esempi si evince come la verifica di non labilità risulti sempre basata, a prescindere dalla tipologia di vincolo adottata, sull'incompatibilità geometrica fra il potenziale centro di istantanea rotazione Ω_1 individuato dal vincolo doppio in A ed il luogo di possibile collocazione del centro di istantanea rotazione Ω_1 individuato dal vincolo semplice in B . In particolare, si noti che nel caso (b) il bipattino in B ha come asse la retta impropria $\mathcal{U} = 0$, luogo dei punti impropri del piano; pertanto la cerniera propria in A , posta al finito, non appartiene a tale asse, determinando conseguentemente l'effettiva non labilità dello schema in esame.

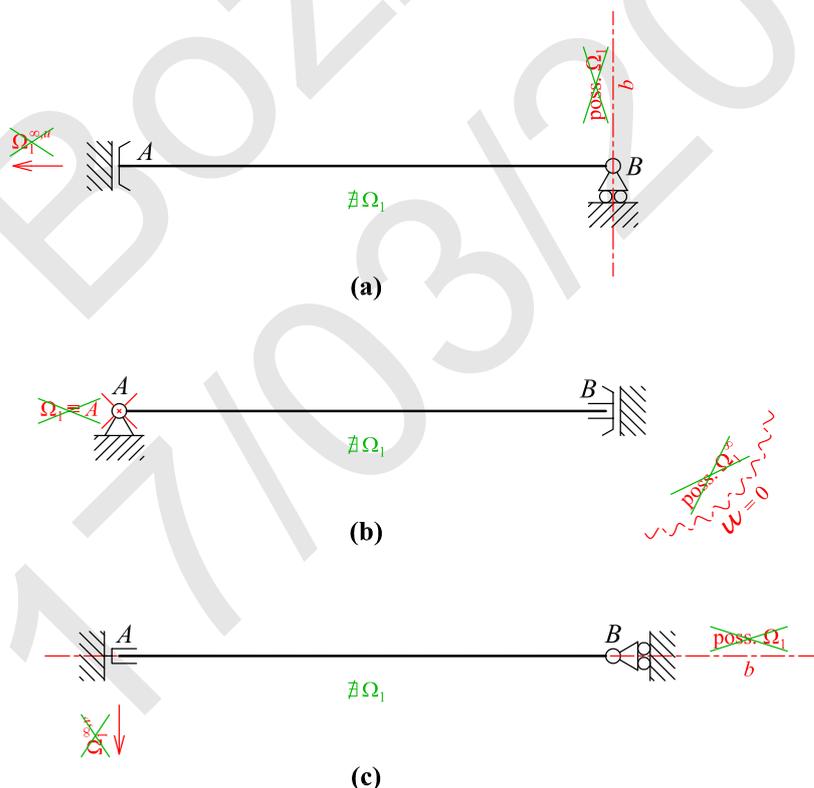


Figura 1.5: Configurazioni alternative non labili, riconducibili allo stesso schema isostatico fondamentale di asta cerniera-carrello.

L'indipendenza dello schema fondamentale dalla specifica tipologia di vincolo adottata per la sua realizzazione, purché sia mantenuta la presenza dei gradi di vincolo riferibili allo schema stesso, è estendibile a tutti gli altri schemi fondamentali presentati nel prosieguo

della trattazione. Ovviamente, la collocazione dei possibili centri di istantanea rotazione, assoluti Ω_i e relativi Ω_{ij} delle varie aste, è influenzata dalla tipologia di vincolo adottata in ogni caso specifico. L'analisi di labilità è invece ricondotta allo stesso tratto fondamentale.

1.2.3 Asta a tre carrelli

L'asta a tre carrelli, analogamente all'asta cerniera-carrello, rappresenta uno schema isostatico fondamentale purché i vincoli risultino ben posti. Pertanto si tratta di uno schema fondamentale solo potenzialmente *cinematicamente isodeterminato*, con parità tra gradi di vincolo ($v = 1 + 1 + 1 = 3$) e gradi di libertà ($l = 3$). Lo schema risulta non labile, quindi isostatico, quando gli assi dei tre carrelli non convergono in un unico punto: questa è la condizione che implica la non esistenza del centro di istantanea rotazione assoluto dell'asta. Si parla quindi di schema di *asta a tre carrelli avente assi dei carrelli non convergenti in un unico punto*.

Analisi cinematica

Si consideri, ad esempio, la struttura di Figura 1.6, composta da un'asta 1 di lunghezza pari a $\sqrt{5}b$, vincolata negli estremi A, B e nel punto medio C mediante tre carrelli aventi piani di scorrimento e relativi assi variamente inclinati.

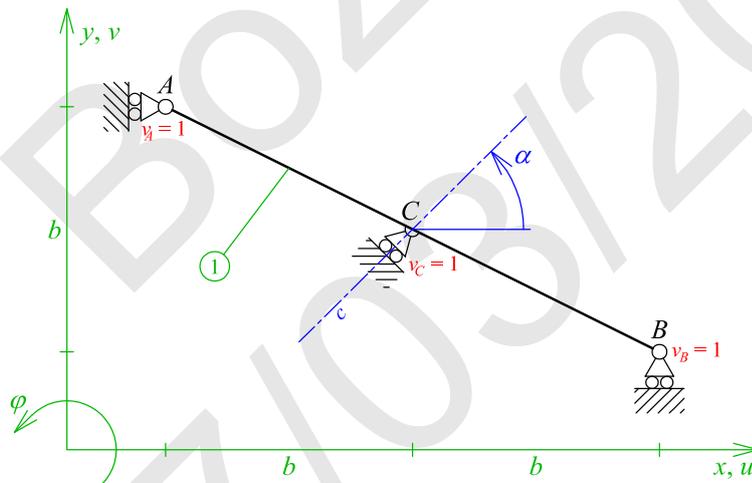


Figura 1.6: Schema fondamentale di asta a tre carrelli.

Ciascun carrello individua, mediante il suo asse, un luogo geometrico di possibile collocazione del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 dell'asta 1, secondo quanto riportato in Figura 1.7:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{carrello in } A \longrightarrow \Omega_1 \in a \\ \text{carrello in } B \longrightarrow \Omega_1 \in b \\ \text{carrello in } C \longrightarrow \Omega_1 \in c \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Pertanto:

- Se gli assi a, b e c dei tre carrelli non convergono in un unico punto, il centro di istantanea rotazione Ω_1 non esiste; i vincoli risultano quindi ben posti e la struttura cinematicamente isodeterminata.

- Se gli assi a , b e c dei tre carrelli convergono in un solo punto, quest'ultimo individua il centro di istantanea rotazione Ω_1 effettivo dell'asta; nonostante il pareggio fra gradi di vincolo v e gradi di libertà l la struttura risulta quindi cinematicamente indeterminata, con grado di labilità pari ad uno ($L = 1$).

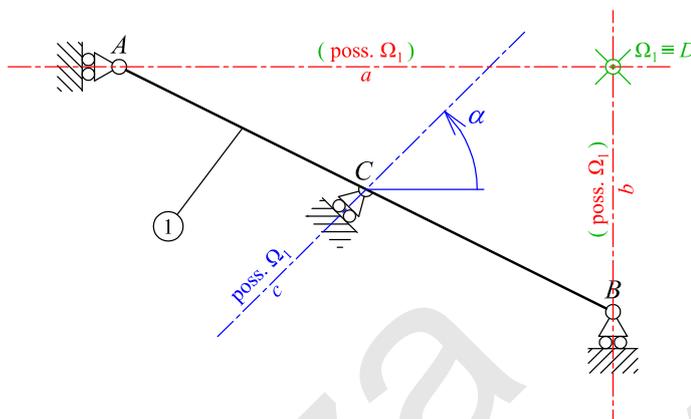


Figura 1.7: Possibile ricostruzione dell'analisi cinematica relativa allo schema fondamentale asta a tre carrelli; lo schema può essere ricondotto al precedente di asta cerniera-carrello.

Un possibile approccio risolutivo dell'analisi cinematica, illustrato in Figura 1.7, consiste nel considerare in primo luogo una coppia di carrelli, ad esempio quelli posti negli estremi A e B , i cui assi a e b sono rappresentati in rosso. Il punto di intersezione di tali assi, collocato in D e raffigurato in verde, individua il potenziale centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 dell'asta 1. Ci si è quindi ricondotti al caso asta cerniera-carrello trattato precedentemente: se l'asse c del carrello posto in C passa per il punto D appena ricostruito, cioè se gli assi dei tre carrelli convergono tutti nell'unico punto D , la struttura è labile (ciò accade per $\alpha = \arctan(1/2)$); viceversa, essa rappresenta uno schema isostatico fondamentale dai vincoli ben posti ($\alpha \neq \arctan(1/2)$).

1.2.4 Asta a tre bielle

Definizione di biella

Si definisce *biella* un'asta vincolata a terra o ad altre parti di struttura, mediante due cerniere. Tali cerniere possono essere assolute o relative, proprie o improprie (pattino o manicotto). La retta congiungente i centri di istantanea rotazione, assoluti o relativi, da esse offerti si dice *asse della biella*.

Ai fini dell'analisi cinematica, una biella può essere sostituita da un carrello cinematicamente equivalente, assoluto o relativo, avente asse coincidente con l'asse della biella stessa. Suddetto asse rappresenta quindi il luogo geometrico di collocazione del potenziale centro di istantanea rotazione (assoluto o relativo, a seconda che la biella rappresenti verso la restante parte di struttura un collegamento assoluto o relativo) delle parti di struttura collegate dalla biella stessa.

Biella a terra. In Figura 1.8 si presenta il caso di una biella vincolata a terra e caratterizzata da due cerniere proprie di estremità; tale biella è costituita dall'asta curva 1, adottata per collegare a terra l'asta 2, a sua volta eventualmente appartenente ad una

struttura più complessa (e qui non rappresentata, perché superflua ai fini della presente trattazione).

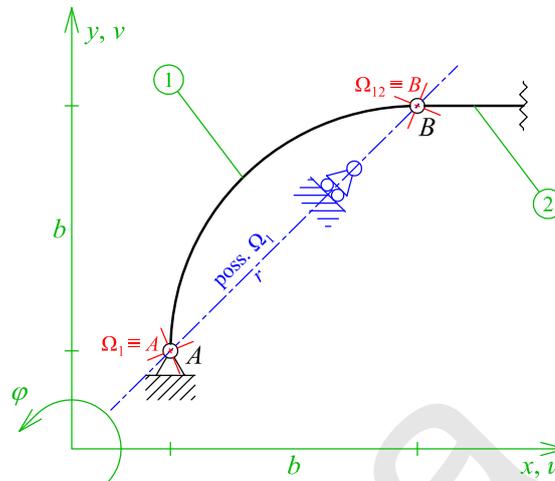


Figura 1.8: *Equivalenza cinematica della biella assoluta 1, adottata per collegare a terra l'asta 2 di una struttura più complessa.*

Grazie alla cerniera a terra in A , si individua il potenziale centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 della biella 1; mediante la cerniera relativa in B si individua, invece, il potenziale centro di istantanea rotazione Ω_{12} relativo tra la biella 1 e l'asta 2. Congiungendo i due centri di istantanea rotazione appena determinati, si ottiene una retta r , rappresentata in blu, che caratterizza l'asse della biella o del carrello cinematicamente equivalente ad essa. Tale asse rappresenta il luogo dei potenziali centri di istantanea rotazione assoluti Ω_2 dell'asta 2, per effetto del collegamento indiretto a terra fornito dalla biella 1. Pertanto, il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_2 dell'asta 2, se esiste, deve giacere sulla retta r stessa.

Biella relativa. In Figura 1.9 si raccolgono quattro esempi in cui risulta nuovamente applicabile la definizione di biella: in ciascuno di essi la biella è costituita dall'asta curva 1, adottata per collegare tra loro le aste 2 e 3, eventualmente appartenenti ad una struttura più complessa.

Analogamente a quanto fatto nel caso della biella incernierata a terra, si procede, in tutti e quattro i casi, all'individuazione, in rosso, dei centri di istantanea rotazione relativi Ω_{12} ed Ω_{13} immediatamente noti:

- Nel primo caso (a), poiché si è in presenza di due cerniere proprie, entrambi i centri di istantanea rotazione si collocano al finito, nei nodi A e B sede delle cerniere stesse.
- Nel secondo (b) e nel terzo caso (c), poiché una delle due cerniere è impropria, uno dei due centri di istantanea rotazione si colloca all'infinito, mentre l'altro coincide con la cerniera propria; nel secondo caso si ha $\Omega_{13}^{\infty, u}$ per effetto del manicotto in B e nel terzo caso si ha $\Omega_{12}^{\infty, v}$ per effetto del pattino in A .
- Nel quarto caso (d), poiché entrambe le cerniere sono improprie, ambedue i centri di istantanea rotazione si collocano all'infinito.

Congiungendo, in ciascun caso, i due centri di istantanea rotazione appena determinati, si ottiene una retta r , rappresentata in verde, coincidente con l'asse della biella o del carrello relativo ad essa cinematicamente equivalente. Pertanto, il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{23} , se esiste, deve giacere sulla retta r stessa. In particolare, nel caso (d), l'asse della biella coincide con la retta impropria (solitamente indicata con $\mathcal{U}=0$ e luogo lineare dei punti all'infinito).

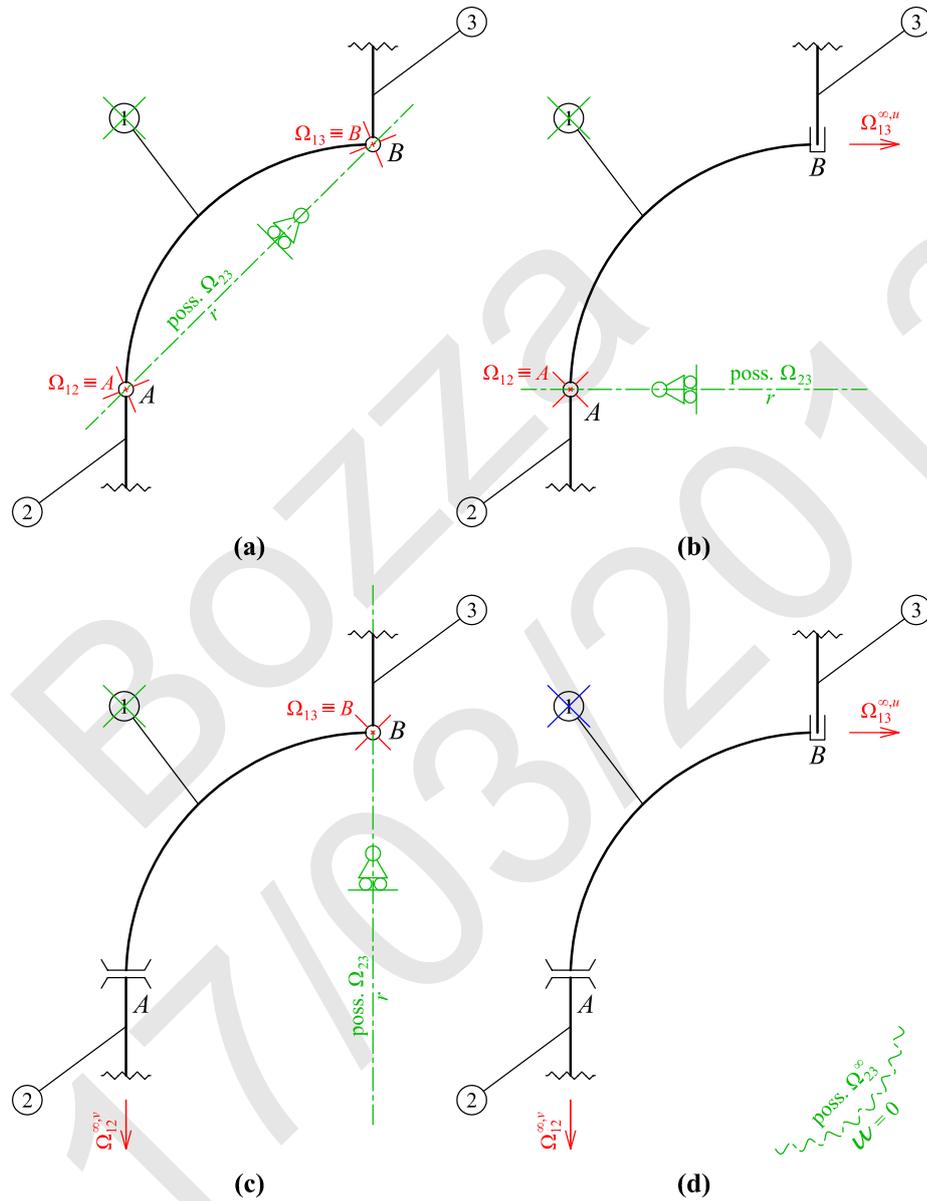


Figura 1.9: Esempi di biella relativa, asta 1 di collegamento tra le aste 2 e 3 di una struttura più complessa.

Asta a tre bielle.

Facendo riferimento alla definizione di biella appena data, risultano immediatamente riconducibili allo schema fondamentale asta a tre carrelli anche strutture più complesse, di fatto già appartenenti ai sistemi articolati di corpi rigidi, nelle quali, in sostituzione di

uno o più dei carrelli previsti, siano collocate delle bielle. Vista l'equivalenza cinematica tra biella e carrello, si intuisce che la condizione di non labilità sia la stessa, vale a dire che gli assi delle bielle o dei carrelli presenti non convergano in un unico punto. Pertanto, sebbene tali schemi articolati presentino, in effetti, un numero di aste n maggiore di uno (e fino ad un massimo di quattro), sono comunque catalogati, nella presente trattazione, come appartenenti alla categoria di schemi fondamentali caratterizzati da un'unica asta. Un esempio tipico di tale fattispecie è quello dell'*asta a tre bielle* (schema formato da quattro aste), in cui tutti e tre i carrelli sono sostituiti da altrettante bielle, aventi assi che, a loro volta, possono essere interpretabili come assi di carrello.

Per sottolineare la stretta parentela fra uno schema fondamentale di questo tipo e quello dell'asta a tre carrelli si propone, in Figura 1.10, un esempio di asta a tre bielle, cinematicamente equivalente all'asta a tre carrelli già presentata in Figura 1.6 (e poi analizzata in Figura 1.7). Anche in questo caso si considera, in primo luogo, la coppia di carrelli cinematicamente equivalenti alle bielle 2 e 3, pervenendo alla ricostruzione, *in verde*, del potenziale centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 collocato in G . Si verifica poi che l'asse c del carrello cinematicamente equivalente alla biella 4, rappresentato in *blu*, non passi per il punto G appena ricostruito.

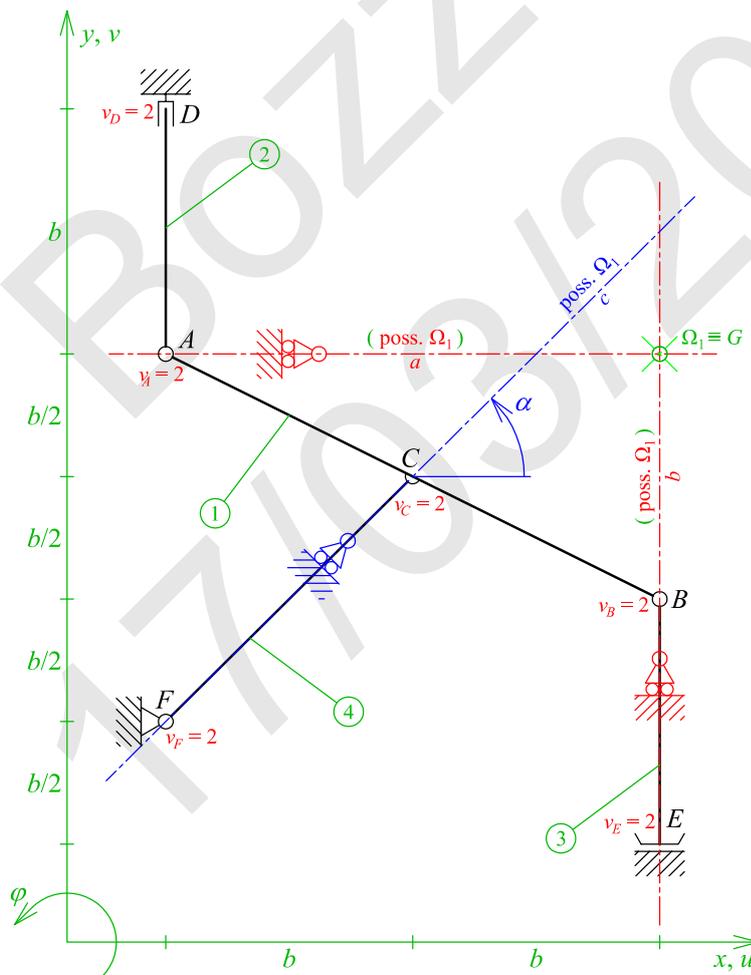


Figura 1.10: Schema fondamentale di asta a tre bielle.

Evidentemente, altre varianti sono possibili, in base al numero di carrelli o di bielle presenti, riconducendosi in ogni caso allo schema madre di asta a tre carrelli.

1.3 Schemi isostatici fondamentali a due aste

1.3.1 Arco a tre cerniere

L'*arco a tre cerniere* è costituito da due aste (bielle), collegate separatamente a terra e mutuamente mediante vincoli doppi (cerniere proprie od improprie). Esso rappresenta uno schema isostatico fondamentale, purché i vincoli doppi adottati per la sua realizzazione risultino ben posti. Pertanto si tratta anche qui di uno schema fondamentale solo potenzialmente *cinematicamente isodeterminato*, grazie al pareggio tra gradi di vincolo ($v = 2 + 2 + 2 = 6$) e gradi di libertà ($l = 3 \cdot 2 = 6$). Lo schema risulta non labile quando i tre centri di istantanea rotazione del sistema articolato (due assoluti ed uno relativo) non risultano allineati. Si parlerà pertanto di schema di *arco a tre cerniere non allineate*.

Analisi cinematica

Si consideri, ad esempio, la struttura di Figura 1.11, composta da un'asta 1 di lunghezza pari a $2b$ (collocata orizzontalmente ed incernierata a terra in A) ed un'asta 2 di lunghezza pari a b (collocata verticalmente ed incernierata a terra in B); le due aste sono poi mutuamente collegate mediante una cerniera relativa interna collocata in C . In questo caso tutte e tre le cerniere dell'arco sono proprie e distinte (i casi in cui alcune delle cerniere risultano coincidenti si dicono *degeneri* e verranno trattati in seguito).

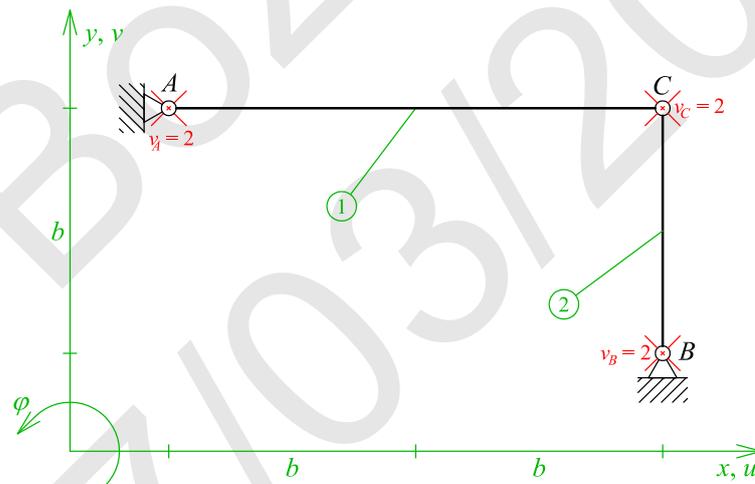


Figura 1.11: Schema fondamentale di arco a tre cerniere.

Dall'analisi delle condizioni di vincolo applicate alla struttura, risulta possibile identificare immediatamente la collocazione dei potenziali centri di istantanea rotazione assoluti Ω_1 ed Ω_2 , nonché del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} :

$$\begin{cases} \text{cerniera in } A & \longrightarrow \Omega_1 \equiv A \\ \text{cerniera in } B & \longrightarrow \Omega_2 \equiv B \\ \text{cerniera in } C & \longrightarrow \Omega_{12} \equiv C \end{cases} \quad (1.7)$$

Tali condizioni sono rappresentate in rosso in Figura 1.12.

Si osserva anche che ad entrambe le aste dell'arco è applicabile la definizione di *biella* data al Paragrafo 1.2.4. Focalizzando l'attenzione, per esempio, sull'asta 2, risulta possibile sostituire questa biella con un carrello assoluto avente asse coincidente con l'asse

della biella stessa, cioè con la retta r passante per il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_2 (collocato in B) ed il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} (collocato in C). Poiché la biella considerata funge da collegamento fra l'asta 1 e la terra, anche il carrello sostitutivo, rappresentato in verde in Figura 1.12, svolge la stessa funzione di vincolo assoluto per l'asta 1 e offre ad essa un luogo di potenziali centri di istantanea rotazione Ω_1 .

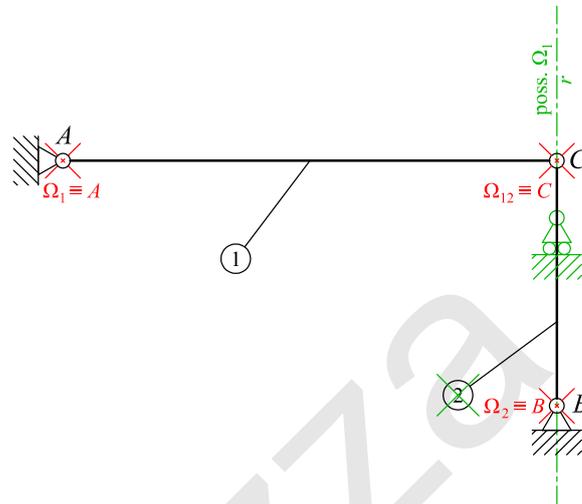


Figura 1.12: Possibile ricostruzione dell'analisi cinematica di schema fondamentale di arco a tre cerniere.

Ci si è pertanto ricondotti allo schema fondamentale di asta cerniera-carrello già precedentemente esposto. Da quanto illustrato al Paragrafo 1.2.2, tale schema risulta avere i vincoli ben posti quando l'asse r del carrello non passa per A , sede del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 . Ricordando che l'asse r del carrello corrisponde, a sua volta, alla retta congiungente i centri di istantanea rotazione Ω_2 ed Ω_{12} , il suddetto requisito conduce alla condizione di non allineamento dei tre potenziali centri di istantanea rotazione Ω_1 , Ω_2 ed Ω_{12} . Pertanto:

- Se i centri di istantanea rotazione Ω_1 , Ω_2 ed Ω_{12} individuati dalle tre cerniere non sono allineati, i vincoli risultano ben posti e la struttura cinematicamente isodeterminata.
- Se i centri di istantanea rotazione Ω_1 , Ω_2 ed Ω_{12} individuati dalle tre cerniere sono allineati, i vincoli risultano mal posti (schema labile); nonostante l'eguaglianza fra gradi di vincolo v e gradi di libertà l la struttura è cinematicamente indeterminata, con grado di labilità L pari ad uno ($L = 1$).

Un esempio di arco a tre cerniere allineate è riportato sotto, completo della rappresentazione della relativa spostata.

Meccanismo o spostata

Dalla trattazione precedente è emerso che, nel caso in cui i centri di istantanea rotazione individuati dalle tre cerniere dell'arco risultino allineati, la struttura risulta labile. In tal caso è possibile tracciarne il *meccanismo*, ossia la configurazione *spostata* in seguito al compimento di un *atto di moto* compatibile con i vincoli applicati. Inoltre, poiché il grado

di labilità L è pari ad uno ($L = 1$), la caratterizzazione del suddetto atto di moto avviene attraverso l'utilizzo di una sola *coordinata libera* o *grado di libertà*. Data la struttura di Figura 1.13, che illustra un esempio di arco a tre cerniere con vincoli mal posti (tre cerniere allineate lungo la retta orizzontale passante per A , B e C), si procede al tracciamento della spostata del sistema.

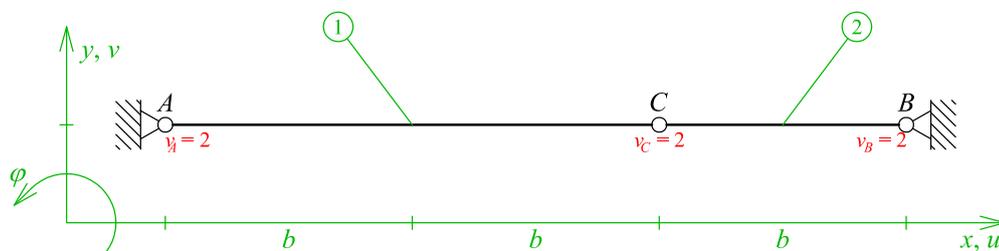


Figura 1.13: Arco a tre cerniere labile con vincoli mal posti (cerniere allineate).

Nell'ambito del collasso delle strutture a telaio tale meccanismo, rappresentato in Figura 1.14, può venire a formarsi in situazioni limite e viene generalmente definito *meccanismo di trave*, in quanto esso implica il collasso parziale della sola trave (e non necessariamente dell'intero telaio). Si adotta, come coordinata libera, la rotazione φ_1 dell'asta 1, imponendovi una rotazione infinitesima arbitraria di entità $\varphi_1 = \varphi$ e verso antiorario.

Asta 1. Poiché la rotazione dell'asta 1 è imposta a priori, rispetto al suo centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 (coincidente col perno della cerniera in A), risulta immediato il calcolo dello spostamento s_C dell'estremo C :

$$s_C = \varphi_1 \overline{CA} = \varphi \overline{CA}, \quad (1.8)$$

ove \overline{CA} è la distanza del punto C da $\Omega_1 \equiv A$. Poiché tale distanza è pari a $2b$:

$$s_C = \varphi \overline{CA} = 2\varphi b = 2\delta, \quad (1.9)$$

ove $\delta = \varphi b$. Si noti che, secondo la definizione di atto di moto, lo spostamento s_C risulta perpendicolare alla congiungente \overline{CA} del punto C col centro di istantanea rotazione $\Omega_1 \equiv A$ ed ha pertanto direzione verticale ($s_C = v_C = 2\delta$).

Asta 2. La rotazione dell'asta 2, rispetto al centro di istantanea rotazione assoluto Ω_2 collocato in B , è calcolata imponendo la coerenza degli spostamenti (verticali) del nodo C , essendo quest'ultimo sede del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} ; pertanto:

$$s_C = v_C = -\varphi_2 \overline{CB} \quad \rightarrow \quad \varphi_2 = -\frac{s_C}{\overline{CB}} = -\frac{2\varphi b}{b} = -2\varphi, \quad (1.10)$$

ove il segno negativo indica una rotazione oraria di entità pari al doppio di quella imposta all'asta 1.

Rotazione relativa. La rotazione relativa φ_{21} che si produce tra l'asta 2 e l'asta 1 può essere calcolata, per differenza, tra le due rotazioni assolute φ_2 e φ_1 :

$$\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = -3\varphi. \quad (1.11)$$

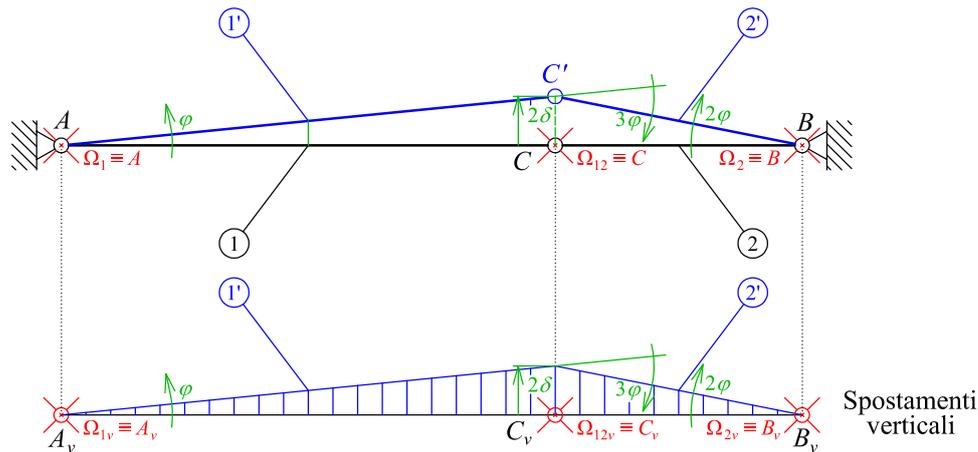


Figura 1.14: Arco a tre cerniere labile con vincoli mal posti (cerniere allineate): meccanismo o spostata. Si noti che in questo caso la mappa degli spostamenti verticali coincide con la spostata stessa, mentre risultano nulli gli spostamenti orizzontali.

In alternativa, è possibile determinare la rotazione relativa φ_{21} imponendo spostamento nullo del nodo B , a partire dallo spostamento determinato in C da φ_1 , coerentemente con le condizioni di vincolo ivi presenti. In tal caso si interpreta l'atto di moto dell'asta 2 come sovrapposizione dell'atto di moto assoluto del sistema 1+2 (con vincolo in C congelato) e dell'atto di moto relativo dell'asta 2 rispetto all'asta 1:

$$s_B = v_B = \varphi_1 \overline{BA} + \varphi_{21} \overline{BC} = 0, \quad (1.12)$$

dalla quale:

$$\varphi_{21} = -\varphi_1 \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = -\varphi \frac{3b}{b} = -3\varphi. \quad (1.13)$$

Casi degeneri

Sino ad ora si è trattato il caso classico dell'arco a tre cerniere avente tre cerniere distinte, che rispettano, o meno, la condizione di non allineamento. Nel primo caso i vincoli risultano ben posti e la struttura rappresenta effettivamente uno schema isostatico fondamentale; nel secondo caso, invece, i vincoli risultano mal posti e diviene possibile tracciarne il meccanismo (o la spostata).

Possono però manifestarsi anche casi degeneri, caratterizzati dalla coincidenza di due o tre dei centri di istantanea rotazione dell'arco (cioè di alcune delle cerniere o, meglio, dei centri di istantanea rotazione ad esse dovuti). Si affrontano di seguito separatamente tali casi, vagliando le tre possibili combinazioni che possono manifestarsi; si anticipa che la condizione di allineamento dei centri di istantanea rotazione, risulta qui automaticamente verificata, quindi gli schemi degeneri risultano sempre labili. Da questo punto di vista, gli schemi degeneri non costituiscono un caso a sè stante, bensì un caso particolare del precedente e la condizione di allineamento, automaticamente verificata negli schemi degeneri, resta, in generale, la condizione di labilità dello schema di arco a tre cerniere.

Centri di istantanea rotazione assoluti coincidenti. Quando, come nell'esempio di Figura 1.15, i centri di istantanea rotazione assoluti Ω_1 ed Ω_2 delle due aste dell'arco a tre cerniere risultano coincidenti, in un punto diverso da quello del centro di istantanea

rotazione relativo Ω_{12} ($\Omega_1 \equiv \Omega_2 \neq \Omega_{12}$), si conclude che l'insieme delle due aste forma un unico corpo rigido R . Infatti, poiché $\Omega_1 \equiv \Omega_2$, tale punto è anche il potenziale centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} . Essendo questo per ipotesi distinto dal rimanente Ω_{12} , si conclude che $\nexists \Omega_{12}$, quindi non sono possibili moti relativi tra l'asta 1 e l'asta 2. L'arco risulta quindi assimilabile ad un unico corpo rigido R , avente grado di labilità L pari ad uno ($L = 1$) e centro di istantanea rotazione assoluto Ω_R coincidente con i due precedenti. In Figura 1.15, oltre all'individuazione (in rosso) dei centri di istantanea rotazione secondo le indicazioni precedenti, si propone (in blu) una possibile configurazione spostata, che prevede la traslazione orizzontale, verso destra, dell'intera struttura (1 + 2) di una quantità δ . Si noti che i centri di istantanea rotazione risultano comunque allineati sulla retta verticale passante per C (due punti distinti sono allineati sulla retta passante per essi) e ciò segnala la labilità del sistema.

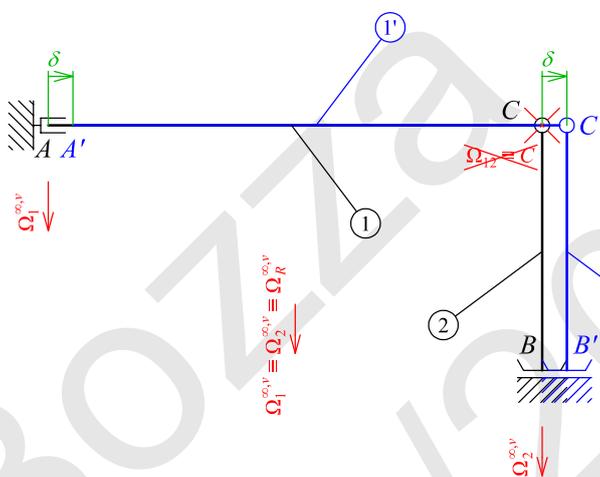


Figura 1.15: Arco a tre cerniere degenera (labile) con centri di istantanea rotazione assoluti coincidenti.

Un centro di istantanea rotazione assoluto coincidente con quello relativo.

Quando, come nell'esempio di Figura 1.16, un centro di istantanea rotazione assoluto di una delle due aste dell'arco a tre cerniere coincide con il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} , ma non con l'altro centro di istantanea rotazione assoluto (ad esempio $\Omega_1 \neq \Omega_{12} \equiv \Omega_2$), si conclude che la struttura risulta labile (con grado di labilità $L = 1$) e solo in una sua parte. Infatti, poiché $\Omega_{12} \equiv \Omega_2$, tale punto è anche il potenziale centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 . Essendo quest'ultimo distinto dall' Ω_1 assegnato, significa che $\nexists \Omega_1$. L'asta 1 può quindi essere considerata fissa a terra, mentre l'asta 2 possiede un grado di labilità residuo, col quale si caratterizza l'atto di moto. Il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} è quindi degenerato in un centro assoluto Ω_2 , coincidente con quello inizialmente noto. In Figura 1.16, oltre all'individuazione (in rosso) dei centri di istantanea rotazione secondo le indicazioni precedenti, si propone (in blu) una possibile configurazione spostata, che prevede la traslazione orizzontale, verso destra, della sola asta 2 di una quantità δ . Anche in questo caso la condizione di allineamento dei centri di istantanea rotazione è verificata, in quanto due punti distinti sono sempre allineati.

Tutti e tre i centri coincidenti. Quando, come nell'esempio di Figura 1.17, tutti e tre i centri di istantanea rotazione, due assoluti ed uno relativo, coincidono in un unico

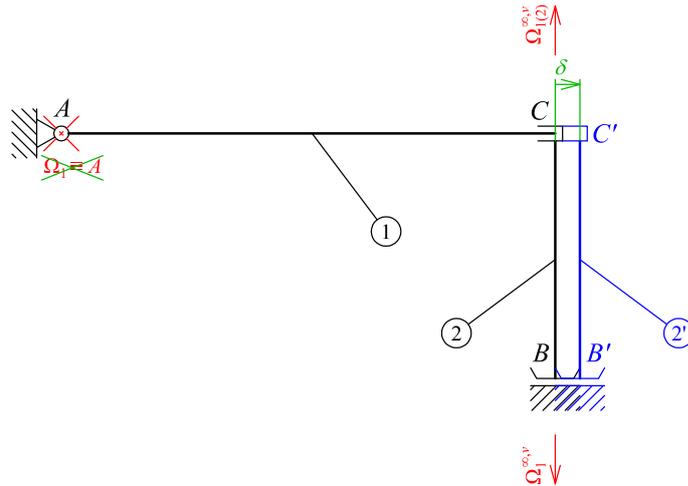


Figura 1.16: Arco a tre cerniere degenera (labile) con coincidenza di un centro di istantanea rotazione assoluto con quello relativo.

punto ($\Omega_1 \equiv \Omega_2 \equiv \Omega_{12}$), la struttura risulta labile, con due gradi di labilità ($L = 2$). In altre parole, le due aste che formano l'arco a tre cerniere godono di due possibilità di movimento vicendevolmente indipendenti. In Figura 1.17 si propone, in *blu*, una possibile configurazione spostata: essa prevede la traslazione orizzontale dell'asta 1 di una quantità infinitesima pari, ad esempio, a 2δ e dell'asta 2 di una quantità infinitesima pari a δ . Si noti che tre punti coincidenti possono essere considerati allineati sul fascio di rette passanti per tale punto; quindi, anche in tale istanza labile, si può dire che i centri di istantanea rotazione risultano allineati. In questo esempio specifico, il fascio di rette è costituito dall'insieme delle rette verticali tutte passanti per il punto improprio in direzione verticale.

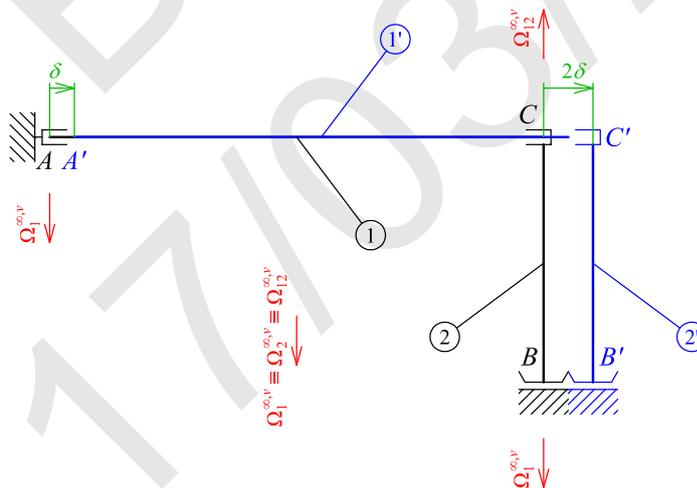


Figura 1.17: Arco a tre cerniere degenera (labile) con coincidenza di tutti e tre i centri di istantanea rotazione. Viene rappresentata una delle possibili spostate ($L = 2$).

Conclusione. Si noti come ogni condizione degenera di coincidenza dei centri di istantanea rotazione porti automaticamente ad introdurre un grado di labilità L nel computo complessivo. Con due centri di istantanea rotazione coincidenti, quindi, l'arco risulta una volta labile ($L = 1$); con tutti e tre i centri di istantanea rotazione coincidenti l'arco

risulta, invece, due volte labile ($L = 2$). Nel primo caso il moto relativo fra le due aste componenti l'arco stesso risulta soppresso o possibile, con corrispondente moto assoluto di un'asta possibile o soppresso; nel secondo caso i tre moti, due assoluti ed uno relativo, sono contemporaneamente possibili ed indipendenti.

1.3.2 Anello chiuso isostatico (a due aste)

L'*anello chiuso isostatico*, quando presente nella tipologia a due aste, è formato da una coppia di aste, mutuamente collegate mediante un carrello (vincolo semplice, svincolo doppio) ed una cerniera (vincolo doppio, svincolo semplice), che giocano il ruolo di vincoli o svincoli *interni* in modo da costituire, appunto, un anello chiuso internamente isodeterminato. I tre gradi di svincolo provvisti internamente ad una maglia chiusa formata da un'unica asta, che si richiude su sé stessa con un incastro mutuo, sono concepiti per eliminare l'indeterminazione statica ivi presente; una maglia chiusa senza svincoli interni costituisce, infatti, un unico corpo rigido con tre gradi di vincolo interni sovrabbondanti di natura iperstatica, celati in ogni incastro mutuo che può essere concepito per risaldare l'asta su sé stessa. Suddetto anello è poi vincolato a terra mediante ulteriori tre gradi di vincolo (vincoli *a terra*), atti a garantire l'isostaticità dell'intera struttura. Si tratta di una schema fondamentale solo potenzialmente *cinematicamente isodeterminato*; ciò avviene quando sia i vincoli interni che quelli a terra risultano ben posti.

Analisi cinematica

Si consideri, ad esempio, l'anello chiuso isostatico di Figura 1.18. In esso l'asta 1 e l'asta 2 sono mutuamente collegate mediante una cerniera in C ed un carrello in D (vincoli interni); l'insieme siffatto, che costituisce un anello chiuso, è poi, a sua volta, vincolato a terra mediante la cerniera in A , posizionata sull'asta 1, ed il carrello in B , posizionato sull'asta 2 (vincoli a terra). Si descrivono i due passi d'analisi sequenziali necessari all'interpretazione dell'analisi cinematica.

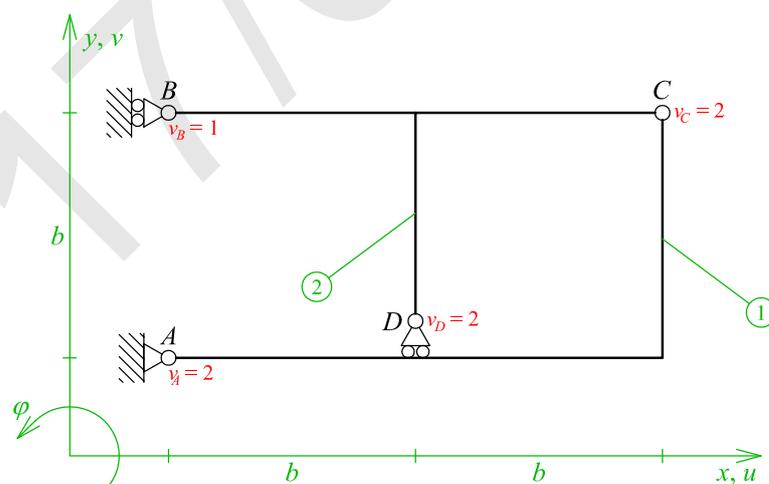


Figura 1.18: Schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a due aste, con schema interno cerniera-carrello).

Vincoli interni. Individuato l'anello chiuso formato dalle aste 1 e 2, si consideri momentaneamente l'asta 1 come fissa e terra. L'asta 2 ad essa collegata viene quindi ricondotta allo schema fondamentale di asta cerniera-carrello già trattato nel Paragrafo 1.2.2. Le condizioni di vincolo, riportate in rosso in Figura 1.19, sono quindi assimilabili a quelle già introdotte nell'Eq. (1.2):

$$\begin{cases} \text{cerniera relativa in } C & \longrightarrow \Omega_{12} \equiv C \\ \text{carrello relativo in } D & \longrightarrow \Omega_{12} \in d \end{cases} \quad (1.14)$$

I vincoli interni risultano quindi ben posti (in quanto a prevenire i moti relativi tra le aste 1 e 2) se l'asse d del carrello posizionato in D , luogo geometrico di possibile collocazione del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} , non passa per il nodo C , sede dell'ulteriore centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} . In tal caso, infatti, l'insieme delle aste 1 e 2 forma un unico corpo rigido R , internamente isodeterminato, individuato in verde in Figura 1.19. Si parla quindi di *anello chiuso isostatico con schema interno cerniera-carrello*.

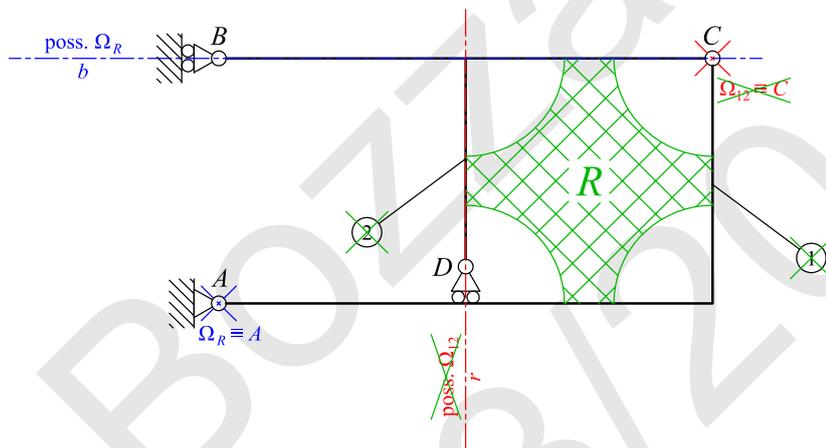


Figura 1.19: Analisi cinematica dello schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a due aste, con schema interno cerniera-carrello).

Vincoli a terra. Appurato, al passo precedente, che i vincoli interni consentono di equiparare l'anello chiuso formato dalle aste 1 e 2 ad un unico corpo rigido R internamente isodeterminato, resta da verificare che i vincoli a terra, atti a fissare a terra tale corpo rigido, siano ben posti. La trattazione di questa fase dipende dalla modalità di vincolo adottata per il suddetto fissaggio, secondo quanto già detto in precedenza per i sistemi ad unica asta; poiché, nello specifico, il corpo R è vincolato a terra mediante la cerniera in A ed il carrello in B , ci si riconduce nuovamente allo schema fondamentale asta cerniera-carrello già trattato nel Paragrafo 1.2.2. Le condizioni di vincolo, riportate in blu in Figura 1.19, sono quindi assimilabili a quelle già introdotte nell'Eq. (1.2):

$$\begin{cases} \text{cerniera assoluta in } A & \longrightarrow \Omega_R \equiv \Omega_1 \equiv A \\ \text{carrello assoluto in } B & \longrightarrow \Omega_R \equiv \Omega_2 \in b \end{cases} \quad (1.15)$$

I vincoli a terra risultano quindi ben posti se l'asse b del carrello in B , luogo geometrico di possibile collocazione del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_R , non passa per il nodo A , sede dell'ulteriore centro assoluto Ω_R . In tal caso, infatti, $\nexists \Omega_R$ ed il sistema è fisso.

Considerazioni

Dall'analisi cinematica svolta si evince che, mentre il primo passo è sempre riconducibile allo schema fondamentale di asta cerniera-carrello, trattato nel Paragrafo 1.2.2 ed avente come obiettivo l'individuazione di un corpo rigido R , il secondo può essere basato su di uno qualunque degli schemi fondamentali ad una sola asta già presentati nella Sezione 1.2 e verte sulla modalità di fissaggio a terra del corpo rigido R stesso. In Figura 1.20 si propongono quindi due varianti, che differiscono dal caso precedente solamente per le modalità di fissaggio a terra del corpo R .

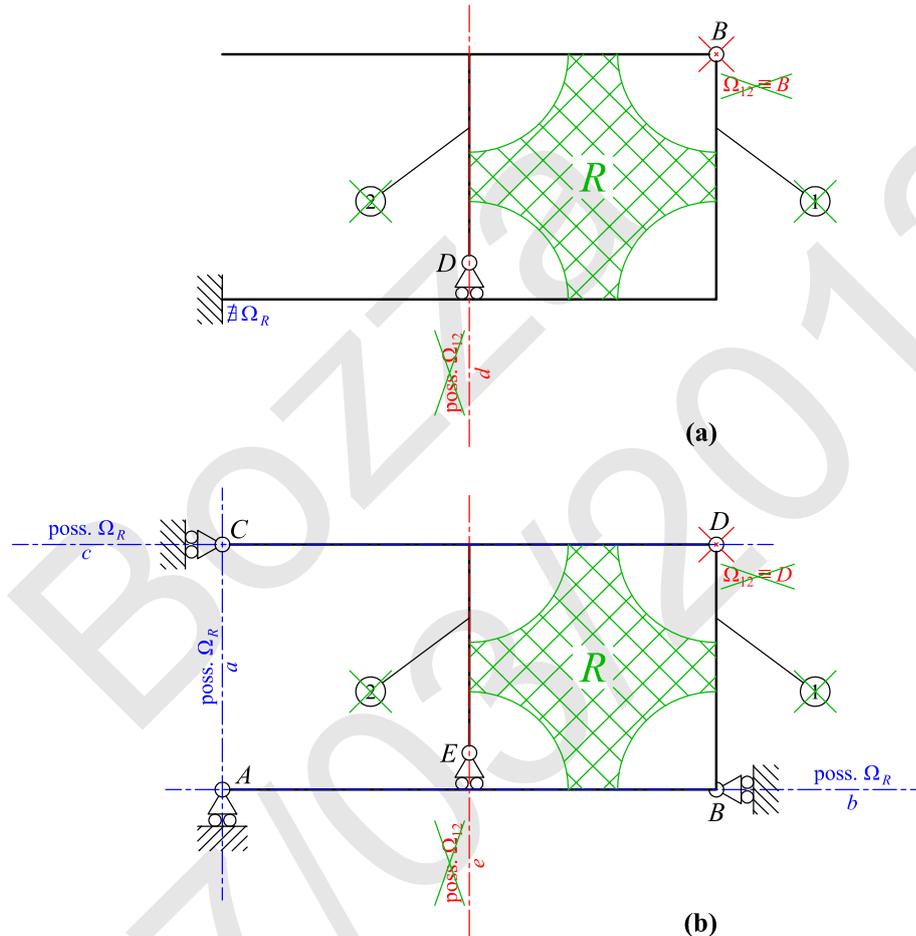


Figura 1.20: Varianti dello schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a due aste, con schema interno cerniera-carrello).

Inoltre, la ricostruzione cinematica adottata in questi esempi, ove si riconosce dapprima la non labilità interna all'anello, è la più generale possibile. Questa può, come nel caso di Figura 1.18, corrispondere all'unica sequenza di montaggio realmente realizzabile. Quando i vincoli a terra sono applicati ad una sola delle due aste componenti l'anello, diciamo la 1 come nell'esempio (a) di Figura 1.20, l'analisi cinematica può prescindere dalla primaria individuazione dell'anello stesso e basarsi, invece, su di una sequenza di montaggio alternativa, che considera l'asta 2 come sovra-montata su di un'asta 1 già di per sé fissa a terra. Tale approccio è, ad esempio, applicabile al primo dei due casi riportati in Figura 1.20, in quanto l'incastro assoluto in A tiene direttamente fissa a terra l'asta 1. Pertanto, i vincoli relativi tra la 2 e la 1 possono essere ritenuti assoluti e, poiché l'asse del

carrello in C risulta non passante per la cerniera in B , anche l'asta 2 può essere ritenuta fissa. Si noti anche che lo schema (b) in Figura 1.18 è immediatamente riconducibile a quello proposto in Figura 1.20, in quanto l'effetto cinematico dei carrelli in A ed in B è del tutto equivalente a quello di una cerniera in A .

1.4 Schemi isostatici fondamentali a tre aste

1.4.1 Anello chiuso isostatico (a tre aste)

L'*anello chiuso isostatico*, quando presente nella tipologia a tre aste, è formato da una tripletta di aste, mutuamente collegate mediante tre cerniere interne (vincoli *interni doppi*) allo scopo di costituire, appunto, un anello chiuso internamente isodeterminato. Tale anello è poi vincolato a terra mediante ulteriori tre gradi di vincolo (vincoli *a terra*) atti a garantire, come discusso in precedenza, l'isostaticità dell'intera struttura. Si tratta di una schema fondamentale solo potenzialmente *cinematicamente isodeterminato*; ciò avviene quando tutti i vincoli, sia interni che a terra, risultano ben posti. Affinché i vincoli interni risultino ben posti è necessario che le tre cerniere interne siano non allineate; in tal caso l'anello chiuso formato dalle tre aste è equivalente ad un unico corpo rigido internamente isodeterminato, in quanto moti relativi tra le aste non risultano possibili.

Analisi cinematica

Si consideri, ad esempio, l'anello chiuso isostatico di Figura 1.21. In esso l'asta 1, l'asta 2 e l'asta 3 sono mutuamente collegate mediante le cerniere collocate in C , D ed E (vincoli interni). L'insieme siffatto, che costituisce un anello chiuso, è poi, a sua volta, vincolato a terra mediante la cerniera in A , posizionata sull'asta 1, ed il carrello in B , posizionato sull'asta 2 (vincoli a terra). Si descrivono separatamente i due passi d'analisi sequenziali necessari all'analisi cinematica.

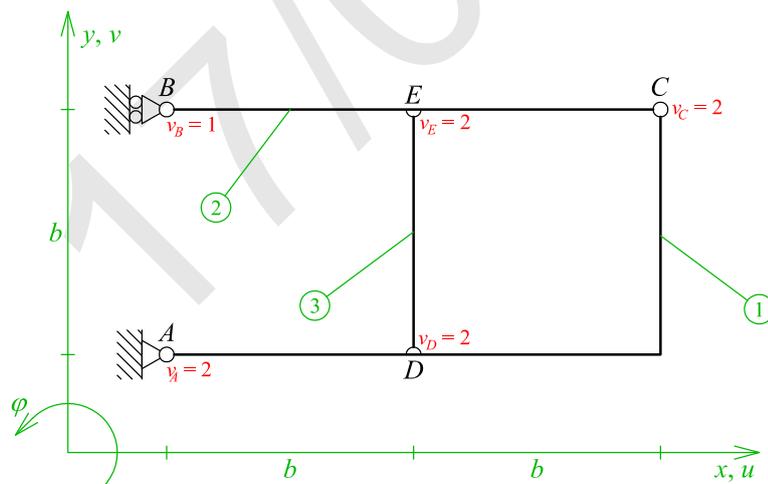


Figura 1.21: Schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a tre aste, con tre cerniere interne non allineate).

Vincoli interni. Individuato l'anello chiuso formato dalle aste 1, 2 e 3, si consideri momentaneamente una di queste come fissa a terra, ad esempio l'asta 1. Sotto quest'ipotesi, le due aste rimanenti, ossia la 2 e la 3, formano un arco a tre cerniere sovrasmontato sull'asta 1 precedentemente considerata fissa. Le condizioni di vincolo interne, riportate in rosso in Figura 1.22, sono quindi assimilabili a quelle già introdotte nell'Eq. (1.7), con riferimento allo schema fondamentale di arco a tre cerniere trattato nel Paragrafo 1.3.1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cerniera in } A \longrightarrow \Omega_{12} \equiv C \\ \text{cerniera in } B \longrightarrow \Omega_{13} \equiv D \\ \text{cerniera in } C \longrightarrow \Omega_{23} \equiv E \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Nel caso in esame, a differenza di quello base dell'arco a tre cerniere, tutti e tre i centri di istantanea rotazione individuati sono relativi; ricordando che l'asta 1 è stata inizialmente ipotizzata come fissa a terra, i centri relativi Ω_{12} ed Ω_{13} corrispondono ai centri assoluti Ω_2 ed Ω_3 , conducendo alla piena analogia tra le due trattazioni. I vincoli interni risultano quindi ben posti se i centri di istantanea rotazione relativi individuati dalle tre cerniere interne non risultano allineati. In tal caso, infatti, l'insieme delle aste 1, 2 e 3 forma un unico corpo rigido R internamente isodeterminato, individuato in verde in Figura 1.22.

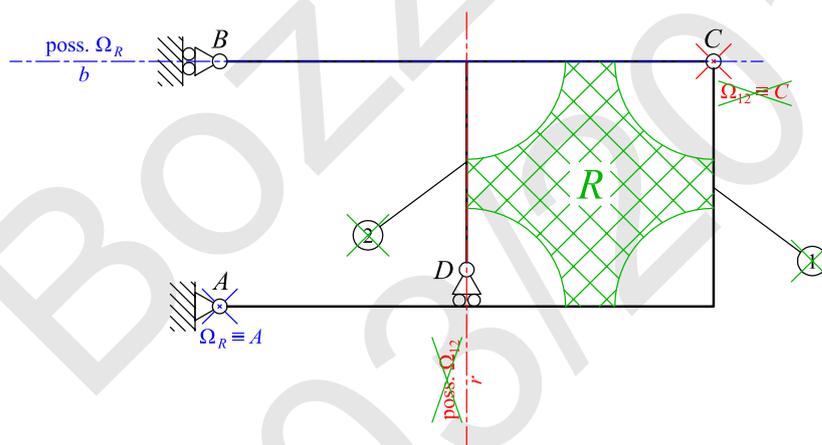


Figura 1.22: Analisi cinematica dello schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a tre aste, con tre cerniere interne non allineate).

Vincoli a terra. Appurato, al passo precedente, che i vincoli interni consentono di equiparare l'anello chiuso formato dalle aste 1, 2 e 3 ad un unico corpo rigido R , resta da verificare che i vincoli a terra, atti a fissare tale corpo, risultino ben posti. Come già discusso, la trattazione di questa fase dipende dai vincoli adottati per il suddetto fissaggio. Poiché, nello specifico, le condizioni di vincolo adottate sono le medesime dell'anello chiuso isostatico a due aste trattato nel Paragrafo 1.3.2, si rimanda a tale approccio risolutivo.

Considerazioni

L'analisi cinematica svolta ricalca quella descritta nel Paragrafo 1.3.2 con riferimento all'anello chiuso isostatico, quando configurato con due aste. Rispetto a tale ambito si modifica però il primo passo, che è affrontato con riferimento allo schema fondamentale di arco a tre cerniere, anziché di asta cerniera-carrello. Possiamo quindi parlare di *anello*

chiuso isostatico avente tre cerniere interne non allineate. Si noti che è necessario riconoscere in primis tale anello chiuso nella presente sequenza di montaggio, per poi considerare la sua collocazione a terra.

1.5 Schemi fondamentali a quattro aste

1.5.1 Quadrilatero articolato

Il *quadrilatero articolato* è formato da due aste incernierate a terra, mutuamente collegate da una coppia di bielle. Si sottolinea come tale definizione individui una struttura formata da quattro aste, a differenza di quanto generalmente avviene nell'ambito dei *Meccanismi*, ove la medesima definizione è applicata ad uno schema labile ad un *grado di libertà*, in cui le aste sono solo tre (due incernierate a terra, alle quali si aggiunge una biella di collegamento mutuo) mentre la quarta è rappresentata dalla *terra o telaio*.

Nell'ambito della *Scienza delle Costruzioni* la definizione di quadrilatero articolato fa quindi riferimento, come rappresentato in Figura 1.23 (a), ad una struttura potenzialmente isostatica, in cui vi è cioè pareggio tra i gradi di libertà $l = 3 \cdot 4 = 12$ posseduti dalle quattro aste componenti lo schema in esame ed i gradi di vincolo $v = 6 \cdot 2 = 12$ garantiti dalle sei cerniere (due assolute e quattro relative) ad essa applicate. Nell'ambito dei *Meccanismi* ci si trova invece di fronte, come rappresentato in Figura 1.23 (b), ad una struttura certamente labile (con un grado di labilità, $L = 1$), in cui i gradi di libertà $l = 3 \cdot 3 = 9$ posseduti dalle tre aste componenti lo schema superano i gradi di vincolo $v = 4 \cdot 2 = 8$ garantiti dalle quattro cerniere (due assolute e due relative) ad esso applicate.

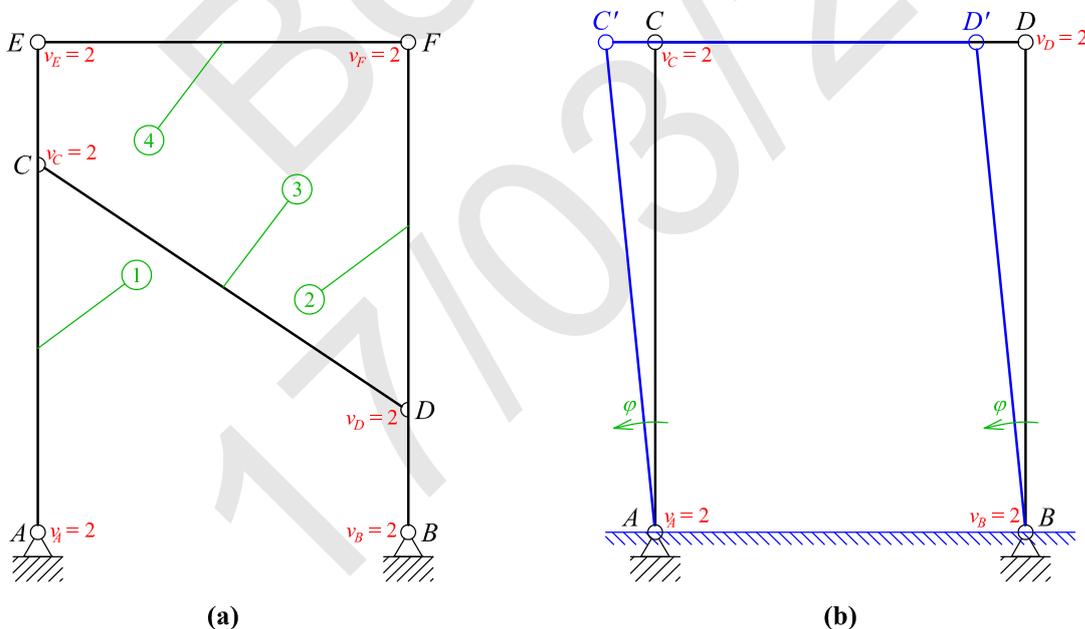


Figura 1.23: Rappresentazione di un quadrilatero articolato secondo la definizione adottata nell'ambito di (a) *Scienza delle Costruzioni* e (b) *Meccanismi*.

Nell'ambito dei meccanismi di collasso delle strutture a telaio inoltre, il meccanismo rappresentato in Figura 1.23 (b) si definisce *meccanismo di parete* e conduce, a differenza del meccanismo di trave discusso precedentemente con riferimento alla Figura 1.14, al collasso dell'intera struttura.

Tornando allo schema fondamentale proprio della *Scienza delle Costruzioni*, nel quale solitamente si richiede la non labilità della struttura, il quadrilatero articolato è riconducibile, ai fini dell'analisi cinematica, all'arco a tre cerniere già precedentemente affrontato. Pertanto si tratta, anche in questo caso, di uno schema solo potenzialmente *cinematicamente isodeterminato*, la cui non labilità è subordinata alla verifica della specifica configurazione di vincolo adottata per la sua realizzazione. In altre parole, lo schema di quadrilatero articolato risulta cinematicamente isodeterminato qualora sia riconducibile ad uno schema di arco a tre cerniere non allineate.

Analisi cinematica

Si consideri, ad esempio, la struttura di Figura 1.24, formata dalle aste 1 e 2, incerniate a terra rispettivamente in A ed in B , e dalle bielle 3 e 4, atte a collegare mutuamente le aste 1 e 2, rispettivamente nei nodi C e D e nei nodi E ed F .

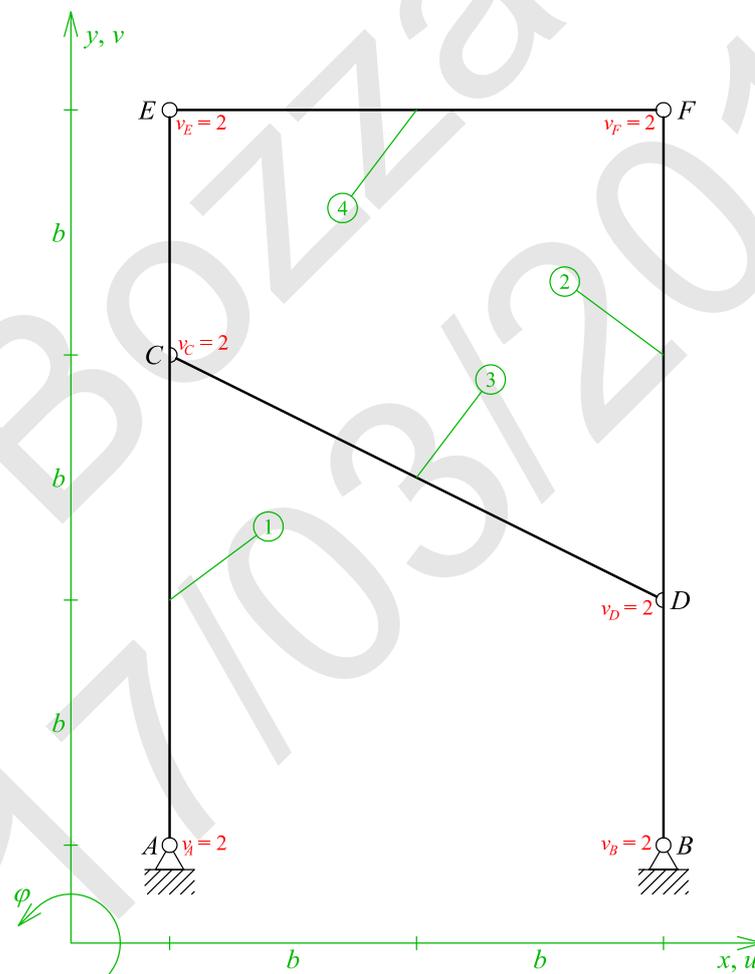


Figura 1.24: Schema fondamentale di quadrilatero articolato.

Centri di istantanea rotazione: considerazioni iniziali. Dall'analisi delle condizioni di vincolo applicate alla struttura, si individuano in primis i centri di istantanea rotazione immediatamente noti; si tratta dei centri di istantanea rotazione assoluti Ω_1 ed Ω_2

delle due aste incernierate a terra e dei centri di istantanea rotazione relativi Ω_{13} , Ω_{14} , Ω_{23} ed Ω_{24} , individuabili fra le due aste a terra suddette e le bielle di mutuo collegamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cerniera assoluta in } A \longrightarrow \Omega_1 \equiv A \\ \text{cerniera assoluta in } B \longrightarrow \Omega_2 \equiv B \\ \text{cerniera relativa in } C \longrightarrow \Omega_{13} \equiv C \\ \text{cerniera relativa in } D \longrightarrow \Omega_{23} \equiv D \\ \text{cerniera relativa in } E \longrightarrow \Omega_{14} \equiv E \\ \text{cerniera relativa in } F \longrightarrow \Omega_{24} \equiv F \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Tali condizioni sono rappresentate in rosso in Figura 1.25.

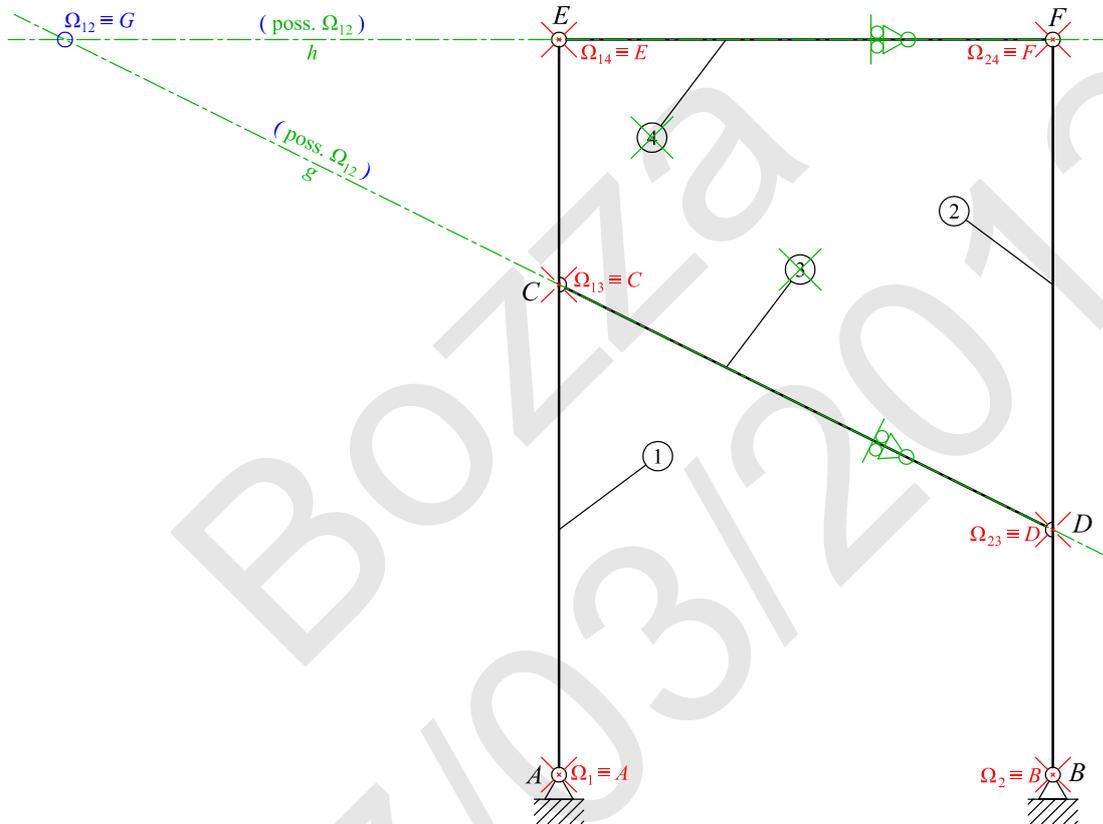


Figura 1.25: Analisi cinematica dello schema fondamentale di quadrilatero articolato.

Bielle di collegamento: rimozione. Le aste 3 e 4, poiché rappresentano delle bielle di collegamento mutuo fra le aste 1 e 2 (incernierate a terra), possono essere sostituite, ai fini dell'analisi cinematica, con dei carrelli cinematicamente equivalenti, aventi assi coincidenti con gli assi delle bielle stesse, cioè con le rette passanti per i centri di istantanea rotazione relativi individuati dalle rispettive cerniere di estremità. Pertanto, l'asta 3 viene sostituita da un carrello avente asse passante per i nodi C e D (sedi rispettivamente dei centri di istantanea rotazione relativi Ω_{13} ed Ω_{23}). L'asse così ottenuto rappresenta potenziali centri di istantanea rotazione relativi Ω_{12} tra le due aste mutuamente collegate dalla biella 3. Similmente, l'asta 4 può essere sostituita da un carrello avente asse passante per i nodi E ed F (sedi dei centri di istantanea rotazione relativi Ω_{14} ed Ω_{24}). L'asse tracciato rappresenta altresì potenziali centri di istantanea rotazione relativi Ω_{12} , effetto cinematico

della biella 4 di mutuo collegamento. Entrambi i carrelli così ottenuti sono rappresentati in verde in Figura 1.25.

Arco a tre cerniere. Gli assi g ed h dei carrelli introdotti in sostituzione delle bielle 3 e 4 rappresentano quindi i luoghi geometrici di possibile collocazione del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} . Infatti, le suddette bielle fungono da collegamento mutuo fra le aste 1 e 2 della struttura considerata. Il punto di intersezione G di tali assi, rappresentato in blu in Figura 1.25, determina quindi il potenziale centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} . Ci si è quindi ricondotti allo schema fondamentale di arco a tre cerniere non allineate: le due cerniere assolute sono rappresentate dai nodi A e B , mentre quella interna relativa è stata ottenuta in G . Ricostruito il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} , affinché i vincoli risultino ben posti è necessario, da quanto descritto nel Paragrafo 1.3.1 per l'arco a tre cerniere, che i tre centri di istantanea rotazione non risultino allineati. Ciò avviene nel caso in esame: infatti, considerando per esempio la retta che allinea A e B , essa risulta non passante per G . Quindi tale quadrilatero articolato può essere definito non labile e, pertanto, isodeterminato.

Conclusione. In conclusione, lo schema di quadrilatero articolato risulta isodeterminato in presenza di *quadrilatero articolato riconducibile ad arco a tre cerniere non allineate*.

BOZZA
17/03/2012

Capitolo 2

Approccio geometrico

In questo capitolo viene presentato un esempio di analisi cinematica svolta mediante approccio geometrico ed inerente uno schema elementare in cui la posizione di un vincolo a terra dipende da una coordinata libera arbitrariamente scelta (i risultati ottenuti sono quindi, in generale, funzione del valore da essa assunto). Tale approccio, di validità generale è, come si desume dall'introduzione all'analisi cinematica svolta nel Capitolo 1, basato sulla ricostruzione di tutti i centri di istantanea rotazione (assoluti e relativi), al fine di determinare se questi soddisfino o meno le condizioni di allineamento fornite dai cosiddetti primo e secondo teorema sulle catene cinematiche; la trattazione di seguito adottata descrive quindi, attraverso una presentazione ricca di illustrazioni e brevi commenti, i passi generalmente da compiere per la sua applicazione. L'adozione di uno schema elementare, cioè di una struttura riconducibile ad una sovrapposizione degli schemi fondamentali illustrati nel Capitolo 1, permette di adottare una strategia di analisi alternativa e complementare, basata sulla ricostruzione di un'opportuna sequenza di montaggio di tali schemi non labili. È invece lasciata al lettore la facoltà di cimentarsi autonomamente nell'applicazione dell'approccio analitico, cui verrà invece dedicato il successivo Capitolo 3.

Testo dell'esercizio proposto

Sia assegnata la struttura in Figura 2.1:

- svolgere l'analisi cinematica, ricercando l'eventuale labilità del sistema, in funzione della coordinata z (rappresentata in blu ed atta ad individuare la posizione verticale, rispetto al nodo F , della cerniera assoluta posta in H);
- tracciare l'eventuale meccanismo (od i meccanismi) della struttura, rappresentando anche le mappe degli spostamenti orizzontali e verticali.

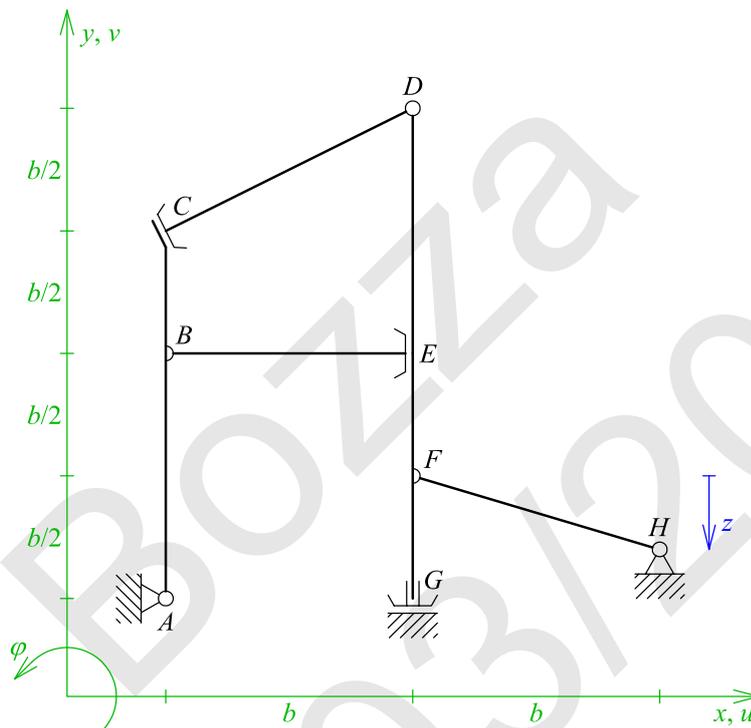


Figura 2.1: Struttura assegnata, della quale si vuole indagare l'eventuale labilità in funzione della coordinata libera z .

2.1 Analisi cinematica

Come introdotto nel precedente Capitolo 1, l'analisi cinematica è svolta in due fasi successive, al fine primario di individuare la non labilità del sistema assegnato:

1. computo dei gradi di vincolo v e dei gradi di libertà l , affinché risulti verificata la condizione necessaria di non labilità: $v \geq l$;
2. studio della configurazione dei vincoli applicati alla struttura, al fine di dedurre se i vincoli stessi risultano ben posti o efficaci, cioè tali da impedire la labilità.

Le si affronta separatamente, adottando, per lo studio della configurazione dei vincoli, l'approccio geometrico (sebbene preceduto dall'individuazione di un'opportuna sequenza di montaggio degli schemi fondamentali isostatici già noti).

2.1.1 Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà

Gradi di vincolo

Il numero totale dei gradi di vincolo v , è ottenuto mediante la somma dei gradi di vincolo v_I presenti in corrispondenza del nodo I -esimo della struttura assegnata, ove siano dislocati vincoli (assoluti o relativi) applicati su n_I aste in esso convergenti:

$$\begin{aligned}
 v &= \underbrace{v_A + v_G + v_H}_{\text{vincoli assoluti}} + \underbrace{v_B + v_C + v_D + v_E + v_F}_{\text{vincoli relativi}} \\
 &= 2n_A + (2n_G - 1) + 2n_H + 2(n_B - 1) + 2(n_C - 1) \\
 &\quad + 2(n_D - 1) + 2(n_E - 1) + 2(n_F - 1) \\
 &= 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 15,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si tratta, in effetti, di cinque vincoli doppi mutui (o relativi) collocati nei nodi B , C , D , E ed F , di due vincoli doppi assoluti collocati in A ed H e di un vincolo semplice assoluto collocato in G , per un totale di 15 gradi di vincolo come rappresentato in Figura 2.2.

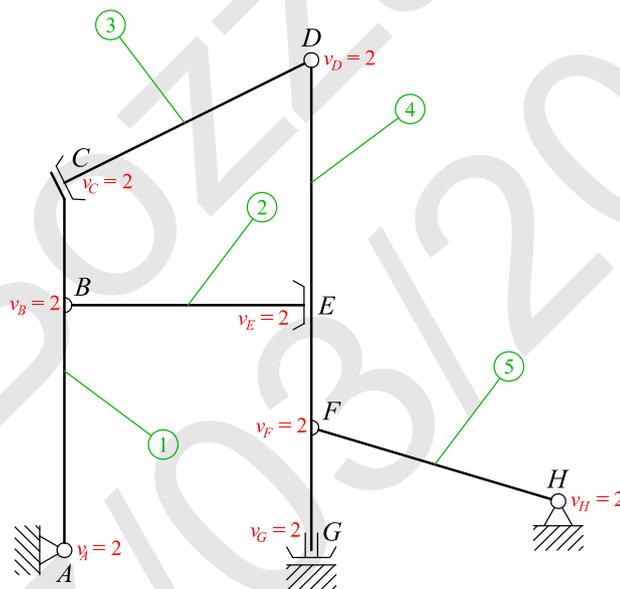


Figura 2.2: Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà della struttura assegnata.

Gradi di libertà

Ciascuna delle n aste (corpi rigidi) componenti la struttura possiede, nel piano, tre gradi di libertà. La struttura assegnata è caratterizzata da cinque aste (convenzionalmente numerate, in verde, secondo la Figura 2.2) e quindi, in totale, da un numero di gradi di libertà l pari a:

$$l = 3n = 15. \tag{2.2}$$

Conclusione

Poiché il numero dei gradi di vincolo v , Eq. (2.1), eguaglia il numero dei gradi di libertà l , Eq. (2.2), la condizione necessaria di non labilità $v \geq l$ è rispettata. Non solo, poiché

risulta $v = l$, la struttura si candida ad essere *cinematicamente isodeterminata*, in quanto vi è pareggio tra gradi di vincolo e gradi di libertà. Peraltro, ciò non è sufficiente ai fini della non labilità ed occorre ora indagare se i vincoli risultano ben posti (sistema non labile, quindi isodeterminato).

2.1.2 Ricostruzione di una sequenza di montaggio

Passi dell'analisi

Biella 5. L'asta 5, poiché vincolata dalla coppia di cerniere proprie F (mutua con l'asta 4) ed H (assoluta), costituisce una *biella*. Ai fini dell'analisi cinematica, essa può essere sostituita da un carrello equivalente avente asse i coincidente con l'asse della biella stessa, vale a dire la retta passante per due i centri di istantanea rotazione forniti dalle due cerniere, F ed H , precedentemente citate. In questo caso si osserva un centro di istantanea rotazione relativo Ω_{45} collocato in F tra l'asta 4 e l'asta 5 ed un centro di istantanea rotazione assoluto Ω_5 posto in H .

Tale asse i rappresenta, in questo caso, il luogo geometrico di possibile collocazione del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4 dell'asta 4 (vincolata a terra tramite la biella di collegamento 5):

$$\text{Biella 5} \longrightarrow \Omega_4 \in i, \quad (2.3)$$

con retta i avente inclinazione $\alpha = \arctan(-z/b)$, secondo la rappresentazione in rosso in Figura 2.3.

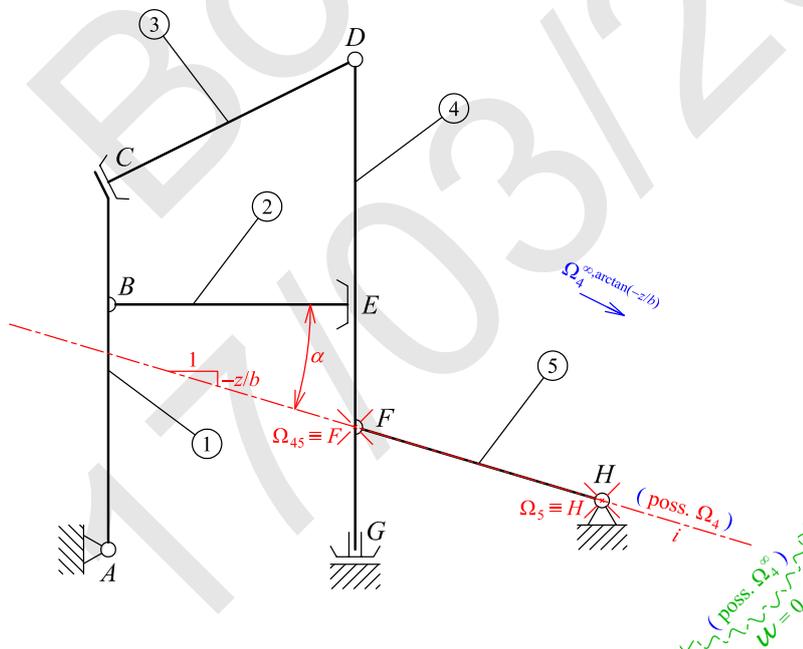


Figura 2.3: Analisi cinematica mediante sequenza di montaggio: determinazione del potenziale centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4 dell'asta 4.

Bipattino assoluto G. Il bipattino assoluto, collocato al nodo G dell'asta 4 appartenente alla struttura assegnata, rappresenta un vincolo semplice assoluto per l'asta stessa; esso ne blocca la sola rotazione assoluta. Si individua quindi, in verde in Figura 2.3,

la retta impropria $\mathcal{U} = 0$ (che rappresenta l'asse del bipattino assoluto G), come luogo geometrico dei punti impropri di collocazione del possibile centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4^∞ :

$$\text{Bipattino } G \longrightarrow \Omega_4 \in \mathcal{U} = 0. \quad (2.4)$$

Essendo infatti improprio il potenziale centro di istantanea rotazione dell'asta 4, essa può solo compiere una traslazione arbitraria nel piano.

Centro di istantanea rotazione Ω_4 . Dall'intersezione delle due condizioni (2.3) e (2.4) si conclude che il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4 , se esiste, giace all'infinito lungo la direzione individuata dalla retta i precedentemente introdotta:

$$\begin{cases} \text{Biella 4} & \longrightarrow \Omega_4 \in i \\ \text{Bipattino } G & \longrightarrow \Omega_4 \in \mathcal{U} = 0 \end{cases} \implies \Omega_4^{\infty, \alpha} \quad \text{con} \quad \alpha = \arctan\left(-\frac{z}{b}\right). \quad (2.5)$$

In altre parole, il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4 dell'asta 4, se esiste, risulta essere il punto improprio della retta i , asse della biella 5. La costruzione grafica è riportata in blu in Figura 2.3.

Quadrilatero articolato. A questo punto, l'asta 4 può quindi essere pensata, ai fini dell'analisi cinematica, come incernierata a terra in corrispondenza del centro di istantanea rotazione assoluto $\Omega_4^{\infty, \alpha}$ precedentemente ricostruito. L'asta 1 è invece immediatamente identificabile come incernierata a terra, in quanto vincolata tramite la cerniera propria assoluta presente nel nodo A . Le due suddette aste risultano inoltre essere mutuamente collegate tramite le due bielle relative 2 e 3. Queste ultime possono essere sostituite da una coppia di carrelli relativi tra l'asta 1 e l'asta 4, aventi assi j e k rappresentati secondo la costruzione grafica in verde in Figura 2.4.

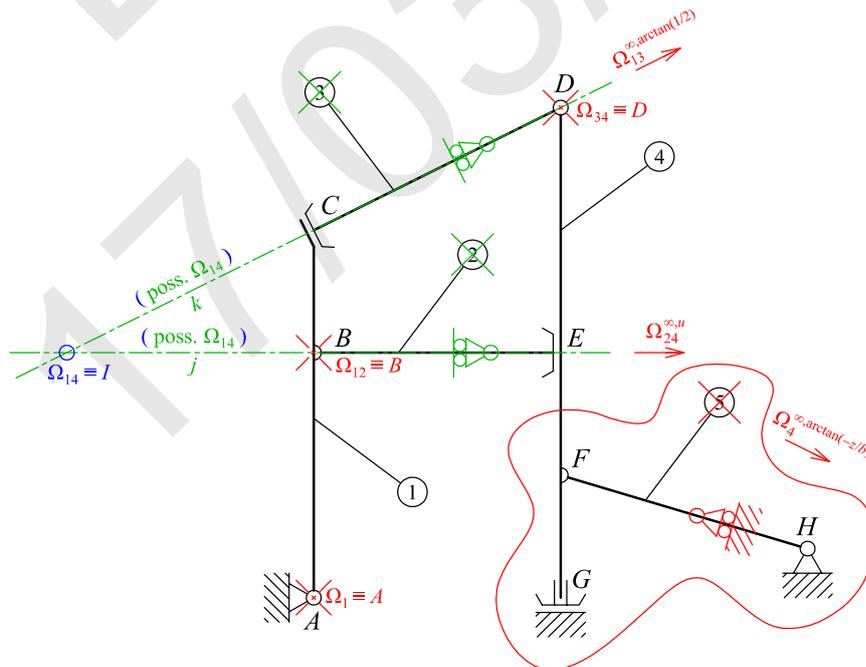


Figura 2.4: Analisi cinematica mediante sequenza di montaggio: individuazione dello schema isostatico fondamentale di quadrilatero articolato.

Ci si è quindi ricondotti allo schema fondamentale potenzialmente cinematicamente isodeterminato detto *quadrilatero articolato* (trattato al Paragrafo 1.5.1 del Capitolo 1, a sua volta dedicato all'illustrazione di tutti gli schemi isostatici fondamentali). Il punto I di intersezione degli assi j e k dei carrelli relativi, introdotti in verde in Figura 2.4, rispettivamente in sostituzione delle bielle 2 e 3, determina il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{14} tra le aste 1 e 4, secondo la rappresentazione in blu nella medesima Figura 2.4. Pertanto, il quadrilatero articolato può essere così ricondotto allo schema fondamentale di *arco a tre cerniere* (Paragrafo 1.3.1 del Capitolo 1).

Questo risulta essere non labile quando le tre cerniere, che esprimono il centro di istantanea rotazione relativo ed i due centri di istantanea rotazione assoluti delle due aste che formano l'arco stesso, non risultano allineate.

Conclusione

La labilità della struttura dipende dall'allineamento fra i centri di istantanea rotazione assoluti Ω_1 (collocato in A , $\Omega_1 \equiv A$) ed Ω_4 (collocato all'infinito in direzione α , $\Omega_4^{\infty, \alpha}$) e quello relativo Ω_{14} (collocato nel punto I precedentemente ricostruito come intersezione tra gli assi delle bielle 2 e 3, $\Omega_{14} \equiv I$), con la posizione di $\Omega_4^{\infty, \alpha}$ funzione della coordinata z relativa al nodo H della struttura. Poiché Ω_1 ed Ω_{14} , punti noti, giacciono su di una retta l avente inclinazione pari a $-\pi/4$, la struttura assegnata risulta labile se, e soltanto se, l'angolo di inclinazione α precedentemente introdotto (ed indicante la collocazione di $\Omega_4^{\infty, \alpha}$) risulta anch'esso pari a $-\pi/4$, secondo la configurazione riportata in Figura 2.5. Solo in tal caso, infatti, i centri di istantanea rotazione Ω_1 , Ω_4 ed Ω_{14} risultano allineati su di una retta passante per A ed inclinata di $-\pi/4$, come illustrato in Figura 2.5.

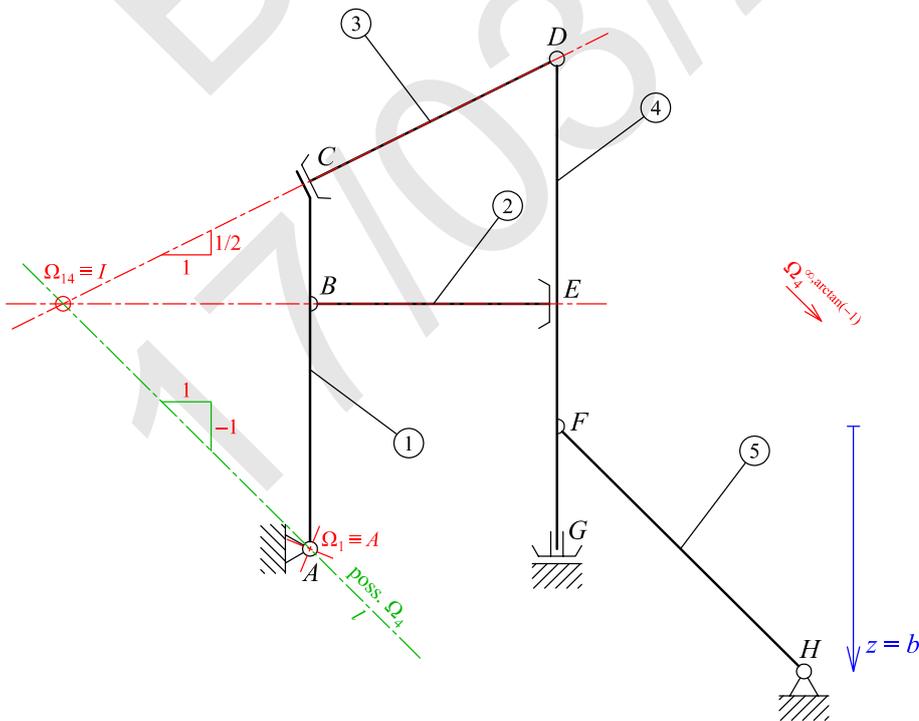


Figura 2.5: Analisi cinematica mediante sequenza di montaggio: configurazione labile della struttura potenzialmente isostatica inizialmente assegnata (ottenuta per $z = b$).

Pertanto, riprendendo dalla condizione (2.3) o (2.5) la definizione di α , il valore della coordinata z tale da rendere labile la struttura assegnata risulta pari a:

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{z}{b}\right) = -\frac{\pi}{4} \longrightarrow z = b. \quad (2.6)$$

In conclusione:

$$\underbrace{v = l = 15}_{\text{CN di non labilit\`a}} + \begin{cases} z \neq b \longrightarrow \text{struttura cinematicamente} \\ \text{isodeterminata,} \\ z = b \longrightarrow \text{strutt. cinematicamente indeterminata} \\ \text{(una volta labile, } L = 1). \end{cases} \quad (2.7)$$

2.1.3 Approccio geometrico

L'approccio geometrico completo si basa sulla ricostruzione di tutti i potenziali centri di istantanea rotazione, assoluti e relativi, della struttura. Se i suddetti centri soddisfano le condizioni di allineamento imposte dal primo e dal secondo teorema sulle catene cinematiche il sistema (od una sua parte) risulta labile. Poich\'e non tutti i centri di istantanea rotazione sono noti a priori, di fatto si procede *presupponendo* la labilit\`a dell'intero sistema, imponendo o verificando il rispetto di tutte le condizioni di allineamento previste dai due teoremi.

Centri di istantanea rotazione: considerazioni iniziali

Le posizioni di alcuni centri di istantanea rotazione (come, ad esempio, il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 o quello relativo Ω_{12}), oppure i luoghi geometrici di possibile collocazione degli stessi (come nel caso del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4 , posto all'infinito, sulla retta impropria $\mathcal{U} = 0$, per effetto del bipattino in G), sono immediatamente identificabili attraverso l'analisi delle condizioni di vincolo applicate alla struttura assegnata. In altre parole, l'analisi cinematica con approccio geometrico si fonda primariamente sui centri di istantanea rotazione potenzialmente noti in sede iniziale. In particolare, si evince che:

$$\begin{cases} \text{cerniera in } A \longrightarrow \Omega_1 \equiv A \\ \text{cerniera in } B \longrightarrow \Omega_{12} \equiv B \\ \text{pattino in } C \longrightarrow \Omega_{13}^{\infty, \arctan(1/2)} \\ \text{cerniera in } D \longrightarrow \Omega_{34} \equiv D \\ \text{pattino in } E \longrightarrow \Omega_{24}^{\infty, u} \\ \text{cerniera in } F \longrightarrow \Omega_{45} \equiv F \\ \text{bipattino in } G \longrightarrow \Omega_4^\infty \\ \text{cerniera in } H \longrightarrow \Omega_5 \equiv H \end{cases} \quad (2.8)$$

Tali considerazioni sono illustrate in rosso in Figura 2.6. In generale, si sottolinea come i vincoli doppi consentano l'immediata individuazione di potenziali centri di istantanea rotazione, mentre i vincoli semplici permettono unicamente la determinazione di un luogo geometrico di possibile collocazione degli stessi. I potenziali centri di istantanea rotazione risultano poi essere di tipo assoluto, Ω_i , o relativo, Ω_{ij} , a seconda che il vincolo preso in esame per consentirne l'individuazione operi il fissaggio a terra dell'asta i , oppure operi un collegamento mutuo tra le aste i e j .

Doppiette e triplette di aste. Le possibili combinazioni di doppiette e triplette sono rispettivamente elencate nelle Tabelle 2.1 e 2.2. Nella loro stesura si è tenuto conto delle considerazioni iniziali raccolte nel Sistema (2.8), indicando con:

- $\bar{\Omega}_i$ e $\bar{\Omega}_{ij}$ i potenziali centri di istantanea rotazione (assoluti i , relativi ij) di cui è solamente noto il luogo geometrico di possibile collocazione (tipicamente una retta di appartenenza);
- $\overset{\circ}{\Omega}_i$ e $\overset{\circ}{\Omega}_{ij}$ i potenziali centri di istantanea rotazione (assoluti i , relativi ij) con posizione già pienamente nota.

Aste $i - j$	CIR		
	Ω_i	Ω_j	Ω_{ij}
1 - 2	$\overset{\circ}{\Omega}_1$	Ω_2	$\overset{\circ}{\Omega}_{12}$
1 - 3	$\overset{\circ}{\Omega}_1$	Ω_3	$\overset{\circ}{\Omega}_{13}$
1 - 4	$\overset{\circ}{\Omega}_1$	$\bar{\Omega}_4$	Ω_{14}
1 - 5	$\overset{\circ}{\Omega}_1$	$\overset{\circ}{\Omega}_5$	Ω_{15}
2 - 3	Ω_2	Ω_3	Ω_{23}
2 - 4	Ω_2	$\bar{\Omega}_4$	$\overset{\circ}{\Omega}_{24}$
2 - 5	Ω_2	$\overset{\circ}{\Omega}_5$	Ω_{25}
3 - 4	Ω_3	$\bar{\Omega}_4$	$\overset{\circ}{\Omega}_{34}$
3 - 5	Ω_3	$\overset{\circ}{\Omega}_5$	Ω_{35}
4 - 5	$\bar{\Omega}_4$	$\overset{\circ}{\Omega}_5$	$\overset{\circ}{\Omega}_{45}$

Tabella 2.1: Combinazioni delle dieci doppiette o coppie di aste, relative alla struttura assegnata.

Aste $i - j - k$	CIR		
	Ω_{ij}	Ω_{jk}	Ω_{ik}
1 - 2 - 3	$\overset{\circ}{\Omega}_{12}$	Ω_{23}	$\overset{\circ}{\Omega}_{13}$
1 - 2 - 4	$\overset{\circ}{\Omega}_{12}$	$\overset{\circ}{\Omega}_{24}$	Ω_{14}
1 - 2 - 5	$\overset{\circ}{\Omega}_{12}$	Ω_{25}	Ω_{15}
1 - 3 - 4	$\overset{\circ}{\Omega}_{13}$	$\overset{\circ}{\Omega}_{34}$	Ω_{14}
1 - 3 - 5	$\overset{\circ}{\Omega}_{13}$	Ω_{35}	Ω_{15}
1 - 4 - 5	Ω_{14}	$\overset{\circ}{\Omega}_{45}$	Ω_{15}
2 - 3 - 4	Ω_{23}	$\overset{\circ}{\Omega}_{34}$	$\overset{\circ}{\Omega}_{24}$
2 - 3 - 5	Ω_{23}	Ω_{35}	Ω_{25}
2 - 4 - 5	$\overset{\circ}{\Omega}_{24}$	$\overset{\circ}{\Omega}_{45}$	Ω_{25}
3 - 4 - 5	$\overset{\circ}{\Omega}_{34}$	$\overset{\circ}{\Omega}_{45}$	Ω_{35}

Tabella 2.2: Combinazioni delle dieci triplette di aste, relative alla struttura assegnata.

Determinazione di Ω_{14} . Dalla contemporanea applicazione del secondo teorema alla tripletta formata dalle aste 1, 2 e 4 ed alla tripletta formata dalle aste 1, 3 e 4, si determina la collocazione del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{14} :

$$\begin{cases} \Omega_{12}, \Omega_{24}, \Omega_{14} & \longrightarrow \Omega_{14} \in i \\ \Omega_{13}, \Omega_{34}, \Omega_{14} & \longrightarrow \Omega_{14} \in j \end{cases} \implies \Omega_{14} \equiv I, \quad (2.13)$$

secondo la costruzione riportata in verde in Figura 2.6.

Determinazione di Ω_4 . Determinata, al passo precedente, la posizione di Ω_{14} , risulta ora possibile applicare il primo teorema alla doppietta formata dalle aste 1 e 4 ed alla doppietta formata dalle aste 4 e 5. Alle due condizioni di allineamento derivanti dal primo teorema, si affianca quella dovuta al bipattino collocato in G (inserita nelle considerazioni iniziali (2.8)):

$$\begin{cases} \Omega_1, \Omega_4, \Omega_{14} & \longrightarrow \Omega_4 \in k \\ \Omega_4, \Omega_5, \Omega_{45} & \longrightarrow \Omega_4 \in l \\ \text{bipattino in } G & \longrightarrow \Omega_4^\infty \end{cases} \implies \exists \Omega_4? \quad (2.14)$$

Si conclude che, affinché le due condizioni di allineamento risultino contemporaneamente soddisfatte, nonché compatibili con la presenza del bipattino al nodo G , l'inclinazione α dell'asse della biella 5 deve risultare pari a $-\pi/4$ (quindi con $z = b$, dall'Eq. (2.6) precedentemente introdotta). In tal caso il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4 esiste e si colloca nel punto improprio $\Omega_4^{\infty, \arctan(-1)}$; per questa eventualità l'analisi cinematica va quindi ulteriormente approfondita.

Con una diversa inclinazione α , invece, si esclude l'esistenza del centro di istantanea rotazione Ω_4 (asta 4 fissa a terra). In tal caso, poiché il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{45} assumerebbe il ruolo di centro assoluto dell'asta 5 e $\Omega_5 \neq \Omega_{45}$, si esclude anche la presenza di Ω_5 (asta 5 fissa). Contemporaneamente, le bielle 2 e 3, assunte vincolate a terra data l'assenza di Ω_4 , garantiscono la non labilità della sottostruttura rimanente.

Riassumendo:

$$\underbrace{v = l = 15}_{\text{CN di non labilità}} + \begin{cases} z \neq b & \longrightarrow \text{Vincoli ben posti.} \\ & \text{Struttura cinem. isodeterminata.} \\ z = b & \longrightarrow \text{Vincoli ben posti?} \\ & \text{Proseguire l'analisi cinematica.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Nel seguito si prosegue lo studio inerente la possibile labilità della struttura assegnata, dopo aver configurato il sistema in modo tale che risulti $z = b$. In Figura 2.7 è rappresentata la struttura così configurata; sono inoltre rappresentati, in rosso, i centri di istantanea rotazione resi noti attraverso la trattazione precedente.

Determinazione di Ω_2 . Dalla contemporanea applicazione del primo teorema alla doppietta formata dalle aste 1 e 2 ed alla doppietta formata dalle aste 2 e 4, si determina la posizione del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_2 :

$$\begin{cases} \Omega_1, \Omega_2, \Omega_{12} & \longrightarrow \Omega_2 \in m \\ \Omega_2, \Omega_4, \Omega_{24} & \longrightarrow \Omega_2^\infty \in \mathcal{U} = 0 \end{cases} \implies \Omega_2^{\infty, v}, \quad (2.16)$$

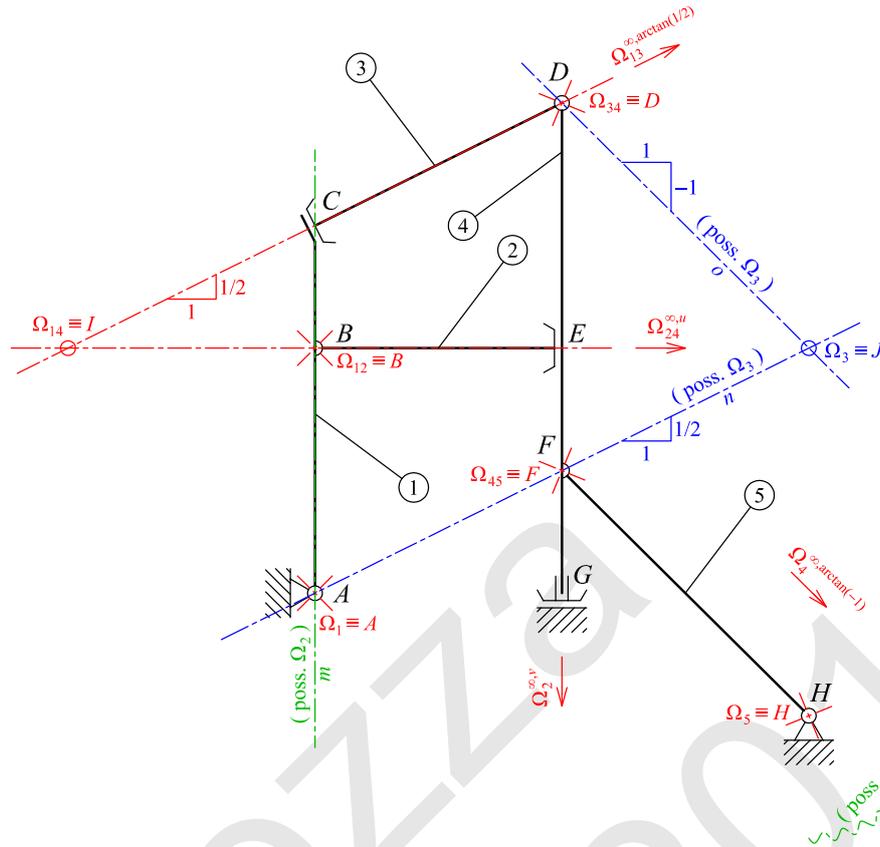


Figura 2.7: Analisi cinematica mediante approccio geometrico: ricerca dei centri di istantanea rotazione assoluti Ω_2 ed Ω_3 (per la configurazione potenzialmente labile della struttura, avente $z = b$).

secondo la costruzione riportata in verde in Figura 2.7. Si sottolinea come la combinazione (allineamento) dei punti impropri $\Omega_4^{\infty, \arctan(-1)}$ e $\Omega_{24}^{\infty, u}$ origini la retta impropria $\mathcal{U} = 0$, quale luogo geometrico lineare di possibile collocazione del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_2^∞ .

Determinazione di Ω_3 . Dalla contemporanea applicazione del primo teorema alla doppietta formata dalle aste 1 e 3 ed alla doppietta formata dalle aste 3 e 4, si determina la posizione del centro di istantanea rotazione assoluto Ω_3 :

$$\begin{cases} \Omega_1, \Omega_3, \Omega_{13} \longrightarrow \Omega_3 \in n \\ \Omega_3, \Omega_4, \Omega_{34} \longrightarrow \Omega_3 \in o \end{cases} \implies \Omega_3 \equiv J, \quad (2.17)$$

secondo la costruzione riportata in blu in Figura 2.7.

Determinazione di Ω_{15} . Dalla contemporanea applicazione del primo teorema alla doppietta formata dalle aste 1 e 5 e del secondo teorema alla tripletta formata dalle aste 1, 4 e 5, si determina la posizione del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{15} :

$$\begin{cases} \Omega_1, \Omega_5, \Omega_{15} \longrightarrow \Omega_{15} \in p \\ \Omega_{14}, \Omega_{45}, \Omega_{15} \longrightarrow \Omega_{15} \in q \end{cases} \implies \Omega_{15}^{\infty, \arctan(-1/4)}, \quad (2.18)$$

secondo la costruzione riportata in verde in Figura 2.8. Nella medesima figura sono inoltre riportati, in rosso, i centri di istantanea rotazione, assoluti e relativi, noti dalla trattazione precedente (Figura 2.7).

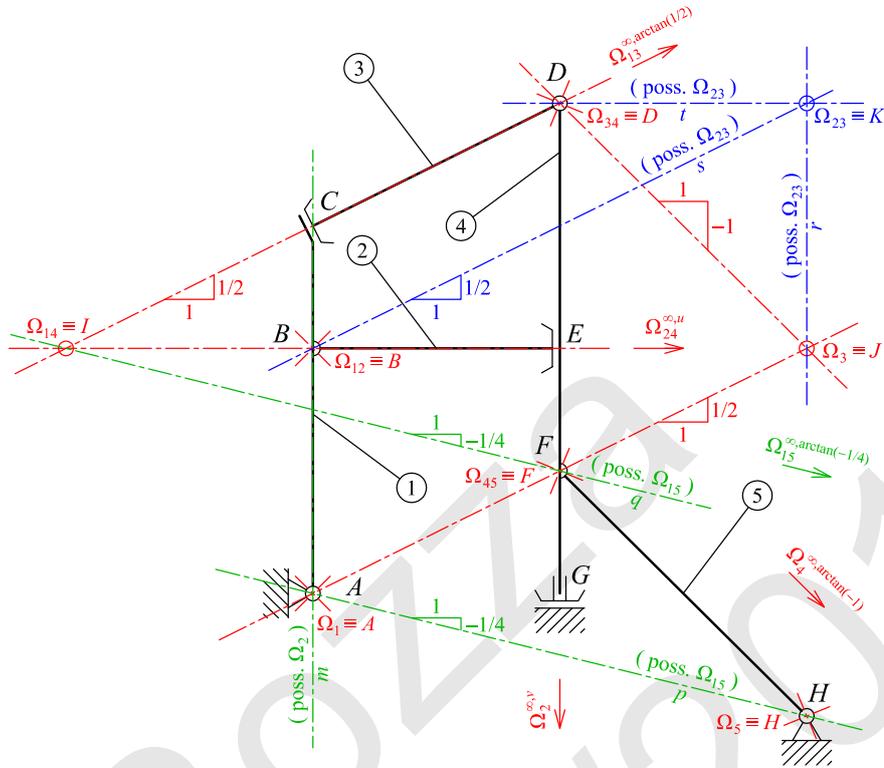


Figura 2.8: Analisi cinematica mediante approccio geometrico: ricerca dei centri di istantanea rotazione relativi Ω_{15} ed Ω_{23} .

Determinazione di Ω_{23} . Dalla contemporanea applicazione del primo teorema alla doppietta formata dalle aste 2 e 3 e del secondo teorema alle triplette formate dalle aste 1, 2, 3 e 2, 3, 4, si determina la posizione del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{23} :

$$\begin{cases} \Omega_2, \Omega_3, \Omega_{23} & \longrightarrow \Omega_{23} \in r \\ \Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{13} & \longrightarrow \Omega_{23} \in s \\ \Omega_{23}, \Omega_{34}, \Omega_{24} & \longrightarrow \Omega_{23} \in t \end{cases} \implies \Omega_{23} \equiv K, \quad (2.19)$$

secondo la costruzione riportata in blu in Figura 2.8. Poiché le condizioni di allineamento imposte sono pari a tre, anziché due come nei casi precedenti, la determinazione del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{23} non è, in generale, sempre possibile. In questo caso però, poiché le tre rette convergono esattamente in un unico punto, indicato con K in Figura 2.8, tale punto è l'effettivo potenziale centro di istantanea rotazione relativo Ω_{23} .

Determinazione di Ω_{35} . Dalla contemporanea applicazione del primo teorema alla doppietta formata dalle aste 3 e 5 e del secondo teorema alle triplette formate dalle aste 1, 3, 5 e 3, 4, 5, si determina la posizione del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{35} :

$$\begin{cases} \Omega_3, \Omega_5, \Omega_{35} & \longrightarrow \Omega_{35} \in u \\ \Omega_{13}, \Omega_{35}, \Omega_{15} & \longrightarrow \Omega_{35}^\infty \in \mathcal{U} = 0 \\ \Omega_{34}, \Omega_{45}, \Omega_{35} & \longrightarrow \Omega_{35} \in v \end{cases} \implies \Omega_{35}^{\infty, v}, \quad (2.20)$$

Poiché, nel prosieguo dello svolgimento, dopo aver imposto $z = b$, si è dimostrato il soddisfacimento di tutte le condizioni di allineamento date dal primo e dal secondo teorema sulle catene cinematiche, la struttura configurata con $z = b$ risulta effettivamente labile, nella sua interezza. I centri di istantanea rotazione, assoluti e relativi, si collocano come riportato in Figura 2.9. Poiché essi risultano tutti *univocamente* noti e non vi sono altresì casi degeneri con centri di istantanea rotazione coincidenti, la struttura manifesta un unico grado di labilità ($L = 1$). In questo caso tutte le aste sono coinvolte nella labilità del sistema; la labilità non è quindi confinata solamente ad un sottosistema, bensì riguarda l'intera struttura.

In definitiva, coerentemente con quanto ottenuto tramite l'approccio con sequenza di montaggio al Paragrafo 2.1.2, risulta confermata la conclusione (2.7): quando la coordinata libera z assume valori diversi da b la struttura assegnata è cinematicamente isodeterminata; quando z coincide con b essa è cinematicamente indeterminata, manifesta un unico grado di labilità e costituisce un cinematismo (o catena cinematica) avente tutte le aste spostabili secondo la cinematica di un atto di moto.

2.2 Meccanismo e mappe degli spostamenti

Poiché la struttura, nonostante il rispetto della condizione necessaria di non labilità $v \geq l$ è risultata labile per $z = b$ (Sezione 2.1), è ora possibile, per tale condizione, tracciare il corrispondente *meccanismo*, ossia determinarne la configurazione *spostata* in seguito al compimento di un *atto di moto* consentito dai vincoli (*mal posti*). In particolare, per $z = b$ la struttura è risultata una volta labile ($L = 1$); pertanto il tracciamento del meccanismo (o spostata) avviene definendo il valore assunto da un solo *parametro libero* (o *coordinata libera*, o *coordinata lagrangiana*, o *grado di libertà del sistema*). Nel caso di strutture più volte labili, il numero delle coordinate libere aumenta e risulta pari al grado di labilità del sistema. In tale eventualità sono quindi possibili più meccanismi.

2.2.1 Meccanismo o spostata

Il meccanismo della struttura è riportato in *blu* in Figura 2.10, sovrapposto alla struttura di partenza nella sua configurazione di riferimento con $z = b$. Per completezza, sono stati disegnati pure i vincoli in configurazione spostata anche se, qui come per strutture anche più complesse, sarebbe anche possibile farne a meno, indicando lo spostamento delle sole aste, considerando che i vincoli si intendono *ideali* o *puntuali* (cioè privi di estensione geometrica).

Convenzione. Poiché risulta facilmente identificabile, nello schema inizialmente assegnato, una *maglia strutturale* di dimensione caratteristica pari a b , può risultare comodo, ai fini del tracciamento della spostata e del calcolo degli spostamenti nodali, definire un'unità infinitesima di spostamento δ . Tra tale unità δ e l'unità infinitesima di rotazione φ , eventualmente atta a comandare il cinematismo, si definisce la relazione:

$$\delta = \varphi b. \quad (2.22)$$

In altre parole, data un'asta \overline{AB} rettilinea di lunghezza b ed incernierata nell'estremità A , lo spostamento infinitesimo δ corrisponde allo spostamento dell'estremità libera B (in

direzione normale alla congiungente \overline{AB}), quando all'asta stessa è imposta una rotazione infinitesima φ . Questa convenzione consente di facilitare la rappresentazione grafica delle rotazioni a partire da spostamenti lineari in unità δ e di agevolare la determinazione degli spostamenti degli estremi delle aste nel seguito riportati.

Tracciamento del meccanismo

Si propone una sequenza utile al tracciamento del meccanismo della struttura assegnata. Si adotta, come coordinata libera, la rotazione infinitesima φ dell'asta 1 (positiva se antioraria). La ricostruzione del cinematismo passa attraverso la continuità (reale o virtuale) delle aste, tramite la posizione dei loro centri di istantanea rotazione relativi.

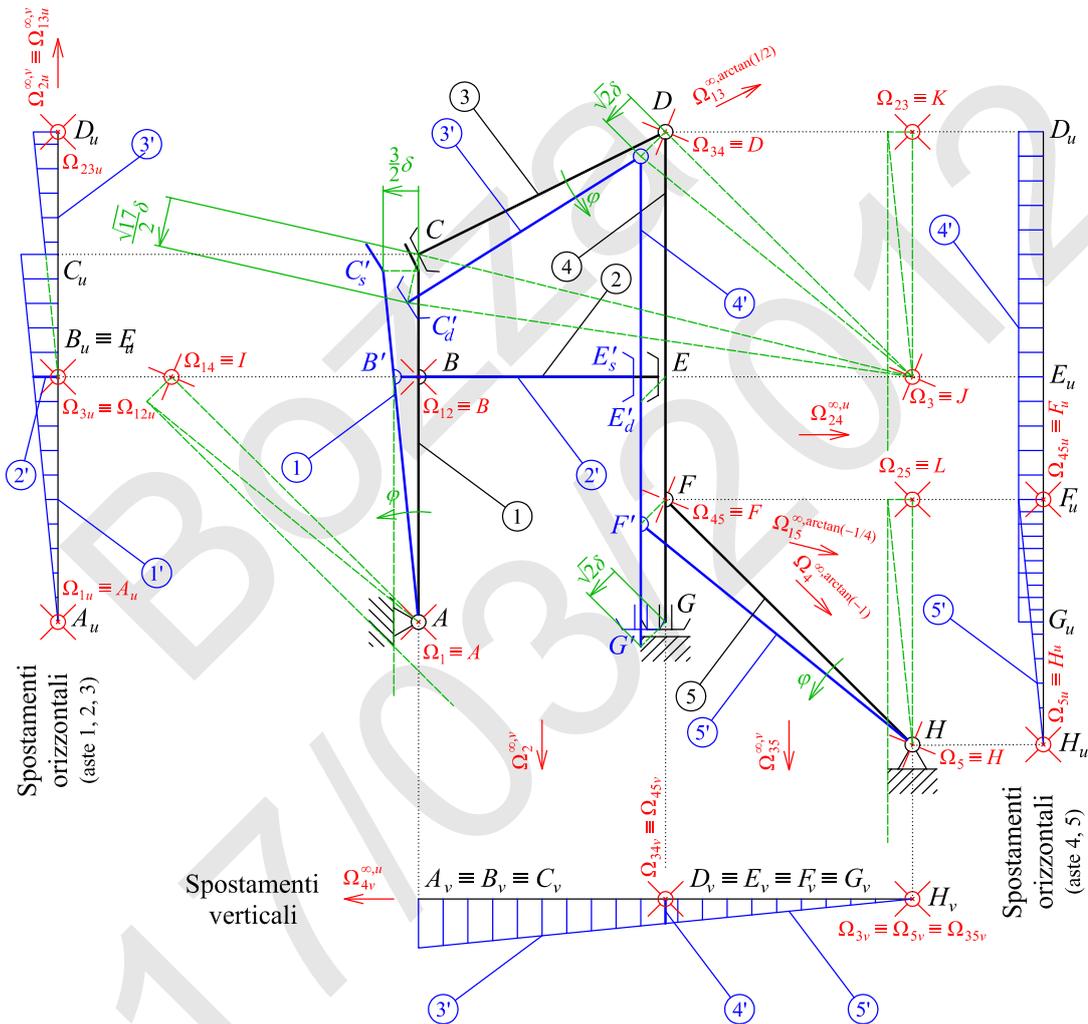


Figura 2.10: Meccanismo della struttura e mappe degli spostamenti orizzontali e verticali.

Asta 1. Si impone l'atto di moto rotatorio dell'asta 1, comandando il movimento mediante una rotazione positiva infinitesima $\varphi_1 = \varphi$ rispetto al centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 (asta 1 incernierata a terra in A).

Asta 4. Affinché nel centro di istantanea rotazione relativo Ω_{14} (punto virtuale di contatto tra le aste 1 e 4) gli spostamenti infinitesimi delle aste 1 e 4 risultino coerenti fra

loro, è necessario che l'asta 4 subisca una traslazione rigida di $\sqrt{2}\varphi b$ (o $\sqrt{2}\delta$) lungo la direzione $-3\pi/4$. Si ricordi, infatti, che il centro di istantanea rotazione dell'asta 4 è il punto improprio $\Omega_4^{\infty, \arctan(-1)}$.

Asta 2. In modo analogo a quanto svolto per l'asta 4, anche lo spostamento dell'asta 2 può essere determinato per trascinarsi rispetto all'asta 1, facendo riferimento al centro di istantanea rotazione relativo Ω_{12} (punto virtuale di contatto tra le aste 1 e 2). Poiché l'asta 2 collega però due aste aventi spostata già nota (le aste 1 e 4 precedentemente descritte), risulta possibile intuire più direttamente il suo spostamento, tenendo in considerazione i movimenti relativi consentiti dai vincoli ivi applicati (cerniera in B e pattino in E). A prescindere dall'approccio adottato, si conclude che l'asta 2 subisce, rispetto al sistema di riferimento assoluto, una traslazione orizzontale pari a $-\delta$ (il segno negativo indica una traslazione verso sinistra), mentre risultano nulle la sua traslazione verticale e la sua rotazione. A riguardo di quest'ultima, si noti infatti che, per effetto del pattino relativo in E , non sono possibili rotazioni relative rispetto all'asta 4, la quale, traslando solamente, fa sì che neppure l'asta 2 possa subire rotazioni.

Asta 3. Anche per quanto concerne l'asta 3, risulta possibile tracciare la spostata tenendo in considerazione la posizione assunta dalle aste 1 e 4 da essa collegate e la tipologia dei vincoli relativi ivi presenti. Il pattino in C , avente piano di scorrimento inclinato, rende però difficoltoso tale approccio, facendovi preferire la costruzione grafica basata sulla coerenza degli spostamenti in corrispondenza del centro di istantanea rotazione relativo Ω_{34} (punto virtuale di contatto tra le aste 3 e 4), coincidente con il nodo D della struttura. Poiché D subisce una traslazione s_D pari a $\sqrt{2}\delta$ lungo la direzione $-3\pi/4$, la rotazione dell'asta 3 dovrà anch'essa risultare pari a φ ; ciò affinché sia rispettata l'equazione che descrive l'atto di moto piano dell'asta 3 ed inerente il nodo D :

$$s_D = \varphi_3 \overline{DJ} \longrightarrow \varphi_3 = \frac{s_D}{\overline{DJ}} = \frac{\sqrt{2}\delta}{\sqrt{2}b} = \varphi, \quad (2.23)$$

con $\overline{DJ} = \sqrt{2}b$ distanza tra il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{34} ed il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_3 . Si conclude che l'asta 3 subisce un atto di moto rotatorio, rispetto al centro di istantanea rotazione assoluto Ω_3 , equivalente ad una rotazione φ in senso antiorario, della stessa entità di quella subita dall'asta 1. Ancora, il pattino relativo in C non consente una rotazione relativa tra l'asta 1 e l'asta 3 (similmente a quanto detto per il pattino relativo in E , tra l'asta 2 e l'asta 4).

Asta 5. Similmente a quanto appena ottenuto per l'asta 3, poiché il nodo F (punto che individua il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{45} tra l'asta 4 e l'asta 5) subisce una traslazione s_F pari a $\sqrt{2}\delta$ lungo la direzione $-3\pi/4$, la rotazione dell'asta 5 dovrà anch'essa risultare pari a φ . Ciò affinché sia rispettata l'equazione che descrive l'atto di moto piano dell'asta 5 ed inerente il nodo F :

$$s_F = \varphi_5 \overline{FH} \longrightarrow \varphi_5 = \frac{s_F}{\overline{FH}} = \frac{\sqrt{2}\delta}{\sqrt{2}b} = \varphi, \quad (2.24)$$

con $\overline{FH} = \sqrt{2}b$ distanza tra il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{45} ed il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_5 .

2.2.2 Spostamenti nodali

Al fine di verificare la bontà della spostata ottenuta in Figura 2.10, è bene caratterizzare compiutamente il meccanismo, determinando gli spostamenti degli estremi di tutte le aste della struttura ed eventualmente anche di altri punti di particolare interesse. A tale scopo risulta in genere utile anche la lettura diretta degli spostamenti orizzontali e verticali, i quali possono essere rappresentati graficamente nelle relative mappe. Gli spostamenti ottenuti devono evidentemente risultare compatibili con i vincoli (assoluti o relativi) collocati nei nodi. Si presenta, nel seguito, la discussione degli spostamenti dei nodi ritenuti maggiormente significativi.

Nodo B

Poiché nel nodo B è presente una cerniera propria che collega l'asta 1 con l'asta 2, è interessante verificare che gli spostamenti relativi tra il nodo B della parte di destra della struttura (indicato con B_d ed appartenente all'asta 2) e quello della parte sinistra (indicato con B_s ed appartenente all'asta 1) siano nulli (cioè sia consentita solo una rotazione relativa tra le due aste).

Spostamento relativo in direzione orizzontale:

$$\begin{aligned}\Delta u_B &= u_{B_d} - u_{B_s} \\ &= (-\delta) - (-\varphi b) = -\delta + \delta = 0.\end{aligned}\quad (2.25)$$

Spostamento relativo in direzione verticale:

$$\begin{aligned}\Delta v_B &= v_{B_d} - v_{B_s}, \\ &= 0 - 0 = 0.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Rotazione relativa:

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_B &= \varphi_{B_d} - \varphi_{B_s} \\ &= 0 - \varphi = -\varphi.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Gli spostamenti relativi sono nulli, coerentemente con la presenza del vincolo relativo di cerniera propria, mentre la rotazione relativa assume la stessa entità, con verso opposto, di quella assoluta dell'asta 1. In tal modo l'asta 2 si mantiene orizzontale rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Nodo C

Poiché il piano di scorrimento del pattino collocato nel nodo C risulta inclinato di $-2/1$ (in altre parole, verso il basso con inclinazione di circa 63°), è interessante verificare la compatibilità della spostata rappresentata in Figura 2.10 in corrispondenza di tale vincolo. Si valutano quindi gli spostamenti seguenti.

Scorrimento relativo in direzione orizzontale:

$$\begin{aligned}\Delta u_C &= u_{C_d} - u_{C_s} \\ &= \left(-\varphi \frac{b}{2}\right) - \left(-\varphi \frac{3}{2}b\right) = \varphi b = \delta.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Scorrimento relativo in direzione verticale:

$$\begin{aligned}\Delta v_C &= v_{C_d} - u_{C_s}, \\ &= (-\varphi 2b) - 0 = -2\varphi b = -2\delta.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Rotazione relativa:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_C &= \varphi_{C_d} - \varphi_{C_s} \\ &= \varphi - \varphi = 0.\end{aligned}\tag{2.30}$$

La rotazione relativa è nulla, coerentemente con la presenza del vincolo relativo pattino, mentre lo scorrimento relativo assume direzione compatibile con il piano di scorrimento individuato dal pattino stesso. In altre parole, il rapporto tra lo scorrimento relativo in direzione verticale Δv_C e quello in direzione orizzontale Δu_C risulta essere correttamente pari a $-2/1$.

Nodo G

Poiché l'estremo G dell'asta 4 è vincolato a terra con vincolo bipattino assoluto, le verifiche inerenti i suoi movimenti non saranno più condotte su spostamenti relativi, bensì su spostamenti assoluti, come riportato di seguito.

Scorrimento assoluto in direzione orizzontale:

$$u_G = -\delta.\tag{2.31}$$

Scorrimento assoluto in direzione verticale:

$$v_G = -\delta.\tag{2.32}$$

Rotazione assoluta:

$$\varphi_G = 0.\tag{2.33}$$

La rotazione assoluta è nulla, coerentemente con la presenza del vincolo assoluto bipattino che blocca, infatti, la sola rotazione dell'asta. Gli scorrimenti orizzontale u_G e verticale v_G sono, invece, tra loro uguali, coerentemente con la posizione del centro di istantanea rotazione assoluto improprio $\Omega_4^{\infty, \arctan(-1)}$. In definitiva, il nodo G subisce uno spostamento risultante s_G di entità pari a $\sqrt{2}\delta$.

Capitolo 3

Approccio analitico

In questo capitolo si presenta un esempio di analisi cinematica svolta mediante approccio analitico, ossia attraverso la scrittura esplicita delle equazioni cinematiche di vincolo (tipicamente in forma matriciale) e successivo studio delle proprietà algebriche del sistema di equazioni lineari conseguentemente ottenuto. In particolare, si analizza uno schema non elementare, cioè non riconducibile ad una sequenza di montaggio degli schemi isostatici fondamentali descritti nel Capitolo 1. Nello specifico, l'orientamento dell'asse di un carrello mutuo presente nello schema dipende da una coordinata libera arbitraria; pertanto i risultati ottenuti sono, in generale, funzione del valore assunto da tale coordinata libera. Inoltre, a causa della proposizione di uno schema non elementare, in alternativa alla risoluzione proposta, risulta applicabile unicamente l'approccio geometrico completo, già dettagliatamente illustrato nel precedente Capitolo 2. Proprio allo scopo di facilitare il lettore desideroso di cimentarsi autonomamente nell'utilizzo di entrambi gli approcci, analitico e cinematico, si dedica l'ultima parte della risoluzione qui descritta anche alla ricostruzione di tutti i centri di istantanea rotazione, assoluti e relativi, appartenenti alla struttura in esame ed utili alla verifica delle condizioni di allineamento ascrivibili al primo ed al secondo teorema sulle catene cinematiche.

Testo dell'esercizio proposto

Sia assegnata la struttura in Figura 3.1:

- svolgere l'analisi cinematica, ricercando l'eventuale labilità del sistema in funzione della coordinata libera α (atta ad individuare l'inclinazione assunta dall'asse del carrello relativo posto in E);
- in caso di labilità, tracciare l'eventuale meccanismo (od i meccanismi) della struttura, rappresentando anche le mappe degli spostamenti orizzontali e verticali.

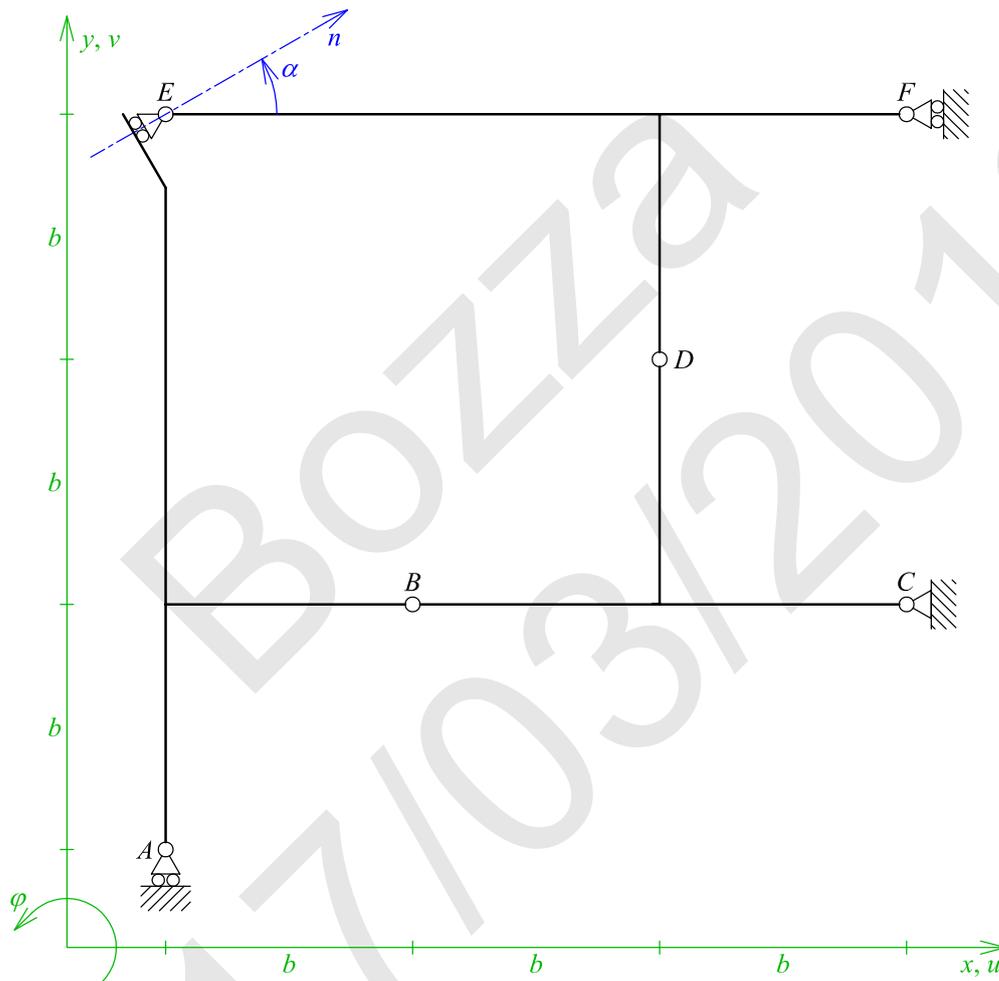


Figura 3.1: Struttura assegnata, della quale si vuole indagare l'eventuale labilità in funzione dell'inclinazione α dell'asse del carrello in E .

3.1 Analisi cinematica

Come introdotto sin dal Capitolo 1, l'*analisi cinematica* è svolta secondo due fasi successive:

1. computo dei gradi di vincolo v e dei gradi di libertà l , affinché risulti verificata la *condizione necessaria di non labilità*: $v \geq l$;

2. studio della configurazione dei vincoli applicati alla struttura, al fine di dedurre se i vincoli stessi risultano *ben posti* o *efficaci*.

Le si affronta separatamente, adottando qui, per lo studio della configurazione dei vincoli, l'approccio analitico.

3.1.1 Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà

Gradi di vincolo

Il numero totale dei gradi di vincolo v , è ottenuto mediante la somma dei gradi di vincolo v_I presenti in corrispondenza del nodo I -esimo della struttura assegnata, ove siano dislocati vincoli (assoluti o relativi) applicati su n_I aste in esso convergenti:

$$\begin{aligned}
 v &= \underbrace{v_A + v_C + v_F}_{\text{vincoli assoluti}} + \underbrace{v_B + v_D + v_E}_{\text{vincoli relativi}} \\
 &= (2n_A - 1) + 2n_C + (2n_F - 1) + 2(n_B - 1) + 2(n_D - 1) + (2n_E - 3) \\
 &= 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 = 9,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si tratta, in effetti, di un vincolo doppio assoluto collocato in C , di due vincoli semplici assoluti collocati in A e F , di due vincoli doppi mutui (o relativi) collocati in B e D e di un vincolo semplice mutuo (o relativo) collocato in E , per un totale di nove gradi di vincolo, individuati in rosso in Figura 3.2.

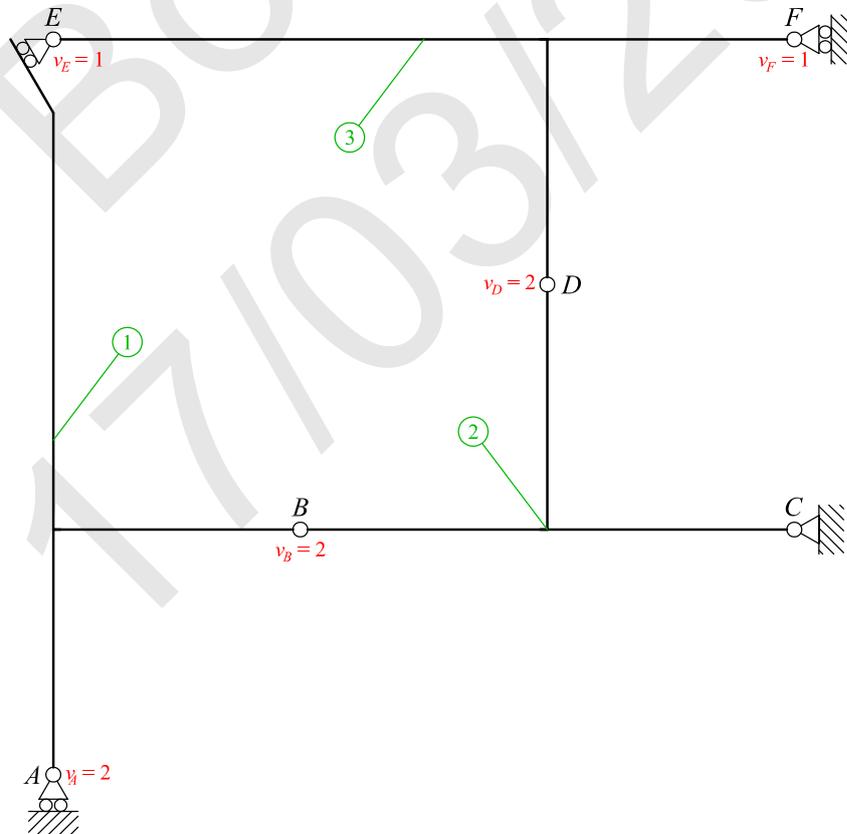


Figura 3.2: Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà della struttura assegnata.

Gradi di libertà

Ciascuna delle n aste (corpi rigidi) componenti la struttura possiede, nel piano, tre gradi di libertà. La struttura assegnata è caratterizzata da tre aste (convenzionalmente numerate, in verde, nella Figura 3.2) e quindi, in totale, da un numero di gradi di libertà l pari a:

$$l = 3n = 9. \quad (3.2)$$

Conclusione

Poiché il numero dei gradi di vincolo v , Eq. (3.1), eguaglia il numero dei gradi di libertà l , Eq. (3.2), la condizione necessaria di non labilità $v \geq l$ è rispettata. Non solo, poiché risulta $v = l$, la struttura si candida ad essere *cinematicamente isodeterminata*, in quanto vi è pareggio tra gradi di vincolo e gradi di libertà. Peraltro, occorre ora indagare se i vincoli risultano ben posti; il conteggio non è cioè di per sé sufficiente a garantire la non labilità della struttura assegnata.

3.1.2 Approccio analitico

L'*approccio analitico* è basato sulla scrittura esplicita di tutte le equazioni cinematiche di vincolo, tipicamente espresse in forma matriciale, e sullo studio successivo delle proprietà algebriche del sistema di equazioni lineari conseguentemente ottenuto.

Per l'applicazione pratica di suddetto metodo, è possibile procedere secondo due distinte modalità:

- Mediante analisi dello *schema "completo"*, basato sull'eliminazione di tutti i vincoli presenti e sulla caratterizzazione della configurazione assunta dall' i -esima asta componente la struttura, ad esempio attraverso tre coordinate libere u_i , v_i e φ_i riferite ad un suo generico punto. Vengono quindi scritte le equazioni di vincolo corrispondenti ai vincoli soppressi (la totalità in questo caso);
- Mediante analisi di *schema "ad albero"*, basato sull'eliminazione di alcuni vincoli opportuni (mirando ad ottenere il minor numero possibile di gradi di vincolo rimossi) e sulla caratterizzazione, in termini di coordinate libere assolute o relative, della configurazione assunta dallo schema così ottenuto. Poiché vengono scritte le equazioni di vincolo riguardanti i soli vincoli soppressi, lo scopo è quello di rimuovere dalla struttura di partenza un numero strettamente sufficiente di vincoli, al fine di eliminare (in gergo "aprire") tutte le maglie chiuse presenti nella struttura (incluso quelle formate dalla struttura con la terra).

La prima delle due modalità, certamente più sistematica ma potenzialmente più dispendiosa, poiché basata sulla rimozione di tutti i gradi di vincolo inizialmente presenti, comporta la stesura di un sistema avente un numero di equazioni v pari al numero dei gradi di vincolo v inizialmente conteggiati. In generale, può quindi risultare preferibile l'applicazione della seconda modalità, in quanto essa consente la gestione di un sistema di equazioni più ridotto, con un numero di equazioni v' pari a quello dei soli gradi di vincolo v' rimossi. Si coglie però l'occasione del presente esercizio, in cui il numero delle aste non risulta eccessivamente elevato, di introdurre, per confronto, la trattazione secondo ambedue le modalità.

Analisi dello schema “completo”

Nell’approccio analitico mediante schema “completo”, si opera rimuovendo *tutti* i vincoli applicati alla struttura inizialmente assegnata in Figura 3.1. Si ottiene quindi una sorta di “esploso” (il sistema di aste spogliato di tutti i vincoli), rappresentato in Figura 3.3, la cui ipotetica configurazione spostata dipende dalla posizione assunta da ciascuna delle aste componenti il sistema.

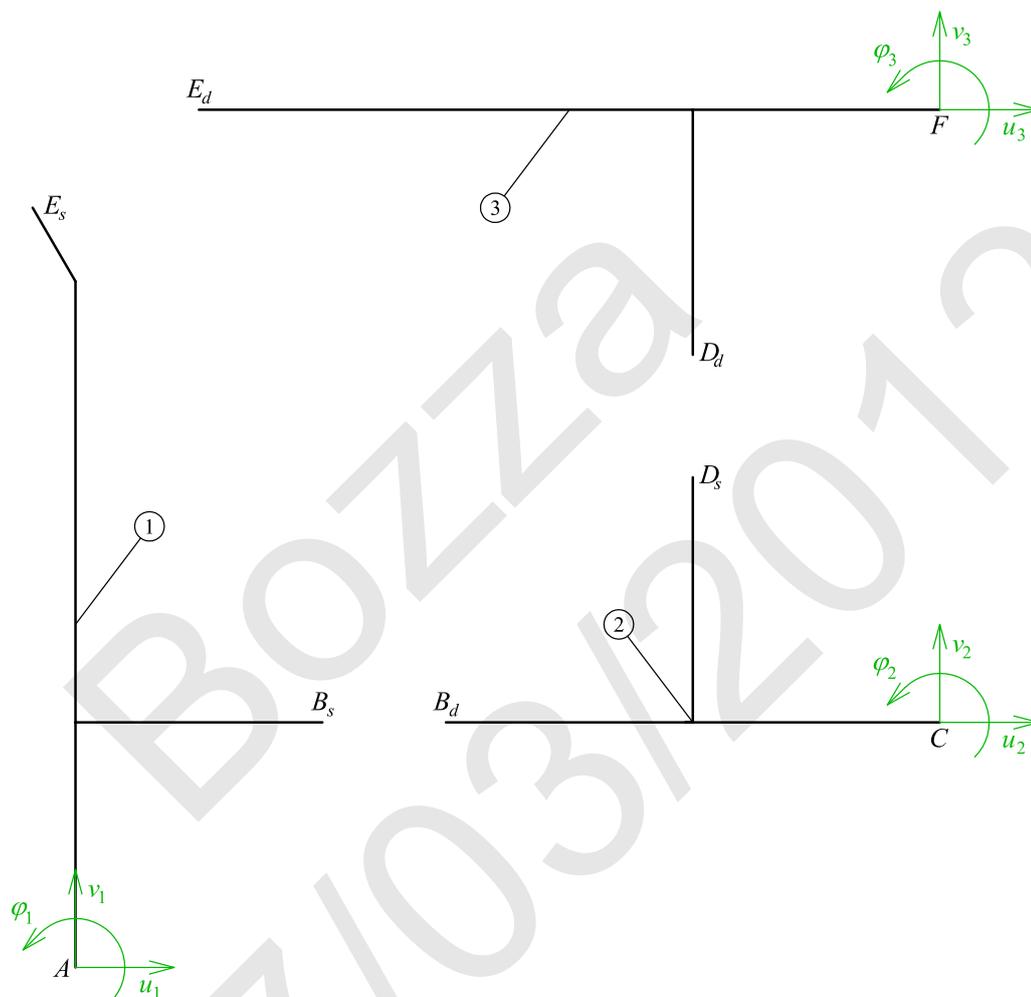


Figura 3.3: Schema “completo” adottato per l’analisi cinematica mediante approccio analitico. Tutti i vincoli sono stati rimossi e vengono assunti tre gradi di libertà per ogni asta, al fine di descrivere la cinematica del sistema “esploso” così ottenuto.

Poiché tutti i vincoli sono stati così rimossi, la posizione assunta da ogni asta è, a sua volta, indipendente da quella delle aste contigue e viene descritta mediante tre coordinate libere liberamente scelte, u_i , v_i e φ_i , rappresentate in verde ed indicanti rispettivamente la traslazione orizzontale, la traslazione verticale e la rotazione di ciascuna asta rispetto ad un suo punto arbitrario. Poiché il numero n di aste componenti la struttura è pari a tre, si tratta, in totale, di nove coordinate libere, giustamente coincidenti con i gradi di libertà $l = 3n$ espressi dall’Eq. (3.2). Per tutte e tre le aste, inoltre, le tre coordinate vengono collocate nel nodo originariamente vincolato a terra (nodo A per l’asta 1, nodo C per l’asta 2 e nodo F per l’asta 3). Tale scelta non è tassativa, ma risulta evidentemente conveniente, come verrà illustrato nel prosieguo della presente trattazione, la quale contemplerà di

seguito anche l'analisi di uno schema "ad albero", opportunamente derivato dal presente schema "completo".

Equazioni corrispondenti ai vincoli rimossi. Si introduce una descrizione qualitativa, propedeutica alla scrittura esplicita delle equazioni cinematiche di vincolo:

- dalla rimozione del carrello assoluto in A deriva un'unica equazione: spostamento verticale assoluto v_A del nodo A nullo (in direzione perpendicolare al piano di scorrimento del carrello stesso);
- dalla rimozione delle cerniera relativa in B derivano due equazioni: spostamento orizzontale relativo $\Delta u_B = u_{B_d} - u_{B_s}$ nullo, dato dalla differenza tra lo spostamento orizzontale del nodo B appartenente all'asta 2 (convenzionalmente indentificato come nodo B di destra ed indicato con B_d) e lo spostamento orizzontale del nodo B appartenente all'asta 1 (convenzionalmente indentificato come nodo B di sinistra ed indicato con B_s); analogamente, viene imposto nullo anche lo spostamento verticale relativo Δv_B , pari alla differenza $\Delta v_B = v_{B_d} - v_{B_s}$;
- dalla rimozione della cerniera assoluta in C derivano due equazioni: spostamento assoluto orizzontale u_C e verticale v_C del nodo C nulli;
- dalla rimozione della cerniera relativa in D derivano due equazioni: spostamento relativo in direzione orizzontale Δu_D e verticale Δv_D del nodo D nulli;
- dalla rimozione del carrello relativo in E deriva un'unica equazione: spostamento relativo tra il nodo E appartenente all'asta 3 ed il nodo E appartenente all'asta 1, misurato lungo la direzione n perpendicolare al piano di scorrimento del carrello stesso, nullo;
- della rimozione del carrello assoluto in F deriva un'unica equazione: spostamento orizzontale assoluto u_F del nodo F nullo (in direzione perpendicolare al piano di scorrimento del carrello stesso).

In termini matematici si ottiene un sistema composto da un numero di equazioni pari a nove, ossia pari al numero dei gradi di vincolo v inizialmente applicati alla struttura, secondo l'Eq. (3.1). Tali equazioni costituiscono la formulazione analitica delle limitazioni cinematiche apportate agli spostamenti nodali da parte dei vincoli, assoluti o relativi, precedentemente rimossi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{carrello in } A \longrightarrow v_A = 0 \\ \text{cerniera in } B \longrightarrow \begin{cases} \Delta u_B = u_{B_d} - u_{B_s} = 0 \\ \Delta v_B = v_{B_d} - v_{B_s} = 0 \end{cases} \\ \text{cerniera in } C \longrightarrow \begin{cases} u_C = 0 \\ v_C = 0 \end{cases} \\ \text{cerniera in } D \longrightarrow \begin{cases} \Delta u_D = u_{D_d} - u_{D_s} = 0 \\ \Delta v_D = v_{D_d} - v_{D_s} = 0 \end{cases} \\ \text{carrello in } E \longrightarrow \Delta n_E = n_{E_d} - n_{E_s} = 0 \\ \text{carrello in } F \longrightarrow u_F = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Da un'attenta analisi della descrizione qualitativa e del sistema di equazioni (3.3) ottenuto si evince che:

- il numero di equazioni cinematiche corrispondenti a ciascun vincolo rimosso coincide con il numero dei gradi di vincolo originariamente garantiti da ciascuno di essi (una equazione per un vincolo semplice, due equazioni per un vincolo doppio e tre equazioni per un vincolo triplo);
- nel caso di vincoli mutui o relativi, le equazioni cinematiche sono espresse in termini di differenza tra i contributi riguardanti le due estremità del vincolo stesso (convenzionalmente identificate come di *destra*, d , e di *sinistra*, s , con l'attribuzione del pedice d all'asta avente numerazione relativa più elevata).

Sistema di compatibilità o congruenza. Le equazioni cinematiche di vincolo raccolte nel Sistema (3.3) vengono ora espresse esplicitamente in funzione delle coordinate libere precedentemente introdotte ($u_1, v_1, \varphi_1; u_2, v_2, \varphi_2; u_3, v_3, \varphi_3$):

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 0 \\ u_2 - (u_1 - \varphi_1 b) = 0 \\ (v_2 - \varphi_2 2b) - (v_1 + \varphi_1 b) = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ (u_3 + \varphi_3 b) - (u_2 - \varphi_2 b) = 0 \\ (v_3 - \varphi_3 b) - (v_2 - \varphi_2 b) = 0 \\ (u_3 \cos \alpha + v_3 \sin \alpha - \varphi_3 3b \sin \alpha) = (u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha - \varphi_1 3b \cos \alpha) \\ u_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Poiché il numero di equazioni scritte dipende dal numero di gradi di vincolo v applicati alla struttura, mentre il numero di incognite è dovuto ai gradi di libertà l , si è ottenuto un sistema di nove equazioni di vincolo lineari ed omogenee (vincoli *perfetti*, come meglio approfondito più avanti), scritte in funzione di nove coordinate libere. Ciò in accordo col fatto che la struttura si candida ad essere cinematicamente isodeterminata, come concluso al Paragrafo 3.1.1 dedicato al primo passo dell'analisi cinematica.

Nodo E . La stesura dell'equazione cinematica di vincolo riguardante il carrello relativo posto in E merita qualche approfondimento. Come anticipato inizialmente, infatti, l'equazione di vincolo prevede che la differenza tra lo spostamento del nodo E di destra (relativo all'asta 3 ed indicato con E_d) e quello del nodo E di sinistra (relativo all'asta 1 ed indicato con E_s) sia nullo lungo la direzione n (ossia la direzione normale al piano di scorrimento del carrello stesso, coincidente col suo asse ed avente quindi inclinazione α rispetto all'orizzontale). Per convenzione però, le sei coordinate libere atte a descrivere la configurazione spostata delle due aste convergenti nel nodo E (u_1, v_1, φ_1 per l'asta 1; u_3, v_3, φ_3 per l'asta 3) sono applicate con riferimento al sistema globale x, y ; conseguentemente, anche i contributi di spostamento rilevabili sui due lati del nodo E sono più facilmente individuabili rispetto a tale sistema. Per la stesura dell'equazione cinematica di vincolo $\Delta n_E = 0$ si possono considerare, quindi, le proiezioni lungo la direzione n di tali contributi.

In Figura 3.4 si riporta una costruzione grafica utile alla stesura dell'equazione di vincolo in esame: nella parte (a) è rappresentata l'estremità d'interesse dell'asta 1 (nodo E di sinistra, E_s); nella parte (b) quella dell'asta 3 (nodo E di destra, E_d). In verde sono poi riportati i contributi di spostamento rappresentati secondo il sistema di riferimento globale x, y , completi di tratteggio atto a fornire una rappresentazione grafica della loro

proiezione lungo la direzione n (i versi sono attribuiti e rappresentati ipotizzando positivi i valori assunti da tutte le coordinate libere coinvolte). In rosso sono infine riportati i vettori risultanti, uno per ciascuna delle due parti (destra e sinistra) del nodo E , dati dalla sommatoria algebrica dei singoli contributi precedentemente proiettati (il segno di ciascun termine è attribuito considerando positive le proiezioni orientate secondo il verso dell'asse n e negative quelle aventi verso opposto).

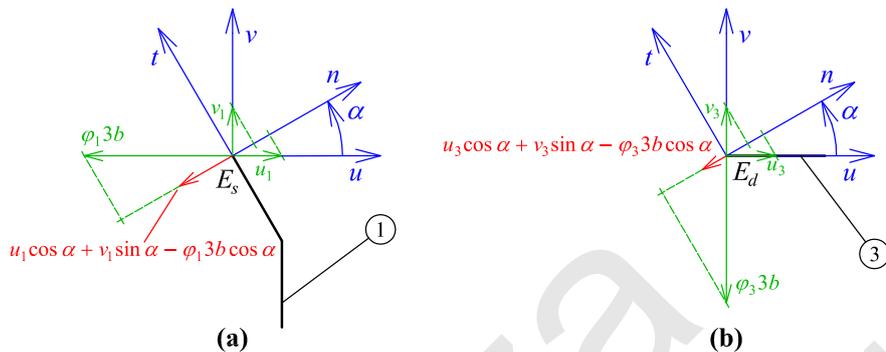


Figura 3.4: Dettaglio dei termini nell'equazione cinematica di vincolo al nodo E .

Quanto rappresentato graficamente in Figura 3.4 corrisponde al prodotto scalare:

$$\Delta n_E = \Delta \mathbf{s}_E \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{s}_{E_d} - \mathbf{s}_{E_s}) \cdot \mathbf{n} = (u_{E_d} - u_{E_s}) \cos \alpha - (v_{E_d} - v_{E_s}) \sin \alpha = 0, \quad (3.5)$$

ove $\Delta \mathbf{s}_E$ costituisce il vettore differenza tra lo spostamento del nodo E appartenente all'asta 3 (nodo E di destra, E_d) e quello appartenente all'asta 1 (nodo E di sinistra, E_s), mentre $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ indica il versore normale al piano di scorrimento del carrello in E (disteso quindi lungo l'asse del carrello in E).

Forma matriciale. Si procede alla riscrittura, in forma matriciale, del Sistema (3.4), ordinando convenientemente i contributi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Quanto ottenuto costituisce il *sistema di compatibilità* o *congruenza completo*, in cui:

- \mathbf{u} rappresenta il vettore dei gradi di libertà assunti, avente numero di righe pari ai gradi di libertà $l = 3n$ dell'intero "esploso":

$$\mathbf{u}^T = \{ u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \varphi_3 \};$$

- \mathbf{v} rappresenta il vettore delle componenti di spostamento corrispondenti ai vincoli rimossi (dei quali occorre imporre il rispetto mediante la scrittura dell'equazione di vincolo corrispondente), avente numero di righe pari ai gradi di vincolo rimossi per ottenere l'intero sistema "esploso", quindi pari al numero di gradi di vincolo v totali:

$$\mathbf{v}^T = \{ v_A \quad \Delta u_B \quad \Delta v_B \quad u_C \quad v_C \quad \Delta u_D \quad \Delta v_D \quad s_E \quad u_F \};$$

- \mathbf{C} rappresenta la cosiddetta *matrice di congruenza* (o di *compatibilità*) *completa*, avente dimensione pari a $v \times l$, la quale esprime il legame lineare tra \mathbf{v} ed \mathbf{u} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -b & 0 & 1 & -2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & b & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & b & 0 & 1 & -b \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & 3b \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & -3b \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nell'imposizione del rispetto cinematico dei vincoli presenti, il vettore \mathbf{v} è posto eguale a zero, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, poiché i vincoli rimossi sono considerati *perfetti*, ossia *non cedevoli* (spostamenti nulli, coerentemente con la tipologia di vincolo presente).

Proprietà del sistema di compatibilità. Il numero dei gradi di labilità $L \geq 0$ di una generica struttura è rappresentato dalla dimensione del *nucleo* o *kernel* $N[\mathbf{C}]$ della matrice di compatibilità o congruenza \mathbf{C} associata alla struttura stessa, ossia dall'insieme dei vettori $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, soluzioni non banali del sistema lineare omogeneo $\mathbf{v} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$. La dimensione del nucleo $N[\mathbf{C}]$ è quindi pari al numero dei vettori soluzione $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, a sua volta dato dalla differenza tra il numero di incognite del sistema, pari al numero dei gradi di libertà $l = 3n$ della struttura assegnata, ed il rango $r[\mathbf{C}]$:

$$L = N[\mathbf{C}] = l - r[\mathbf{C}], \quad (3.7)$$

ove il rango $r[\mathbf{C}]$ è l'intero che esprime l'ordine massimo dei minori complementari non nulli estraibili dalla matrice \mathbf{C} e rappresenta il massimo numero di righe o di colonne linearmente indipendenti di \mathbf{C} . In generale, la matrice di congruenza completa \mathbf{C} può evidentemente avere rango $r[\mathbf{C}]$ pari, al massimo, alla sua dimensione minima:

$$r[\mathbf{C}] \leq \min\{l = 3n, v\} \quad (3.8)$$

Pertanto:

- Se $v < l$ la matrice \mathbf{C} è rettangolare bassa (numero di righe inferiore al numero di colonne) ed il suo rango $r[\mathbf{C}]$ è al più pari al numero dei gradi di vincolo v , quindi certamente inferiore al numero dei gradi di libertà l della struttura assegnata ($r[\mathbf{C}] \leq v < l$); la struttura stessa risulta quindi certamente labile ($L > 0$) e si dice *cinematicamente ipodeterminata*. In altre parole si ritrova analiticamente la condizione necessaria di non labilità $v \geq l$, inizialmente verificata.
- Se $v \geq l$, invece, la matrice \mathbf{C} ha forma quadrata (se $v = l$) o rettangolare alta (se $v > l$) ed il suo rango $r[\mathbf{C}]$ è al più pari al numero dei gradi di libertà l della struttura assegnata ($r[\mathbf{C}] \leq l$); la struttura stessa è quindi non labile ($L = 0$), cioè determinata, se, e soltanto se, la matrice \mathbf{C} è di rango pieno; viceversa si producono delle labilità (sistema indeterminato). In particolare, se il numero dei gradi di vincolo eguaglia il numero dei gradi di libertà e la matrice di compatibilità risulta di rango pieno ($v = l$ e $r[\mathbf{C}] = l$), la struttura si dice *cinematicamente*

isodeterminata ($v = l, L = 0$); se, invece, il numero dei gradi di vincolo supera quello dei gradi di libertà ($v > l$ e $r[\mathbf{C}] = l$), la struttura si dice *cinematicamente iperdeterminata* ($v > l, L = 0$).

Nel caso in esame, grazie alla coincidenza tra gradi di vincolo v e gradi di libertà l , è quindi sufficiente verificare che la matrice \mathbf{C} sia di rango pieno per concludere che la struttura assegnata risulti cinematicamente isodeterminata. Non solo, grazie alla forma quadrata della matrice \mathbf{C} stessa, si ha rango pieno se e soltanto se il suo determinante $|\mathbf{C}|$ (anche indicato con $\det[\mathbf{C}]$) risulta non nullo. In altre parole, il sistema lineare omogeneo $\mathbf{v} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ammette soluzioni non banali $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ se, e soltanto se, la matrice di congruenza \mathbf{C} ha determinante $|\mathbf{C}| = 0$. La presenza di soluzioni non banali (possibili quindi solo con $|\mathbf{C}| = 0$) sta a significare che esistono vettori soluzione \mathbf{u}_i caratterizzanti configurazioni spostate coerenti con i vincoli presenti. Ciò denuncia la labilità del sistema e ne caratterizza pienamente la configurazione cinematica.

Determinante della matrice \mathbf{C} . Come noto, il determinante della matrice \mathbf{C} può essere determinato sommando i prodotti degli elementi C_{ij} di una qualunque linea (riga i o colonna j) per i loro *complementi algebrici* c_{ij} . Ciascun complemento algebrico c_{ij} equivale, a sua volta, al *minore complementare* m_{ij} , preso tal quale se l'elemento C_{ij} considerato è di classe pari (la somma tra gli indici i e j dà cioè luogo ad un numero pari) o cambiato di segno se di classe dispari (somma $i + j$ dispari). Ricordando che il minore complementare m_{ij} corrisponde al determinante della matrice costruita sopprimendo, dalla matrice \mathbf{C} di partenza, la i -esima riga e la j -esima colonna corrispondenti all'elemento ij considerato, lo sviluppo del calcolo di $|\mathbf{C}|$ può essere ridotto a:

$$|\mathbf{C}| = - \begin{vmatrix} -1 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 1 & -b \\ -\cos \alpha & 3b \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & -3b \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

Sviluppando il calcolo del minore complementare rimanente lungo la seconda riga, si perviene alla sommatoria tra due distinti contributi:

$$|\mathbf{C}| = -(-1)^{(2+2)}(-b) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & b & 1 & -b \\ -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha & -3b \sin \alpha \end{vmatrix} +$$

$$-(-1)^{(2+3)}(-2b) \begin{vmatrix} -1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ -\cos \alpha & 3b \cos \alpha & \sin \alpha & -3b \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

Poiché ciascuna sottomatrice è caratterizzata dalla presenza di una riga in cui tutti gli elementi sono nulli eccetto uno, si procede al calcolo del determinante lungo tale linea ottenendo:

$$|\mathbf{C}| = -b \underbrace{\begin{vmatrix} b & 0 & b \\ b & 1 & -b \\ 0 & \sin \alpha & -3b \sin \alpha \end{vmatrix}}_{c_1} + 2b^2 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos \alpha & 3b \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}}_{c_2}. \quad (3.9)$$

Si è quindi giunti alla somma di due termini proporzionali a minori complementari del terz'ordine. Questi ultimi possono essere sviluppati come in precedenza. Alternativamente, i minori c_1 e c_2 , possono essere calcolati utilizzando la regola di Sarrus: si accostano, a destra della matrice ottenuta, la prima e la seconda colonna; poi si sommano i prodotti degli elementi che si trovano sulla diagonale principale della matrice e su quelle ad essa parallele; infine si sottraggono i prodotti degli elementi che si trovano sulla diagonale secondaria e su quelle ad essa parallele:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc|cc}
 b & 0 & b & b & 0 \\
 b & 1 & -b & b & 1 \\
 0 & \sin \alpha & -3b \sin \alpha & 0 & \sin \alpha
 \end{array} \right| \\
 c_1 = -3b^2 \sin \alpha + 0 + b^2 \sin \alpha - 0 + b^2 \sin \alpha - 0 = -b^2 \sin \alpha.
 \end{array} \quad (3.10)$$

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc|cc}
 -1 & b & 0 & -1 & b \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -\cos \alpha & 3b \cos \alpha & \sin \alpha & -\cos \alpha & 3b \cos \alpha
 \end{array} \right| \\
 c_2 = 0 - b \cos \alpha + 0 - 0 + 3b \cos \alpha - 0 = 2b \cos \alpha.
 \end{array} \quad (3.11)$$

Il determinante $|\mathbf{C}|$ della matrice di congruenza o di compatibilità \mathbf{C} risulta quindi espresso, in termini dell'angolo α di inclinazione dell'asse del carrello in E , dalla seguente funzione trigonometrica:

$$|\mathbf{C}| = -b(-b^2 \sin \alpha) - 2b^2(2b \cos \alpha) = b^3(\sin \alpha - 4 \cos \alpha). \quad (3.12)$$

Rango della matrice \mathbf{C} . Grazie al già citato pareggio tra gradi di vincolo v e gradi di libertà l , la matrice di congruenza \mathbf{C} (quadrata e di dimensione pari a nove) risulta di rango pieno se, e soltanto se, il suo determinante $|\mathbf{C}|$ risulta non nullo. Non solo, poiché un suo minore di ordine otto è certamente diverso da zero (si consideri, ad esempio, la sottomatrice ottenuta eliminando, dalla matrice \mathbf{C} stessa, l'ottava riga e l'ultima colonna, ovvero il minore complementare m_{89}), il rango $r[\mathbf{C}]$ sarà pari a otto o nove a seconda che il determinante della matrice \mathbf{C} stessa sia, oppure no, nullo. A sua volta, dall'Eq. (3.12) si evince che il determinante della matrice di congruenza completa \mathbf{C} si annulla quando:

$$\sin \alpha - 4 \cos \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \tan \alpha = 4. \quad (3.13)$$

Quindi, riassumendo:

$$r[\mathbf{C}] = \begin{cases} 9 & \text{se } \alpha \neq \arctan(4) \\ 8 & \text{se } \alpha = \arctan(4) \end{cases} \quad (3.14)$$

Conclusione. Si richiama l'Eq. (3.7), utile al calcolo dei gradi di labilità L della struttura assegnata, in funzione delle proprietà algebriche del sistema di compatibilità o congruenza associato all'“esplosivo” della struttura stessa. Poiché, nello specifico, il numero dei gradi di libertà l è pari a nove, mentre il rango $r[\mathbf{C}]$ assume valore pari a otto o nove in funzione del valore assunto dall'angolo α , la struttura assegnata può avere al più un grado di labilità ($0 \leq L \leq 1$). Ciò significa che con un angolo di inclinazione α del carrello posto in E diverso da $\arctan(4)$ la struttura è fissa a terra; viceversa, se $\alpha = \arctan(4)$,

il sistema risulta labile e la definizione della configurazione spostata dipende da un solo parametro (o *coordinata libera*, o *lagrangiana* o *grado di libertà residuo*).

In conclusione:

$$\underbrace{v = l = 9}_{\text{C.N. di non labilità}} + \begin{cases} \alpha \neq \arctan(4) \longrightarrow \text{struttura cinematicamente} \\ \hspace{1.5cm} \text{isodeterminata (non labile),} \\ \alpha = \arctan(4) \longrightarrow \text{strutt. cinem. indeterminata} \\ \hspace{1.5cm} \text{(una volta labile, } L = 1\text{).} \end{cases} \quad (3.15)$$

Schema “ad albero” (non ottimale)

Nell’approccio analitico mediante schema “ad albero”, si opera rimuovendo dalla struttura inizialmente assegnata in Figura 3.1 solo un numero di vincoli sufficiente, possibilmente *strettamente* sufficiente, al fine di eliminare (in gergo “aprire”) tutte le maglie chiuse della struttura (incluso quelle eventualmente fornite dalla struttura con la *terra*). Conseguentemente, si ottiene un meccanismo certamente labile la cui configurazione dipende da un numero l' di coordinate libere. In funzione di tali coordinate libere vengono quindi espresse le equazioni cinematiche di vincolo, in corrispondenza dei vincoli rimossi, concettualmente analoghe a quelle utilizzate nello schema “completo”, ma ora riguardanti solamente i gradi di vincolo rimossi. Pertanto, l’approccio analitico mediante schema “ad albero”, poiché basato sulla stesura di equazioni unicamente riferite ai vincoli rimossi al fine di eliminare tutte le maglie chiuse inizialmente presenti nella struttura, consente la scrittura di un sistema di compatibilità o congruenza *ridotto*, maggiormente compatto rispetto allo schema “completo”; la strategia più opportuna per l’applicazione di tale metodo si basa conseguentemente sulla rimozione del minor numero possibile di gradi di vincolo (mantenimento del maggior numero possibile di gradi di vincolo), allo scopo di eliminare le suddette maglie chiuse.

Nel caso in esame però, nonostante la configurazione della struttura inizialmente assegnata in Figura 3.1 suggerisca di eliminare le maglie chiuse rimuovendo solamente i tre gradi di vincolo corrispondenti ai tre carrelli posti in A , E e F , si procede dapprima rimuovendo tutti i vincoli mutui o relativi, come rappresentato in Figura 3.5. Si tratta quindi di uno schema “ad albero” in cui si è mantenuto un punto vincolato a terra per ciascuna delle tre aste che lo compongono, ed in cui si sono rimossi tutti i vincoli relativi tra di esse. Lo schema così ottenuto è ancora uno schema “ad albero” (si noti l’assenza di maglie chiuse); inoltre, le coordinate libere residue $l' = 5$ risultano formare un sottoinsieme di quelle introdotte in Figura 3.3 per lo schema “completo”: $u_1, \varphi_1, \varphi_2, v_3, \varphi_3$. In questo modo si otterrà una matrice di congruenza ridotta \mathbf{C}' che sarà sottomatrice di quella completa \mathbf{C} . Lo schema “ad albero” ulteriormente ottimizzato sarà invece trattato successivamente, con relativa illustrazione in Figura 3.6.

Equazioni di vincolo riferite ai vincoli rimossi. I vincoli rimossi per la realizzazione dello schema “ad albero” rappresentano, a prescindere dallo schema prescelto, un sottogruppo di tutti i vincoli inizialmente applicati alla struttura; si ottiene quindi un sistema composto da un sottogruppo delle equazioni del Sistema (3.3) ed in numero pari

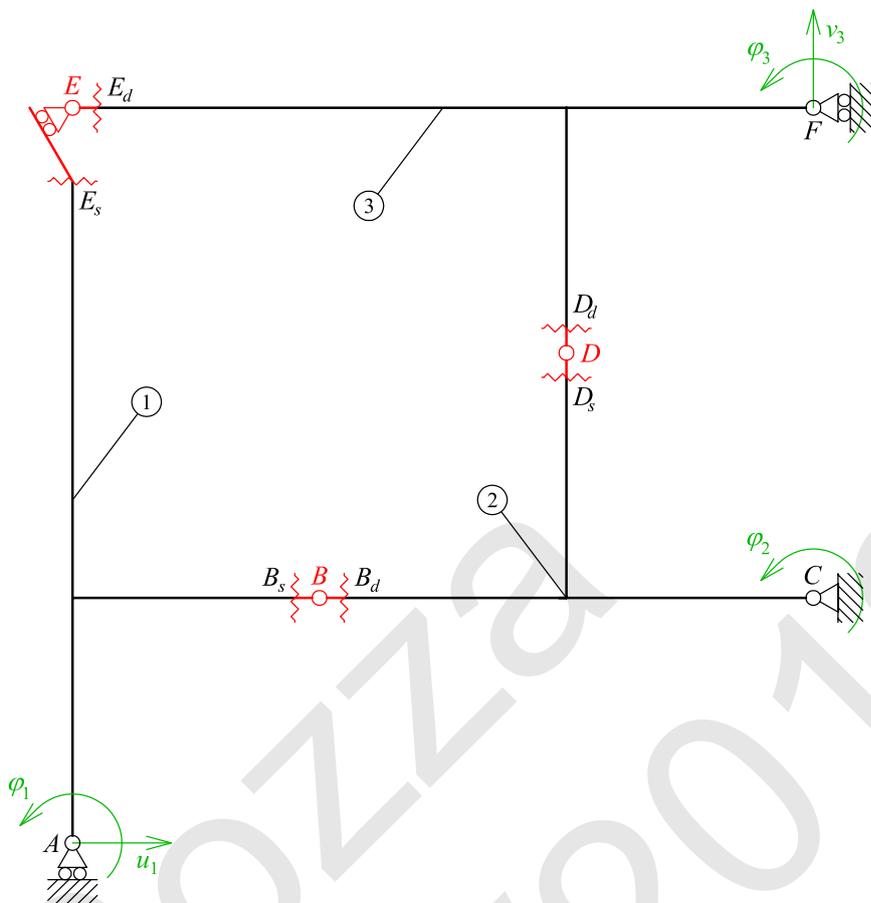


Figura 3.5: Schema “ad albero” (non ottimale) adottato per l’analisi cinematica mediante approccio analitico, relativo a sottosistema del sistema di congruenza completo.

ai gradi di vincolo v' rimossi, ossia cinque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cerniera in } B \longrightarrow \\ \text{cerniera in } D \longrightarrow \\ \text{carrello in } E \longrightarrow \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_B = u_{B_d} - u_{B_s} = 0 \\ \Delta v_B = v_{B_d} - v_{B_s} = 0 \\ \Delta u_D = u_{D_d} - u_{D_s} = 0 \\ \Delta v_D = v_{D_d} - v_{D_s} = 0 \\ \Delta n_E = n_{E_d} - n_{E_s} = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Poiché tutti i vincoli rimossi sono, nel caso in esame, di tipo mutuo o relativo, le rispettive equazioni cinematiche sono tutte espresse come differenza tra i contributi d ed s riguardanti le due estremità (destra e sinistra) delle aste convergenti nel vincolo stesso. In accordo con la convenzione già introdotta nella soluzione commentata a proposito dello schema “completo”, si assegna il pedice d (destra) all’asta avente numerazione relativa più elevata.

Sistema di compatibilità o congruenza ridotto. Le equazioni cinematiche di vincolo raccolte nel Sistema (3.16) vengono ora espresse in funzione delle coordinate libere

residue caratterizzanti lo schema “ad albero” adottato ($u_1, \varphi_1, \varphi_2, v_3$ e φ_3):

$$\begin{cases} -(u_1 - \varphi_1 b) = 0 \\ (-\varphi_2 2b) - (\varphi_1 b) = 0 \\ (\varphi_3 b) - (-\varphi_2 b) = 0 \\ (v_3 - \varphi_3 b) - (-\varphi_2 b) = 0 \\ (v_3 \sin \alpha - \varphi_3 3b \sin \alpha) - (u_1 \cos \alpha - \varphi_1 3b \cos \alpha) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Poiché il numero di equazioni scritte dipende dal numero dei gradi di vincolo v' rimossi, mentre il numero di incognite è dovuto al numero di gradi di libertà residui l' dello schema “ad albero”, si è ottenuto un sistema lineare ed omogeneo di cinque equazioni in cinque incognite. In altre parole, poiché lo schema “ad albero” è stato ricavato da una struttura di partenza potenzialmente cinematicamente isodeterminata, viene mantenuto il pareggio tra numero di equazioni di vincolo e numero di incognite cinematiche, anche nel sistema di congruenza ridotto.

Non solo, grazie al fatto che le coordinate libere adottate per descrivere la configurazione assunta dallo schema “ad albero” sono un sottoinsieme delle coordinate libere introdotte per lo schema “completo”, il Sistema (3.17) (ridotto) risulta parente stretto del Sistema (3.4) (completo): esso può infatti essere ottenuto eliminando, da quello di partenza, le equazioni relative ai vincoli non rimossi ed eliminando, dalle colonne i termini corrispondenti alle coordinate libere non più adottate. In altre parole, i vettori \mathbf{u}' e \mathbf{v}' del sistema ridotto, come di seguito introdotto, sono sottovettori dei precedenti \mathbf{u} e \mathbf{v} ; analogamente, la matrice \mathbf{C}' risulta sottomatrice di \mathbf{C} .

Forma matriciale del sistema ridotto. Si procede alla riscrittura, in forma matriciale, del Sistema (3.17):

$$\mathbf{v}' = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

Quanto ottenuto costituisce il *sistema di congruenza o compatibilità ridotto*, in cui:

- \mathbf{u}' rappresenta il vettore ridotto dei gradi di libertà, avente numero di righe pari ad l' :

$$\mathbf{u}' = \{ u_1 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad v_3 \quad \varphi_3 \}^T;$$

- \mathbf{v}' rappresenta il vettore ridotto delle componenti di spostamento corrispondenti ai vincoli rimossi, avente numero di righe pari a v' :

$$\mathbf{v}' = \{ \Delta u_B \quad \Delta v_B \quad \Delta u_D \quad \Delta v_D \quad s_E \}^T;$$

- \mathbf{C}' rappresenta la matrice di congruenza (o di compatibilità) ridotta, avente dimensione $v' \times l'$:

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} -1 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 1 & -b \\ -\cos \alpha & 3b \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & -3b \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Grazie alla “parentela” algebrica tra il Sistema (3.17), riferito allo schema “ad albero”, ed il Sistema (3.4), riferito allo schema “completo”, si ottiene evidentemente una matrice di compatibilità o congruenza ridotta \mathbf{C}' sottomatrice di quella completa \mathbf{C} . Le proprietà algebriche di \mathbf{C}' , equivalenti a quelle di \mathbf{C} , condizionano le proprietà del sistema algebrico ottenuto e quindi quella del sistema strutturale di partenza.

Sistema lineare omogeneo. Analogamente alla modalità basata sull'utilizzo di uno schema “completo”, l'insieme delle equazioni di vincolo, riscritte in forma matriciale, ha dato luogo ad un sistema lineare omogeneo $\mathbf{v}' = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{0}$, assai più compatto di quello di partenza. La presenza di eventuali soluzioni non banali (per $|\mathbf{C}'| = 0$), sta a significare che esistono dei vettori soluzione \mathbf{u}'_i , contententi i valori assunti dalle coordinate libere, affinché la struttura assegnata assuma configurazioni spostate coerenti con i vincoli presenti.

Determinante e rango della matrice \mathbf{C}' . Il determinante della matrice di compatibilità o congruenza ridotta \mathbf{C}' risulta, a meno del segno, coincidente con quello della matrice di compatibilità o congruenza completa \mathbf{C} :

$$|\mathbf{C}'| = b^3(4 \cos \alpha - \sin \alpha). \quad (3.19)$$

Il suo rango è invece pari al più alla sua dimensione ($v' = l' = 5$):

$$r[\mathbf{C}'] = \begin{cases} 5 & \text{se } \alpha \neq \arctan(4) \\ 4 & \text{se } \alpha = \arctan(4) \end{cases} \quad (3.20)$$

Conclusioni. Il numero dei gradi di libertà L del sistema dato è, in analogia con quanto già descritto per lo schema “completo”, pari alla differenza tra il numero di coordinate libere l' necessarie alla descrizione della configurazione assunta dallo schema “ad albero” ed il rango $r[\mathbf{C}']$ della matrice di congruenza o compatibilità ridotta \mathbf{C}' (numero delle incognite del sistema di congruenza ridotto):

$$L = l' - r[\mathbf{C}']. \quad (3.21)$$

Poiché il numero dei gradi di libertà l' è pari a cinque, mentre il rango $r[\mathbf{C}']$ assume valore pari a quattro o cinque in funzione del valore assunto dall'angolo α , la struttura assegnata può avere al più un grado di libertà. Coerentemente con quanto già concluso in precedenza, ciò significa che con un angolo di inclinazione α del carrello posto in E diverso da $\arctan(4)$ il sistema è fisso a terra; viceversa, se $\alpha = \arctan(4)$, il sistema è labile e la definizione della configurazione spostata dipende da un solo parametro libero ($L = 1$).

Con lo schema ridotto si è quindi conservato il “cuore” della matrice \mathbf{C} e delle proprietà algebriche ad essa associate, cioè delle proprietà algebriche del sistema di equazioni di congruenza della struttura assegnata. Evidentemente, il sistema risulta tanto più ridotto, tanto più l' risulta inferiore ad l . Qui si è proceduto con $l' = 5$ (già inferiore ad $l = 9$), ma è ulteriormente possibile procedere con un sistema ancor più ridotto, avente tre sole incognite ($l' = 3$), come illustrato di seguito.

Schema “ad albero” ottimale

Nella presente sezione si propone uno schema “ad albero” ottimale, alternativo a quello di Figura 3.5, anch'esso ottenuto rimuovendo tutte le maglie chiuse formate dalla struttura inizialmente assegnata in Figura 3.1 ma mantenendo un unico “piede” a terra. A differenza dello schema precedente, presentato al fine di mostrare come la matrice di congruenza ridotta \mathbf{C}' possa risultare sottomatrice di quella completa \mathbf{C} , quello qui proposto è ricavato mediante la rimozione del minor numero possibile di gradi di vincolo, al fine di ottenere

un sistema di congruenza ridotto il più compatto possibile, tra quelli che prevedono il mantenimento di un unico “piede” a terra.

Per giungere allo scopo può, in generale, risultare utile intervenire secondo due passi:

1. si eliminano dapprima le maglie chiuse formate con la terra, mediante la rimozione di tutti i vincoli assoluti, eccetto uno, tra quelli che forniscono il maggior numero di gradi di vincolo v (si mantiene quindi un unico “piede” a terra, avente gradi di vincolo il maggiore possibile);
2. si eliminano tutte le maglie chiuse interne alla struttura, mediante l’apertura di tutti gli anelli interni in prossimità del vincolo più “blando” (cioè con minor grado di vincolo introdotto).

Nello specifico, si opera quindi rimuovendo, in prima istanza, i vincoli assoluti corrispondenti ai due carrelli posti in A ed F (vincoli assoluti semplici, più “blandi” rispetto alla cerniera in C , conservata inalterata) e, successivamente, il vincolo carrello relativo in E (il più “blando” tra i vincoli relativi che, collegando mutuamente le aste 1, 2 e 3, formano con esse un anello chiuso interno alla struttura di partenza).

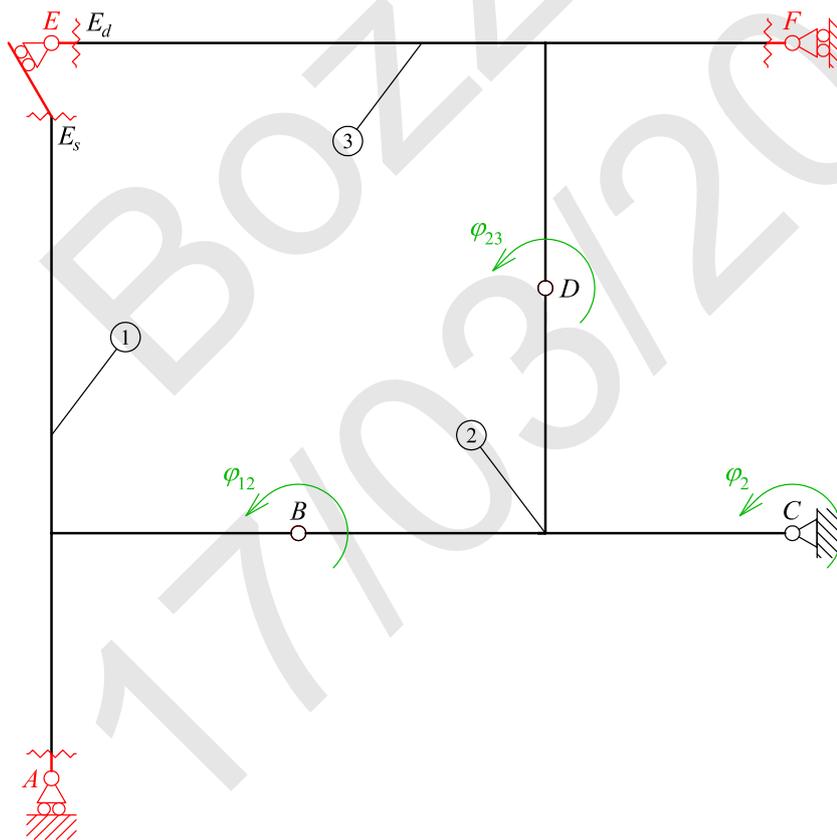


Figura 3.6: Schema “ad albero” ottimale, adottato per l’analisi cinematica mediante approccio analitico.

Il meccanismo conseguentemente ottenuto, rappresentato in Figura 3.6, costituisce una schema tre volte labile, incernierato a terra in C e dotato di ulteriori due svincoli semplici interni in B ed in D . Le coordinate libere atte a descriverne la configurazione assunta sono pari a tre, ad esempio: φ_2 , φ_{12} e φ_{32} , indicanti rispettivamente la rotazione

dell'intera struttura attorno al punto C , la rotazione relativa tra l'asta 1 e l'asta 2 rispetto a B e la rotazione relativa tra l'asta 3 e l'asta 2 rispetto a D .

Equazioni di vincolo riferite ai vincoli rimossi. I vincoli rimossi per la costruzione dello schema “ad albero” rappresentano, a prescindere dallo schema prescelto, un sottogruppo di tutti i vincoli inizialmente applicati alla struttura; si ottiene quindi un sistema composto da una parte delle equazioni del Sistema (3.3) ed in numero pari ai gradi di vincolo v' rimossi, ossia dalle tre equazioni:

$$\begin{cases} \text{carrello in } A & \longrightarrow & v_A = 0 \\ \text{carrello in } E & \longrightarrow & \Delta n_E = n_{E_d} - n_{E_s} = 0 \\ \text{carrello in } F & \longrightarrow & u_F = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

In altre parole, ogni vettore ridotto \mathbf{v}' risulterà sottovettore del vettore \mathbf{v} completo.

Sistema di compatibilità o congruenza ridotto (ottimale). Le tre equazioni cinematiche di vincolo, raccolte nel Sistema (3.22), vengono quindi espresse in funzione delle tre coordinate libere residue l' caratterizzanti lo schema “ad albero” ottimale adottato ($\varphi_2, \varphi_{12}, \varphi_{32}$); si ottiene quindi un sistema di tre equazioni cinematiche di vincolo scritte in funzione delle tre coordinate libere stesse:

$$\begin{cases} -\varphi_2 3b - \varphi_{12} b = 0 \\ (-\varphi_{32} b \cos \alpha - \varphi_{32} 2b \sin \alpha) - (-\varphi_{12} 2b \cos \alpha - \varphi_{12} b \sin \alpha) = 0 \\ -\varphi_2 2b - \varphi_{32} b = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Poiché le coordinate libere qui adottate non rappresentano, a differenza dello schema “ad albero” non ottimale precedentemente adottato, un sottogruppo delle coordinate libere caratterizzanti lo schema “completo”, il sistema di compatibilità o congruenza ridotto così ottenuto non ha più una relazione diretta con quello completo iniziale. In pratica, \mathbf{u}' non risulta sempre sottovettore di \mathbf{u} , indipendentemente dalle scelte effettuate, quindi \mathbf{C}' non sempre risulterà sottomatrice di \mathbf{C} . Peraltro, ciò non influenzerà evidentemente le proprietà algebriche del sistema ottenuto, ascrivibili a quelle della matrice compatta \mathbf{C}' .

Prima nota operativa: spostate elementari. Per facilitare la stesura delle equazioni cinematiche di vincolo, può essere utile procedere per via grafica indicando, come rappresentato in Figura 3.7, le spostate elementari corrispondenti all’“attivazione” separata ed indipendente dei gradi di libertà l' assunti. In altre parole, partendo dallo schema “ad albero” di Figura 3.6, si procede allo “scongelo” di un solo grado di vincolo alla volta (cioè all’attivazione del singolo svincolo presente nella catena cinematica dello schema “ad albero”), andando poi a rilevare lo spostamento di ciascun punto di interesse. Per esempio, dall’applicazione di una rotazione antioraria arbitraria φ_2 derivano, come raffigurato nella parte (a) di Figura 3.7, uno spostamento verticale v_A del nodo A pari a $-3\varphi_2 b$ (diretto verso il basso e quindi negativo) ed uno spostamento orizzontale u_F del nodo F pari a $-2\varphi_2 b$ (diretto verso sinistra e quindi anch’esso negativo); evidentemente nessuno spostamento relativo interessa invece le due estremità delle aste 1 e 3 in corrispondenza del nodo E , in quanto la coordinata libera d’interesse φ_2 è applicata a monte della diramazione della struttura ed influisce in egual modo sia sulla parte di destra che su quella di sinistra del vincolo (rotazione rigida di tutto il sistema). Viceversa, in seguito

allo “scongelo” delle coordinate libere φ_{12} e φ_{32} si produce invece uno spostamento relativo tra le due estremità delle aste stesse in corrispondenza del nodo E ; nel primo caso, raffigurato nella parte (b) di Figura 3.7, a causa dell’attivazione della sola asta 1, nel secondo caso, raffigurato nella parte (c), a causa dell’attivazione della sola asta 3.

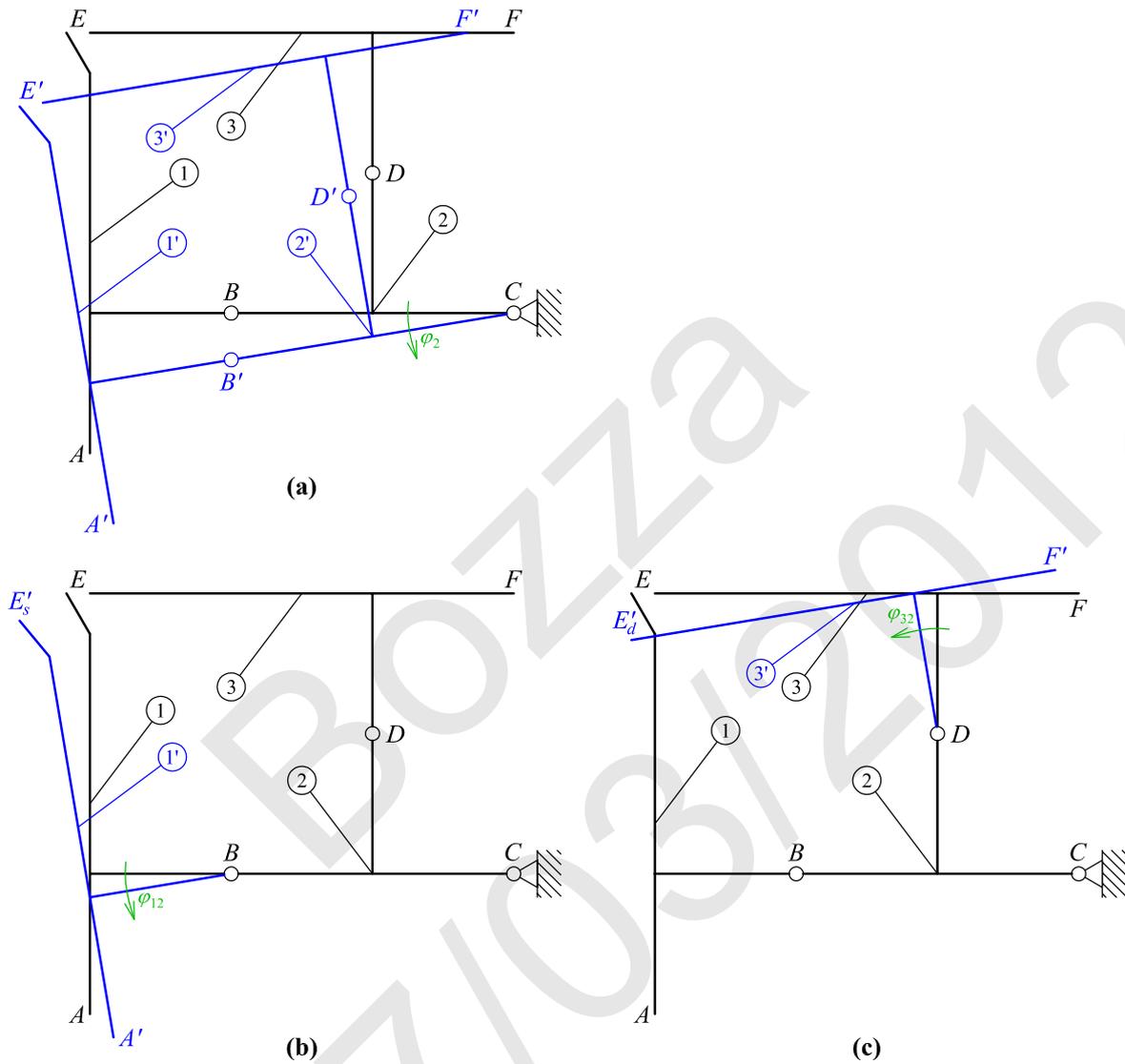


Figura 3.7: Atti di moto conseguenti allo “scongelo” di ciascun singolo grado di libertà residuo dello schema “ad albero” (coi rimanenti “congelati”).

Seconda nota operativa: nodo E . Ancora una volta, per la stesura dell’equazione cinematica di vincolo riguardante il carrello relativo posto in E , risulta conveniente procedere per via grafica. Per la stesura dell’equazione cinematica di vincolo $\Delta n_E = 0$ si considerano, quindi, le proiezioni lungo la direzione n dei contributi di spostamento precedentemente individuati. Il tutto in accordo a quanto riportato in Figura 3.8, dove sono illustrate, nella parte (a), l’estremità d’interesse dell’asta 1 (nodo E di sinistra, E_s) e, nella parte (b), quella dell’asta 3 (nodo E di destra, E_d). In verde sono poi riportati i contributi di spostamento rappresentati secondo il sistema di riferimento globale x, y , la loro composizione vettoriale ed la loro proiezione lungo la direzione n (i versi sono at-

tribuiti e rappresentati ipotizzando positivi i valori assunti da tutte le coordinate libere coinvolte). In rosso sono infine riportati i vettori risultanti, uno per ciascuna delle due parti (destra e sinistra) del nodo E , dati dalla sommatoria algebrica dei singoli contributi precedentemente proiettati (il segno di ciascun termine è attribuito considerando positive le proiezioni orientate secondo il verso dell'asse n e negative quelle aventi verso opposto).

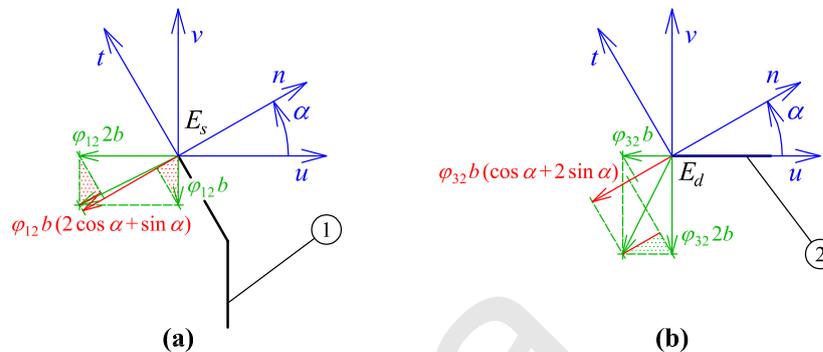


Figura 3.8: Contributi di spostamento da considerarsi per le due estremità del nodo E e loro scomposizione lungo la direzione n dell'asse del carrello relativo in E .

Forma matriciale. Si procede alla riscrittura, in forma matriciale, del precedente Sistema (3.23):

$$\begin{Bmatrix} v_A \\ \Delta n_E \\ u_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b & -3b \\ -b(\cos \alpha + 2 \sin \alpha) & b(2 \cos \alpha + \sin \alpha) & 0 \\ -b & 0 & -2b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varphi_{32} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.24)$$

Quanto appena ottenuto costituisce il *sistema di congruenza* o *compatibilità ridotto ottimale* $\mathbf{v}' = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{0}$, in cui \mathbf{u}' , \mathbf{v}' , \mathbf{C}' mantengono gli abituali significati già introdotti per lo schema “ad albero” non ottimale. In particolare, la matrice di compatibilità o congruenza ridotta \mathbf{C}' , avente dimensione 3×3 , è la più compatta tra quelle possibili per la struttura in esame.

Proprietà del sistema di congruenza. Ancora una volta si è ottenuto un sistema lineare omogeneo $\mathbf{v}' = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{0}$, sebbene più compatto del sistema ridotto precedente e, evidentemente, assai più compatto del sistema completo. La presenza di soluzioni non banali, per $|\mathbf{C}'| = 0$, sta a significare che esistono vettori soluzione \mathbf{u}'_i , contenenti i valori assunti dalle coordinate libere, affinché la struttura assegnata assuma una configurazione spostata coerente con i vincoli presenti.

Determinante e rango della matrice \mathbf{C}' . Il determinante della matrice di compatibilità o congruenza ridotta $|\mathbf{C}'|$ è sviluppato lungo la prima riga (in alternativa si ricorra al già citato schema di Sarrus):

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}'| &= b \begin{vmatrix} -b(\cos \alpha + 2 \sin \alpha) & 0 \\ -b & -2b \end{vmatrix} - 3b \begin{vmatrix} -b(\cos \alpha + 2 \sin \alpha) & b(2 \cos \alpha + \sin \alpha) \\ -b & 0 \end{vmatrix} \\ &= b[2b^2(\cos \alpha + 2 \sin \alpha)] - 3b[b^2(2 \cos \alpha + \sin \alpha)] \\ &= b^3(\sin \alpha - 4 \cos \alpha). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Il suo rango è invece pari al più alla sua dimensione minima:

$$r[\mathbf{C}'] = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha \neq \arctan(4), \\ 2 & \text{se } \alpha = \arctan(4). \end{cases} \quad (3.26)$$

Conclusione. Il numero dei gradi di labilità L del sistema dato è, in analogia con quanto già descritto per lo schema “completo”, pari alla differenza tra le coordinate libere l' necessarie alla descrizione della configurazione assunta dallo schema “ad albero” ed il rango $r[\mathbf{C}']$ della matrice di congruenza o compatibilità ridotta \mathbf{C}' .

La struttura assegnata può quindi avere, coerentemente con quanto concluso in precedenza, al più un grado di labilità ($0 \leq L \leq 1$). Con un angolo di inclinazione α del carrello posto in E diverso da $\arctan(4)$, infatti, il sistema risulta fisso a terra; viceversa, se $\alpha = \arctan(4)$ il sistema è labile e la definizione della configurazione spostata dipende da un solo parametro libero, come determinato di seguito.

3.2 Meccanismo e mappe degli spostamenti

Poiché la struttura in esame, nonostante il rispetto della condizione necessaria di non labilità $v \geq l$ è comunque risultata labile per $\alpha = \arctan(4)$, secondo la trattazione svolta alla Sezione 3.1, è possibile ora, per tale condizione di labilità, tracciarne il *meccanismo* risultante, ossia determinarne la configurazione *spostata*, in seguito al compimento di un *atto di moto*, consentito dai vincoli *mal posti*. In particolare, la struttura stessa è risultata una volta labile ($L = 1$); pertanto il tracciamento del meccanismo (o spostata) avviene definendo il valore assunto da un solo *parametro* (o *coordinata libera*, o *lagrangiana*, o *grado di libertà residuo*).

3.2.1 Calcolo del meccanismo

Dato che il presente capitolo è dedicato allo svolgimento dell'analisi cinematica per via analitica, anche il meccanismo viene dapprima ricavato mediante approccio analitico, rimandando la ricostruzione grafica della spostata e delle relative mappe degli spostamenti orizzontali e verticali alla fase conclusiva.

Inoltre, ripetendo l'approccio già adottato durante la verifica dell'efficacia dei vincoli, si procederà dapprima con lo schema “completo” e con lo schema “ad albero” non ottimale da esso ricavato, per poi passare all'adozione dello schema “ad albero” ottimale.

Schema “completo” o “ad albero” non ottimale

Si riprenda il sistema di compatibilità o congruenza completo, Sistema (3.4), qui riscritto dopo aver riordinato i termini di ciascuna equazione, diviso entrambi i membri della penultima equazione per $\cos \alpha$ (affinché vi compaia la sola funzione trigonometrica $\tan \alpha$) ed assunto l'angolo α tale per cui $\tan \alpha = 4$ (affinché ci si riconduca alla configurazione

labile della struttura):

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 0 \\ -u_1 + \varphi_1 b + u_2 = 0 \\ -v_1 - \varphi_1 b + v_2 - 2\varphi_2 b = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ -u_2 + \varphi_2 b + u_3 + \varphi_3 b = 0 \\ -v_2 + \varphi_2 b + v_3 - \varphi_3 b = 0 \\ -u_1 - 4v_1 + 3\varphi_1 b + u_3 + 4v_3 - 12\varphi_3 b = 0 \\ u_3 = 0 \end{array} \right. . \quad (3.27)$$

Tale sistema omogeneo, pur prevedendo un numero di incognite pari al numero delle sue equazioni, è una volta indeterminato, offre cioè infinite soluzioni non banali dipendenti da un solo parametro. Ciò in quanto la matrice dei coefficienti corrisponde alla particolare matrice di congruenza o compatibilità \mathbf{C} in cui l'angolo α assume valore tale da ridurre ad otto il rango.

Comando dell'atto di moto e spostata. L'atto di moto dell'intera struttura viene comandato imponendo, ad esempio, una rotazione infinitesima antioraria φ all'asta 1 (positiva proprio perché antioraria, secondo la convenzione abitualmente adottata):

$$\varphi_1 = \varphi. \quad (3.28)$$

Tale relazione, inserita nella soluzione del Sistema (3.27), permette di ricavare il valore assunto da ogni altra coordinata libera in funzione di φ e, conseguentemente, di caratterizzare completamente l'atto di moto di ciascuna delle tre aste componenti il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \varphi b \\ v_1 = 0 \\ \varphi_1 = \varphi \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \varphi_2 = -\frac{1}{2}\varphi \\ u_3 = 0 \\ v_3 = \varphi b \\ \varphi_3 = \frac{1}{2}\varphi \end{array} \right. . \quad (3.29)$$

Si noti che il sistema iniziale era composto da nove equazioni, ma una di esse dà luogo ad un'identità, in quanto combinazione lineare delle precedenti (sistema una volta indeterminato, causa differenza $L = 1$ tra dimensione della matrice dei coefficienti e suo rango).

Schema "ad albero" non ottimale. Il calcolo analitico dell'atto di moto basato sull'utilizzo dello schema "ad albero" non ottimale conduce ad una serie di risultati che sono di fatto sottoinsieme di quelli appena ottenuti: vengono infatti semplicemente meno tutte quelle relazioni aventi coordinate libere direttamente eguagliate a zero ($v_1 = 0$, $u_2 = 0$, $v_2 = 0$ e $u_3 = 0$) presenti nel sistema completo. Ciò poiché tali relazioni individuano

coordinate libere identicamente nulle, a causa dalla presenza di un vincolo assoluto non cedevole in corrispondenza delle coordinate stesse.

Rappresentazione grafica. I risultati precedentemente ottenuti sono globalmente rappresentati in Figura 3.9. Poiché le terne di riferimento, atte a descrivere la configurazione assunta dalle tre aste componenti il sistema secondo la soluzione (3.29), sono rispettivamente collocate nei nodi A , C e F della struttura, è dapprima individuata la posizione finale di tali nodi, attraverso gli spostamenti e le rotazioni indicati mediante i vettori in verde. Sulla base di questi primi punti è conseguentemente individuata, in blu, la configurazione spostata di ciascuna asta.

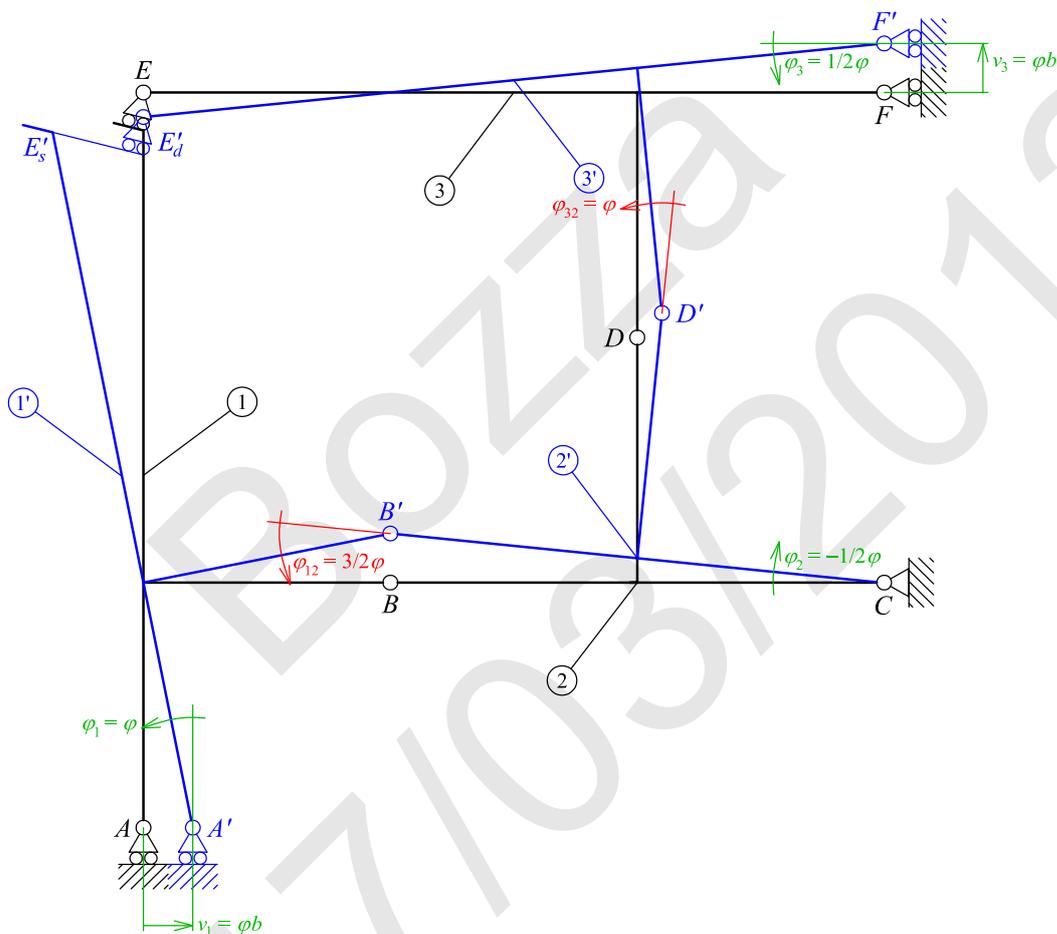


Figura 3.9: Spostata del meccanismo inizialmente assegnato, quando esso assume la configurazione labile; in verde sono rappresentati i risultati ottenuti dallo schema “completo”, mentre in rosso sono riportati quelli derivanti dallo schema “ad albero” ottimale.

Schema “ad albero” ottimale

L'utilizzo, per il calcolo analitico della spostata, del sistema di compatibilità o congruenza ricavato dallo schema “completo” risulta, nella maggior parte dei casi pratici, piuttosto arduo. La necessità di scrivere tre equazioni per ciascuna delle n aste componenti la struttura, infatti, accresce rapidamente il numero delle equazioni, al crescere di n , rendendo macchinoso l'impiego di tale strategia già per strutture con poche aste.

Al fine di ovviare a tale inconveniente, si riprenda il sistema di compatibilità o congruenza ridotto, Sistema (3.23), anch'esso qui riscritto dopo aver diviso entrambi i membri della seconda equazione per $\cos \alpha$ (affinché vi compaia la sola funzione trigonometrica $\tan \alpha$) ed assunto l'angolo α tale per cui $\tan \alpha = 4$ (affinché ci si ponga nella configurazione labile della struttura):

$$\begin{cases} -3\varphi_2 b - \varphi_{12} b = 0 \\ 6\varphi_{12} b - 9\varphi_{32} b = 0 \\ -\varphi_2 2b - \varphi_{32} b = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Tale sistema, pur prevedendo un numero di incognite pari al numero delle sue equazioni, risulta, al pari di quello riferito allo schema "completo", una volta indeterminato: esso offre cioè infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro.

Comando dell'atto di moto. L'atto di moto dell'intera struttura è comandato, coerentemente con quanto già determinato in precedenza, imponendo una rotazione infinitesima di verso orario $\varphi/2$ all'asta 2 (quindi negativa secondo la convenzione adottata, che prevede rotazioni positive se antiorarie):

$$\varphi_2 = -\varphi/2. \quad (3.31)$$

Tale scelta deriva evidentemente dalla volontà di ottenere dei risultati direttamente confrontabili con quelli della trattazione precedente.

Tale equazione, inserita nella soluzione del Sistema (3.30), permette di ricavare l'atto di moto caratterizzante l'intero sistema:

$$\begin{cases} \varphi_{12} = -3\varphi_2 \\ \varphi_{32} = -2\varphi_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi_2 = -\frac{1}{2}\varphi \\ \varphi_{12} = \frac{3}{2}\varphi \\ \varphi_{32} = \varphi \end{cases} \quad (3.32)$$

La rappresentazione grafica dei risultati ottenuti è aggiunta, in rosso, all'interno della stessa Figura 3.9.

3.2.2 Tracciamento del meccanismo

Il meccanismo della struttura è riportato in *blu* in Figura 3.10, sovrapposto alla struttura di partenza, nella sua configurazione di riferimento. Per completezza e come d'abitudine, sono stati disegnati pure i vincoli in configurazione spostata.

Convenzione. Si definisce un'unità infinitesima di spostamento δ . Poiché risulta facilmente identificabile, nello schema di base, una *maglia strutturale* di lunghezza pari a b , può risultare comodo, ai fini del tracciamento della spostata e del calcolo degli spostamenti nodali, definire tale unità δ legata ad una rotazione infinitesima φ , eventualmente atta a comandare il cinematismo, in termini della relazione:

$$\delta = \varphi b. \quad (3.33)$$

Questa convenzione consente di facilitare la rappresentazione grafica delle rotazioni e di agevolare la determinazione degli spostamenti degli estremi delle aste nel seguito riportati.

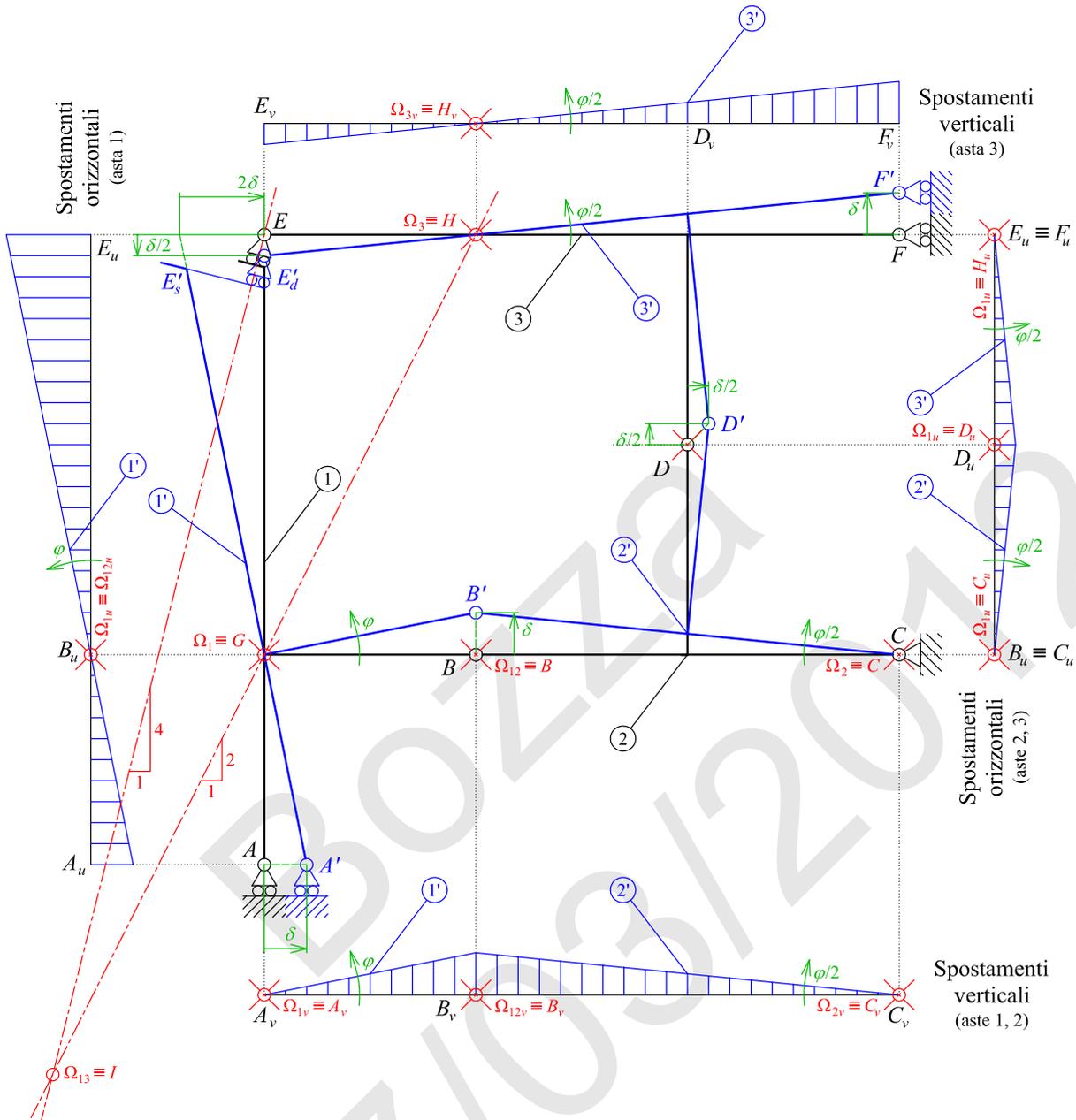


Figura 3.10: Meccanismo della struttura e mappe degli spostamenti orizzontali e verticali.

Spostamenti nodali

Si procede al calcolo degli spostamenti nodali di tutti i nodi della struttura ove siano collocati dei vincoli relativi (punti B , D ed E). Ciò al fine di verificare, attraverso la compatibilità tra spostamenti ottenuti e tipologia di vincolo ivi collocato, la bontà della spostata ottenuta in Figura 3.10. A tale scopo risulta utile, in generale, anche la lettura degli spostamenti orizzontali e verticali, i quali possono essere rappresentati graficamente nelle relative mappe.

Nodo B. Poiché nel nodo B è presente una cerniera propria che collega l'asta 1 all'asta 2, è interessante verificare che gli spostamenti relativi tra il nodo B appartenente alla parte

di destra della struttura (ed indicato con B_d) e quello appartenente alla parte sinistra (ed indicato con B_s) siano nulli (sia cioè consentita solo una rotazione relativa tra le due aste).

Spostamento relativo in B in direzione orizzontale:

$$\begin{aligned}\Delta u_B &= u_{B_d} - u_{B_s} \\ &= (u_1 - \varphi_1 b) - 0 \\ &= (\delta - \varphi b) - 0 = 0.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Spostamento relativo in B in direzione verticale:

$$\begin{aligned}\Delta v_B &= v_{B_d} - v_{B_s} \\ &= (-\varphi_2 2b) - (\varphi_1 b) \\ &= \left(\frac{\varphi}{2} 2b\right) - (\varphi b) = 0.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Rotazione relativa in B :

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_B &= \varphi_{B_d} - \varphi_{B_s} \\ &= \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{12} \\ &= \left(-\frac{\varphi}{2}\right) - (\varphi) = -\frac{3}{2}\varphi.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Gli spostamenti relativi sono evidentemente nulli, coerentemente con la presenza del vincolo relativo di cerniera propria, mentre la rotazione relativa risulta pari a $-\varphi_{12}$, coerentemente con quanto già calcolato analiticamente dal Sistema (3.32), sfruttando lo schema “ad albero” ottimale (il segno negativo è dovuto al fatto che $\Delta \varphi_B = -\varphi_{12}$).

Nodo D . Nel nodo D è presente un’ulteriore cerniera propria, simile a quella collocata in B . Analogamente al caso precedente, è utile verificare che gli spostamenti relativi tra il nodo D appartenente alla parte di destra della struttura (ed indicato con D_d) e quello appartenente alla parte sinistra (ed indicato con D_s) siano nulli (cioè sia consentita solo una rotazione relativa tra le due aste).

Spostamento relativo in D in direzione orizzontale:

$$\begin{aligned}\Delta u_D &= u_{D_d} - u_{D_s} \\ &= (\varphi_3 b) - (-\varphi_2 b) = \varphi_{32} \\ &= \left(\frac{\varphi}{2} b\right) - \left(\frac{\varphi}{2} b\right) = 0.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Spostamento relativo in D in direzione verticale:

$$\begin{aligned}\Delta v_D &= v_{D_d} - v_{D_s} \\ &= (v_3 - \varphi_3 b) - (-\varphi_2 b) \\ &= \left(\delta - \frac{\varphi}{2} b\right) - \left(\frac{\varphi}{2} b\right) = 0.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Rotazione relativa in D :

$$\begin{aligned}\Delta \varphi_D &= \varphi_{D_d} - \varphi_{D_s} \\ &= \varphi_3 - \varphi_2 \\ &= \left(\frac{\varphi}{2}\right) - \left(-\frac{\varphi}{2}\right) = \varphi.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Gli spostamenti relativi sono nulli, coerentemente con la presenza del vincolo relativo di cerniera propria, mentre la rotazione relativa risulta di entità pari a φ_{32} , coerentemente con quanto già calcolato analiticamente dal Sistema (3.32), sfruttando lo schema “ad albero” ottimale (nel caso specifico vi è anche corrispondenza di segno, dato che $\Delta\varphi_B = \varphi_{32}$).

Nodo E. Poiché nel nodo E è presente un carrello relativo che collega l’asta 1 all’asta 3, è interessante verificare che lo spostamento relativo tra il nodo E appartenente alla parte di destra della struttura (E_d) e quello appartenente alla parte sinistra (E_s) risulti orientato lungo il piano di scorrimento del carrello stesso.

Spostamento relativo in E in direzione orizzontale:

$$\begin{aligned}\Delta u_E &= u_{E_d} - u_{E_s} \\ &= 0 - (u_1 - \varphi_1 3b) \\ &= 0 - (\delta - \varphi 3b) = 2\delta.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Spostamento relativo in E in direzione verticale:

$$\begin{aligned}\Delta v_E &= v_{E_d} - v_{E_s} \\ &= (v_3 - \varphi_3 3b) - 0 \\ &= (\delta - \frac{\varphi}{2} 3b) = -\frac{1}{2}\delta.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Rotazione relativa in E :

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_E &= \varphi_{E_d} - \varphi_{E_s} \\ &= \varphi_3 - \varphi_1 = \varphi_{32} - \varphi_{12} \\ &= \frac{\varphi}{2} - \varphi = -\frac{\varphi}{2}.\end{aligned}\tag{3.42}$$

Il rapporto tra lo spostamento relativo in direzione verticale Δv_E e quello in direzione orizzontale Δu_E risulta pari a $-1/2 : 2 = -1/4$. Ciò significa che lo spostamento relativo risultante Δs_E , di modulo pari a $\sqrt{5}/2b$, avviene lungo una direzione individuata da una retta avente coefficiente angolare pari a $-1/4$; tale retta risulta giustamente perpendicolare a quella che rappresenta l’asse del carrello, avente coefficiente angolare pari a 4. La rotazione relativa assume, invece, un’entità pari alla differenza delle due rotazioni relative precedentemente calcolate, data la configurazione ad anello della struttura assegnata.

Centri di istantanea rotazione

Nota, dalla trattazione precedente, la configurazione spostata della struttura assegnata, è infine possibile individuare i centri di istantanea rotazione, assoluti Ω_i e relativi Ω_{ij} , delle aste i, j componenti la struttura stessa. Ciò non è strettamente necessario per la risoluzione dell’esercizio proposto, già affrontato e concluso attraverso la sola modalità analitica, bensì rappresenta un’utile indicazione per il lettore che volesse autonomamente cimentarsi, per la soluzione di questo caso, anche nell’utilizzo del cosiddetto approccio geometrico. In pratica, ciò risulta utile per il confronto completo tra gli esiti cinematici dei due approcci, geometrico ed analitico.

I centri di istantanea rotazione assoluti Ω_i da determinarsi sono in numero pari a quello delle aste ($n = 3$); i centri di istantanea rotazione relativi Ω_{ij} sono invece in numero pari

a quello delle doppiette o coppie di aste. In totale, i centri di istantanea rotazione da ricostruirsi sono quindi pari a:

$$\text{n. CIR} = \frac{n(n+1)}{2} = 6, \quad (3.43)$$

di cui tre assoluti ($\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$) e tre relativi ($\Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23}$).

Centri di istantanea rotazione assoluti. Poiché la struttura è piana, il centro di istantanea rotazione di ciascuna asta si trova lungo la retta normale (nel piano x, y dell'atto di moto) alla traiettoria di un suo qualsiasi punto. Noti pertanto, ad un dato istante, i vettori spostamento di due punti dell'asta, il centro di istantanea rotazione si trova nel punto di intersezione delle rette normali ad essi e passanti per i punti indicati (teorema di Chasles). Si ricorda inoltre che, secondo la definizione degli atti di moto, i vettori spostamento sono diretti come i vettori velocità ($ds = \mathbf{v} \cdot dt$); si può pertanto operare o con i vettori spostamento o con i vettori velocità di due punti generici. Riassumendo, il centro di istantanea rotazione di ciascuna asta della struttura assegnata si colloca, in definitiva, nel punto di intersezione delle rette normali staccate da due punti qualsiasi caratterizzanti l'asta stessa (ad esempio gli estremi) ed ortogonali agli spostamenti letti nei punti stessi.

Dall'applicazione del suddetto metodo all'asta 1 si conclude che Ω_1 si colloca nel punto G , individuato in rosso in Figura 3.10; esso è infatti il punto di intersezione fra la retta verticale passante per il punto A (normale al suo vettore spostamento) e la retta orizzontale passante per il punto B (anch'essa normale al suo vettore spostamento). Analogamente: $\Omega_2 \equiv C$ ed $\Omega_3 \equiv H$. Tali conclusioni sono coerenti con le condizioni di vincolo applicate alla struttura: il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_2 coincide, infatti, con il punto C , cerniera a terra dell'asta 2, mentre i centri di istantanea rotazione assoluti Ω_1 ed Ω_3 si posizionano sugli assi dei carrelli assoluti posti in A ed F , ed interessanti rispettivamente le aste 1 e 3.

Centri di istantanea rotazione relativi. A differenza dei centri di istantanea rotazione assoluti, quelli relativi possono essere individuati facendo riferimento in primis alle condizioni di vincolo relativo applicate alla struttura. Dalla presenza delle cerniere proprie relative collocate nei nodi B e D si ricava immediatamente $\Omega_{12} \equiv B$ ed $\Omega_{23} \equiv D$.

Inoltre, sull'asse e del carrello relativo posto in E giacerà, invece, il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{13} . Tale condizione, unitamente all'applicazione del primo teorema sulle catene cinematiche, applicato alla doppietta formata dalle aste 1 e 3, consente di individuare il centro di istantanea rotazione relativo Ω_{13} :

$$\begin{cases} \text{carrello in } E & \longrightarrow \Omega_{13} \in e \\ \Omega_1, \Omega_3, \Omega_{13} & \longrightarrow \Omega_{13} \in g \end{cases} \implies \Omega_{13} \equiv I, \quad (3.44)$$

secondo la stessa ricostruzione riportata in rosso in Figura 3.10.

Verifica. I centri di istantanea rotazione, assoluti e relativi, precedentemente individuati soddisfano, come è facile verificare, le condizioni di allineamento imposte dal primo e dal secondo teorema sulle catene cinematiche. Ciò a riprova del fatto che la struttura assegnata, quando configurata con un angolo α di inclinazione dell'asse del carrello in E pari ad $\arctan(4)$, assume effettivamente una configurazione labile, con un unico grado di labilità ($L = 1$).

BOZZA
17/03/2012

Elenco delle figure

1.1	Schema fondamentale di asta incastrata.	5
1.2	Schema fondamentale di asta cerniera-carrello.	6
1.3	Analisi cinematica dello schema fondamentale di asta cerniera-carrello: le conclusioni variano in funzione dell'inclinazione dell'asse del carrello in B	7
1.4	Configurazione spostata, completa delle mappe degli spostamenti orizzontali e verticali, di schema di asta cerniera-carrello con vincoli mal posti (una volta labile).	8
1.5	Configurazioni alternative non labili, riconducibili allo stesso schema isostatico fondamentale di asta cerniera-carrello.	9
1.6	Schema fondamentale di asta a tre carrelli.	10
1.7	Possibile ricostruzione dell'analisi cinematica relativa allo schema fondamentale asta a tre carrelli; lo schema può essere ricondotto al precedente di asta cerniera-carrello.	11
1.8	Equivalenza cinematica della biella assoluta 1, adottata per collegare a terra l'asta 2 di una struttura più complessa.	12
1.9	Esempi di biella relativa, asta 1 di collegamento tra le aste 2 e 3 di una struttura più complessa.	13
1.10	Schema fondamentale di asta a tre bielle.	14
1.11	Schema fondamentale di arco a tre cerniere.	15
1.12	Possibile ricostruzione dell'analisi cinematica di schema fondamentale di arco a tre cerniere.	16
1.13	Arco a tre cerniere labile con vincoli mal posti (cerniere allineate).	17
1.14	Arco a tre cerniere labile con vincoli mal posti (cerniere allineate): meccanismo o spostata. Si noti che in questo caso la mappa degli spostamenti verticali coincide con la spostata stessa, mentre risultano nulli gli spostamenti orizzontali.	18
1.15	Arco a tre cerniere degenera (labile) con centri di istantanea rotazione assoluti coincidenti.	19
1.16	Arco a tre cerniere degenera (labile) con coincidenza di un centro di istantanea rotazione assoluto con quello relativo.	20
1.17	Arco a tre cerniere degenera (labile) con coincidenza di tutti e tre i centri di istantanea rotazione. Viene rappresentata una delle possibili spostate ($L = 2$).	20
1.18	Schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a due aste, con schema interno cerniera-carrello).	21
1.19	Analisi cinematica dello schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a due aste, con schema interno cerniera-carrello).	22

1.20	Varianti dello schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a due aste, con schema interno cerniera-carrello).	23
1.21	Schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a tre aste, con tre cerniere interne non allineate).	24
1.22	Analisi cinematica dello schema fondamentale di anello chiuso isostatico (a tre aste, con tre cerniere interne non allineate).	25
1.23	Rappresentazione di un quadrilatero articolato secondo la definizione adottata nell'ambito di (a) Scienza delle Costruzioni e (b) Meccanismi	26
1.24	Schema fondamentale di quadrilatero articolato.	27
1.25	Analisi cinematica dello schema fondamentale di quadrilatero articolato.	28
2.1	Struttura assegnata, della quale si vuole indagare l'eventuale labilità in funzione della coordinata libera z	32
2.2	Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà della struttura assegnata.	33
2.3	Analisi cinematica mediante sequenza di montaggio: determinazione del potenziale centro di istantanea rotazione assoluto Ω_4 dell'asta 4.	34
2.4	Analisi cinematica mediante sequenza di montaggio: individuazione dello schema isostatico fondamentale di quadrilatero articolato.	35
2.5	Analisi cinematica mediante sequenza di montaggio: configurazione labile della struttura potenzialmente isostatica inizialmente assegnata (ottenuta per $z = b$).	36
2.6	Analisi cinematica mediante approccio geometrico: individuazione dei centri di istantanea rotazione immediatamente noti e ricerca di Ω_{14} ed Ω_4	38
2.7	Analisi cinematica mediante approccio geometrico: ricerca dei centri di istantanea rotazione assoluti Ω_2 ed Ω_3 (per la configurazione potenzialmente labile della struttura, avente $z = b$).	41
2.8	Analisi cinematica mediante approccio geometrico: ricerca dei centri di istantanea rotazione relativi Ω_{15} ed Ω_{23}	42
2.9	Analisi cinematica mediante approccio geometrico: ricerca dei centri di istantanea rotazione relativi Ω_{25} ed Ω_{35} e rappresentazione di quelli già individuati.	43
2.10	Meccanismo della struttura e mappe degli spostamenti orizzontali e verticali.	45
3.1	Struttura assegnata, della quale si vuole indagare l'eventuale labilità in funzione dell'inclinazione α dell'asse del carrello in E	50
3.2	Computo dei gradi di vincolo e dei gradi di libertà della struttura assegnata.	51
3.3	Schema "completo" adottato per l'analisi cinematica mediante approccio analitico. Tutti i vincoli sono stati rimossi e vengono assunti tre gradi di libertà per ogni asta, al fine di descrivere la cinematica del sistema "esploso" così ottenuto.	53
3.4	Dettaglio dei termini nell'equazione cinematica di vincolo al nodo E	56
3.5	Schema "ad albero" (non ottimale) adottato per l'analisi cinematica mediante approccio analitico, relativo a sottosistema del sistema di congruenza completo.	61
3.6	Schema "ad albero" ottimale, adottato per l'analisi cinematica mediante approccio analitico.	64
3.7	Atti di moto conseguenti allo "scongelo" di ciascun singolo grado di libertà residuo dello schema "ad albero" (coi rimanenti "congelati").	66

-
- 3.8 Contributi di spostamento da considerarsi per le due estremità del nodo E e loro scomposizione lungo la direzione n dell'asse del carrello relativo in E . 67
- 3.9 Spostata del meccanismo inizialmente assegnato, quando esso assume la configurazione labile; in *verde* sono rappresentati i risultati ottenuti dallo schema “completo”, mentre in *rosso* sono riportati quelli derivanti dallo schema “ad albero” ottimale. 70
- 3.10 Meccanismo della struttura e mappe degli spostamenti orizzontali e verticali. 72

BOZZA
17/03/2012

BOZZA
17/03/2012

Bibliografia

- [1] G. Bilotti.
Lezioni di Statica.
Edizioni Libreria Progetto, Padova, 1996.
- [2] A. Luongo, A. Paolone.
Meccanica delle Strutture – Sistemi Rigidi ad Elasticità Concentrata.
Masson, Milano, 1997.
- [3] E. Viola.
Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni, Vol. 1 e 2.
Pitagora Editrice, Bologna, 1993.
- [4] A. Zavelani Rossi.
Problemi di Scienza delle Costruzioni, Vol. 1 e 2.
CLUP Città Studi, Milano, 1991.