

Applicazione dei due Th. sulle catene cinematiche -

- Sistema di n aste $\rightarrow$ si presuppone la labilità dell'intero sistema -

• Vasta (e sono n)
 $\frac{n-1}{2}$ coppie assaiabili;
 escludendo le ripetit.
 $(i,j) \equiv (j,i)$
 • Idem, per triplete;
 $\frac{n-2}{3}$ triplete assoc.
 n° doppie : $\frac{n(n-1)}{2}$ (è uguale al n° di CIR relativi)

n° triplete : $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

n° TOT di cond. di allineamento da considerare : $\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{3+n-2}{3} \right) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{6} \sim n^3$ (rapidamente crescente al crescere di n)

No. di CIR :

relativi $\frac{n(n-1)}{2}$
 assoluti n
 $n_{CIR}^0 = n \left(\frac{2+n-1}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2}$

- la labilità potrà essere relativa ad un sottosistema di m delle n aste (per il quale valgono I + II Th.) -

- Ove le condizioni di allineamento vengano violate, il sottosistema corrispondente risulterà non labile -

- Se tutti i CIR sono ricostruiti univocamente e non vi sono casi degeneri, il sistema risulta 1 volta labile ($L=1$) -

- a meno di e coordinate, la struttura risulta al più $e+1$ volte labile -

- A volte la posizione dei CIR, pur verificate le condizioni di allineamento, si determina solo andando a disegnare la spostata e/o determinando per tentativi la loro posizione -

- Verifica conteggio sopra - Vedi Calcolo Combinatorio :

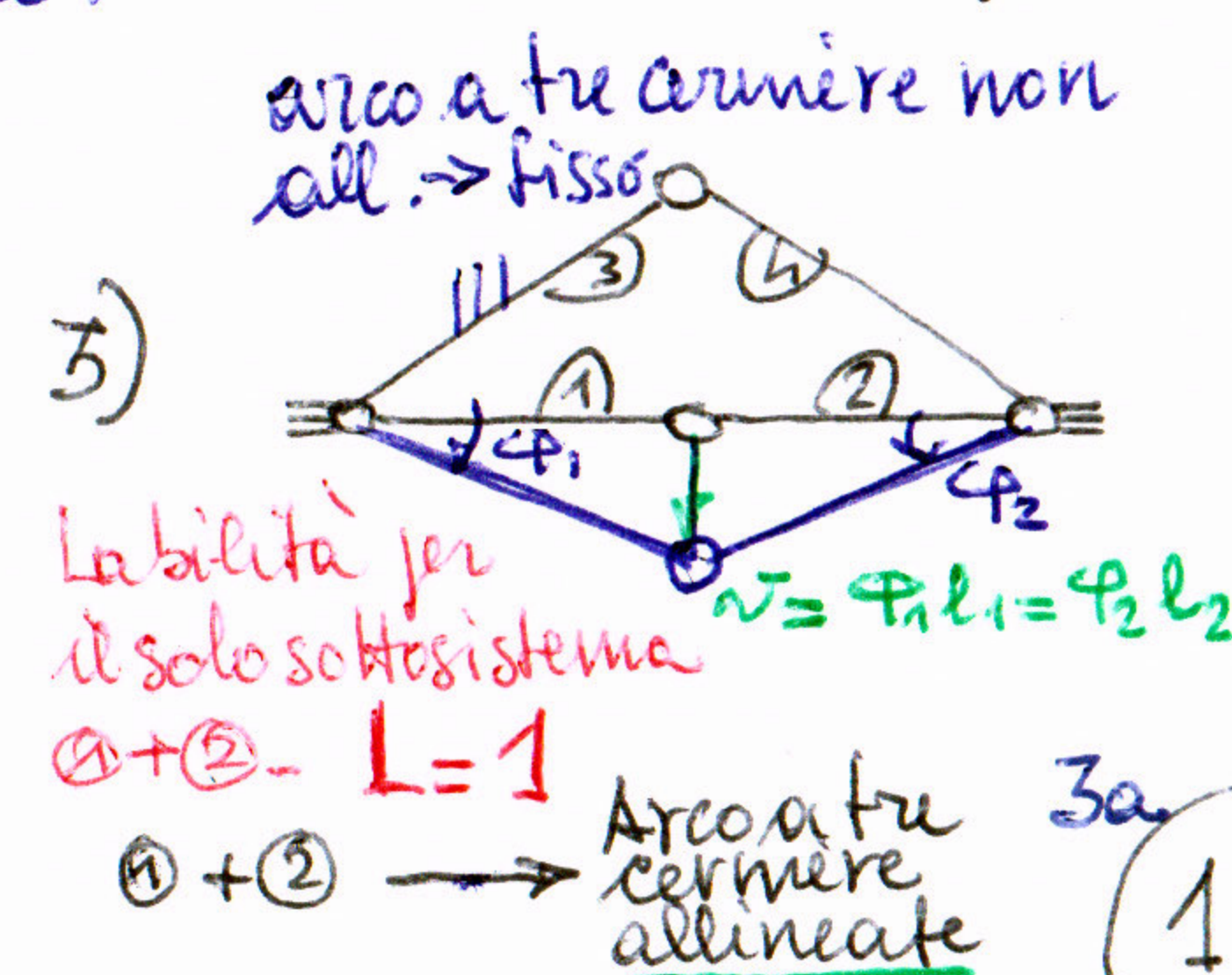
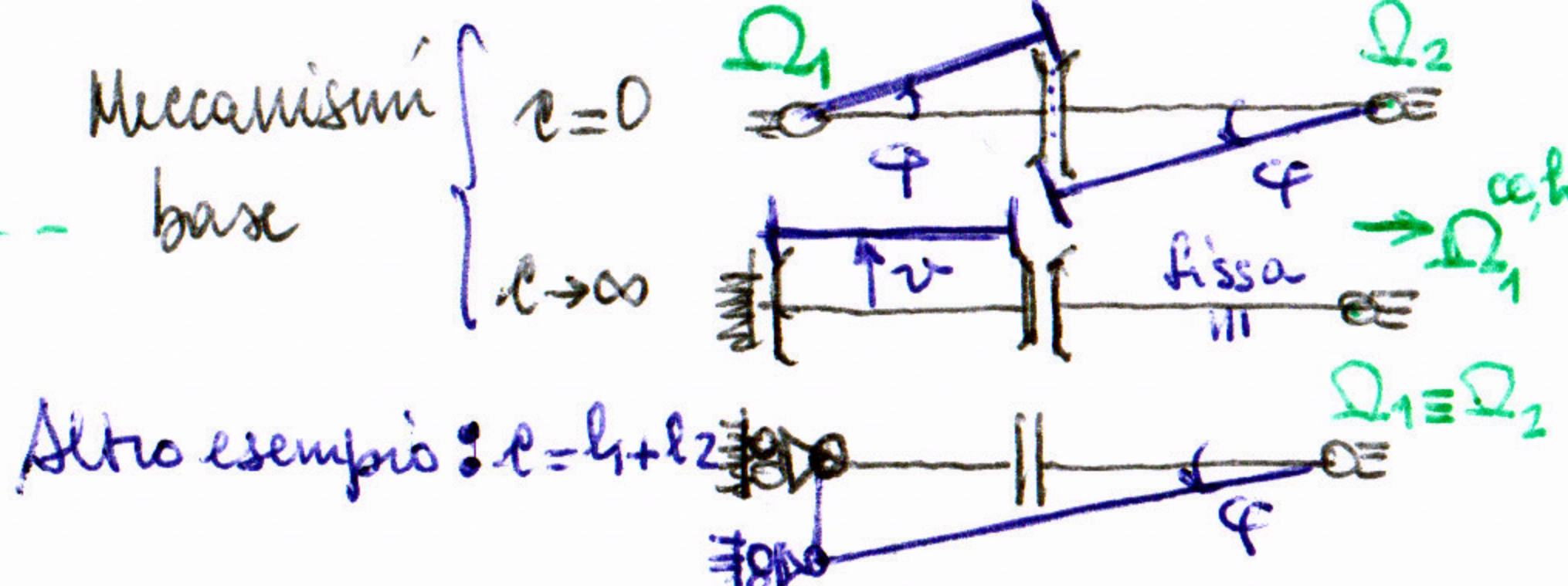
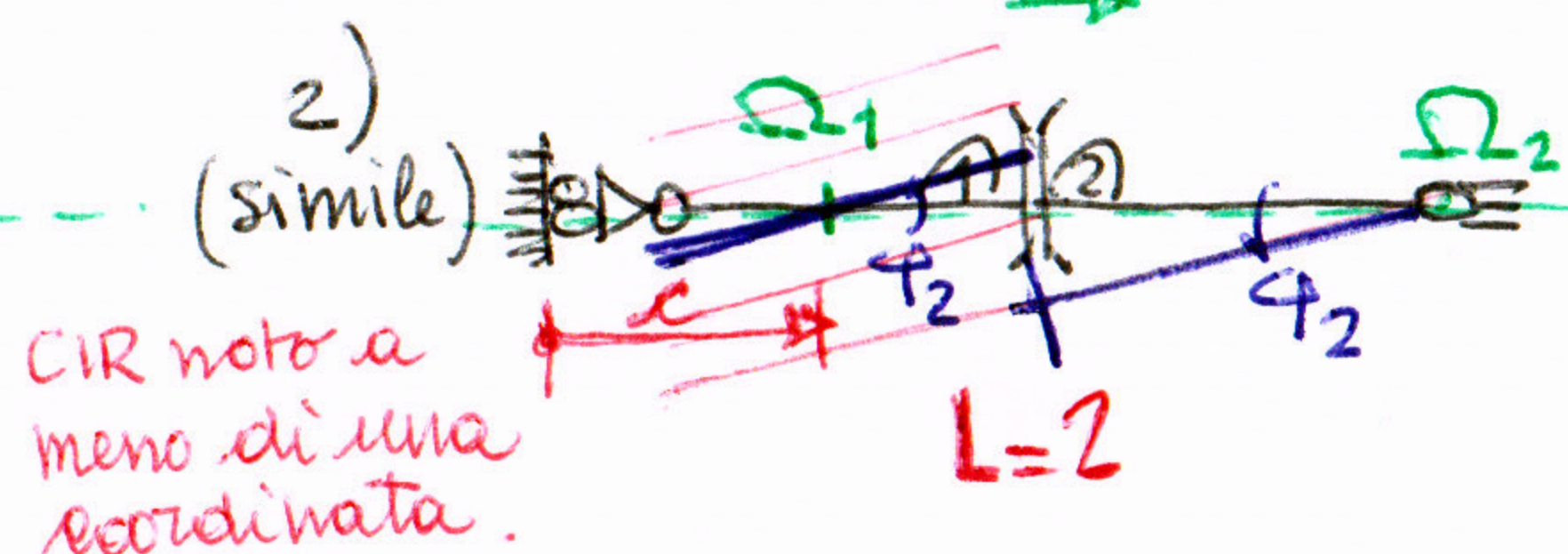
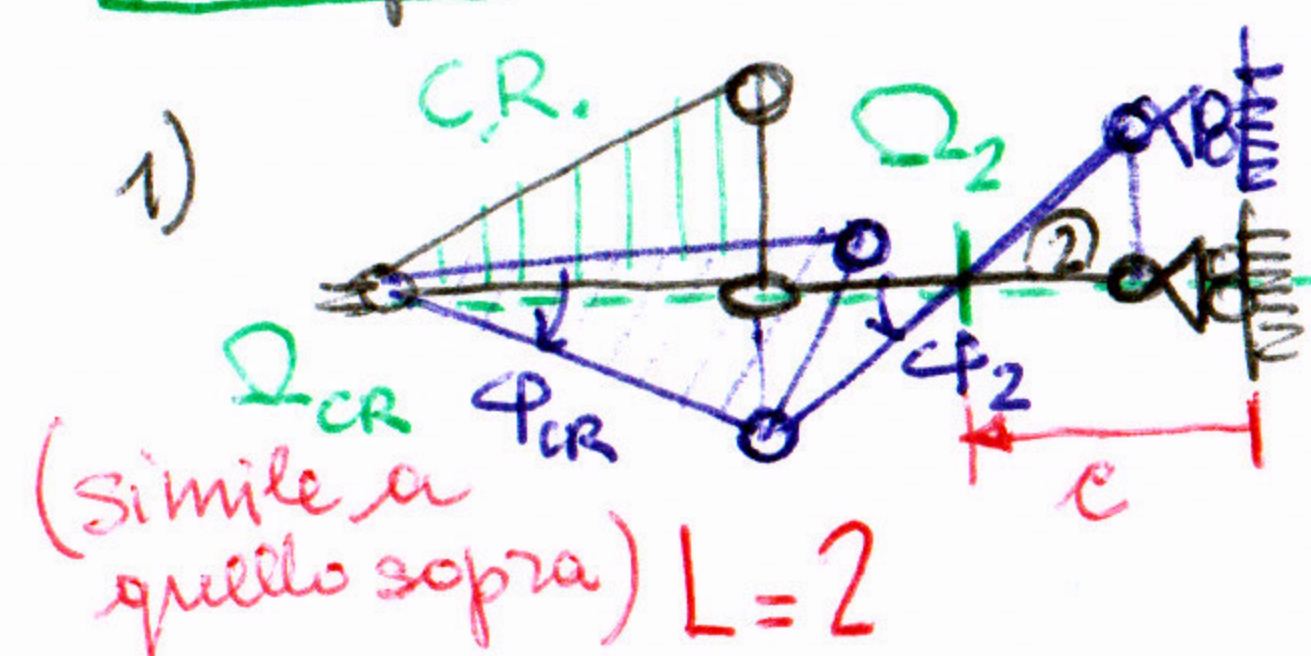
Numero N di sottoinsiemi di K elementi di un insieme di n :

$$N = \frac{1}{K!} \prod_{i=0}^{K-1} (n-i) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-K+1)}{K!} = \binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$$

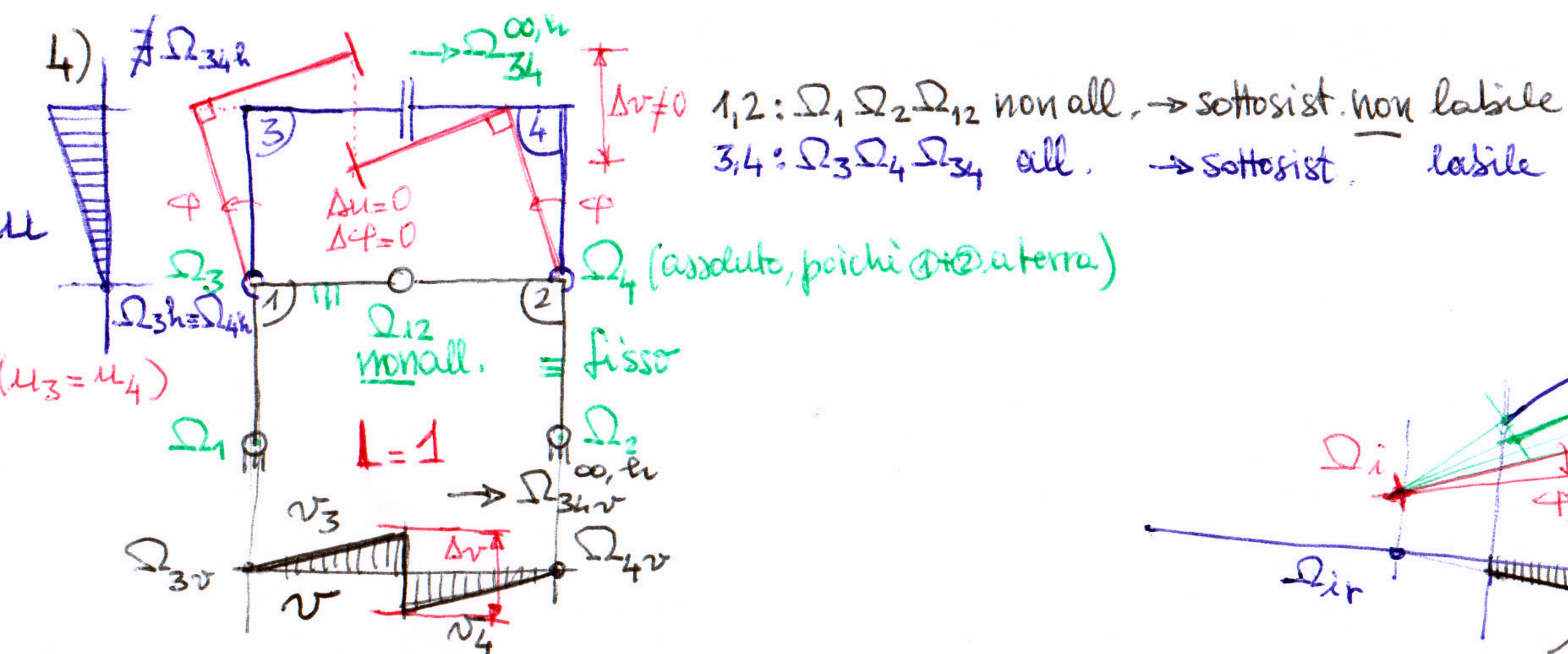
$\rightarrow$ coefficiente binomiale (n su K)

- Es. : $n=2 \rightarrow n_d=1, n_t=0 \rightarrow 1$ condiz., $n_{CIR}^0=3$ | $n=3 \rightarrow n_d=3, n_t=1 \rightarrow 4$ condiz., $n_{CIR}^0=6$ | $n=4 \rightarrow n_d=6, n_t=4 \rightarrow 10$ condiz., $n_{CIR}^0=10$ | ecc.

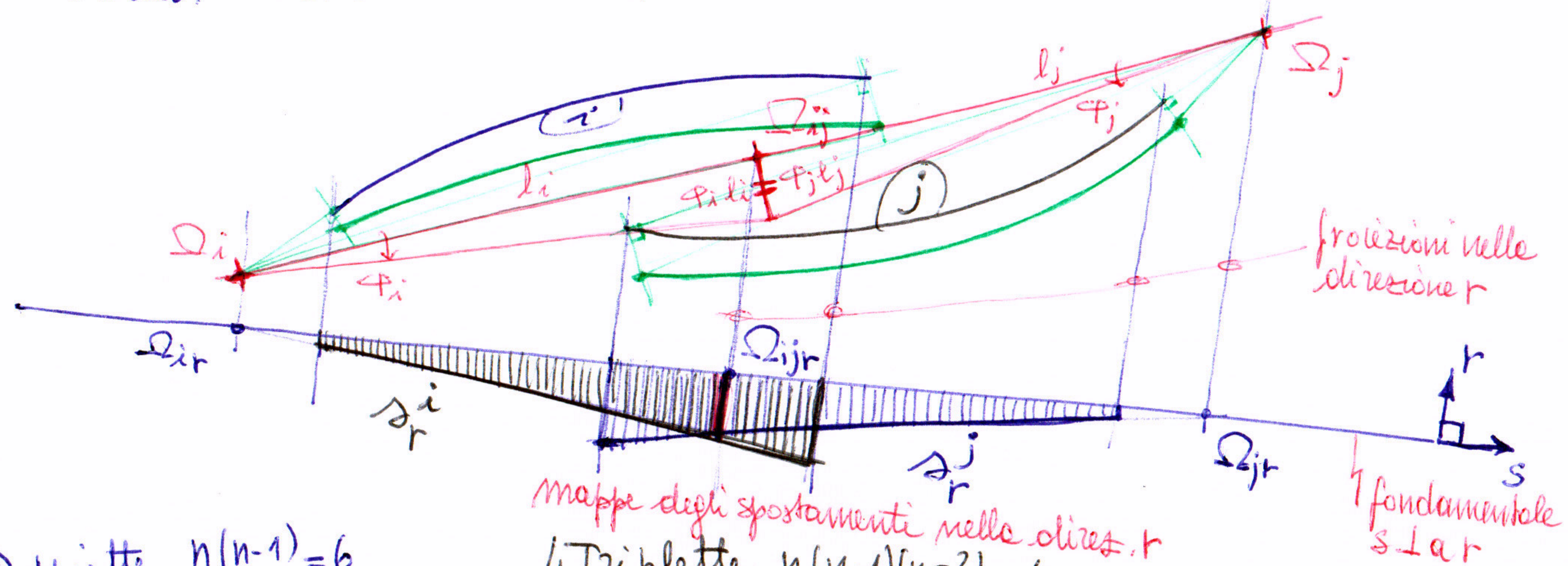
Esempi



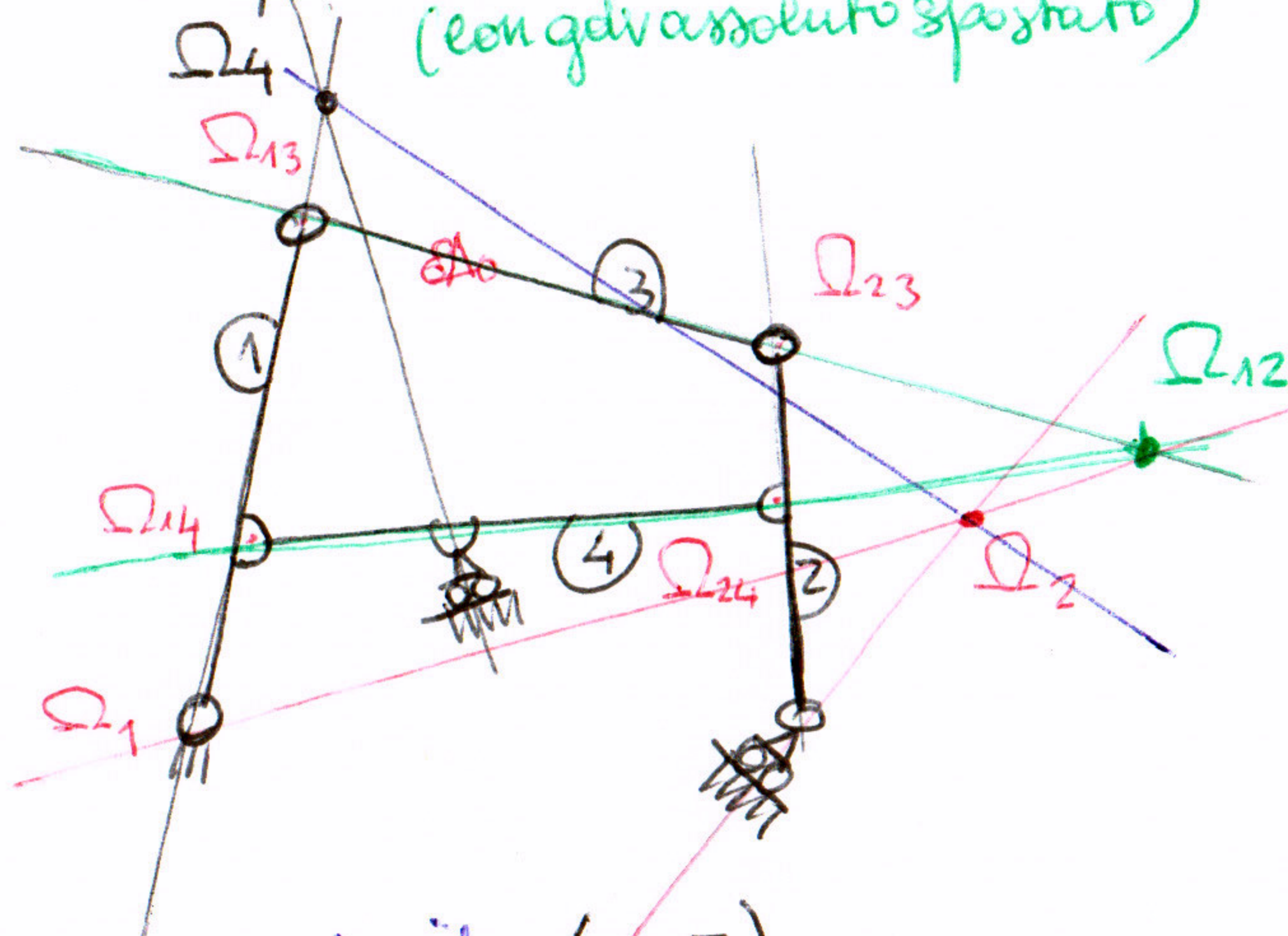
• Doppie ($K=2$) : $N = \frac{n(n-1)}{2!}$ ok ✓
 • Triplette ($K=3$) : $N = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ ok ✓



N.B. Per ricostruire la spostata delle catene cinematiche si impone la continuità sui CIR relativi



5) Pseudo quadrilatero articolato. ($n=4$)
 (con qd assoluto spostato)



6 Doppiette $\frac{n(n-1)}{2} = 6$

- * 12 $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_{12} \xrightarrow{+ \text{corr.}} \Omega_2$ ②
- (13 $\Omega_1 \Omega_3 \Omega_{13}$)
- * 14 $\Omega_1 \Omega_4 \Omega_{14} \xrightarrow{+ \text{corr.}} \Omega_4$ ③
- (23 $\Omega_2 \Omega_3 \Omega_{23}$)
- * 24 $\Omega_2 \Omega_4 \Omega_{24} \rightarrow$ violata ④
- (34 $\Omega_3 \Omega_4 \Omega_{34}$)

- * 123 $\Omega_{12} \Omega_{23} \Omega_{13} \rightarrow \Omega_{12}$ ①
- * 124 $\Omega_{12} \Omega_{24} \Omega_{14}$
- (134 $\Omega_{13} \Omega_{34} \Omega_{14}$)
- (234 $\Omega_{23} \Omega_{34} \Omega_{24}$) $\rightarrow \Omega_{34}$

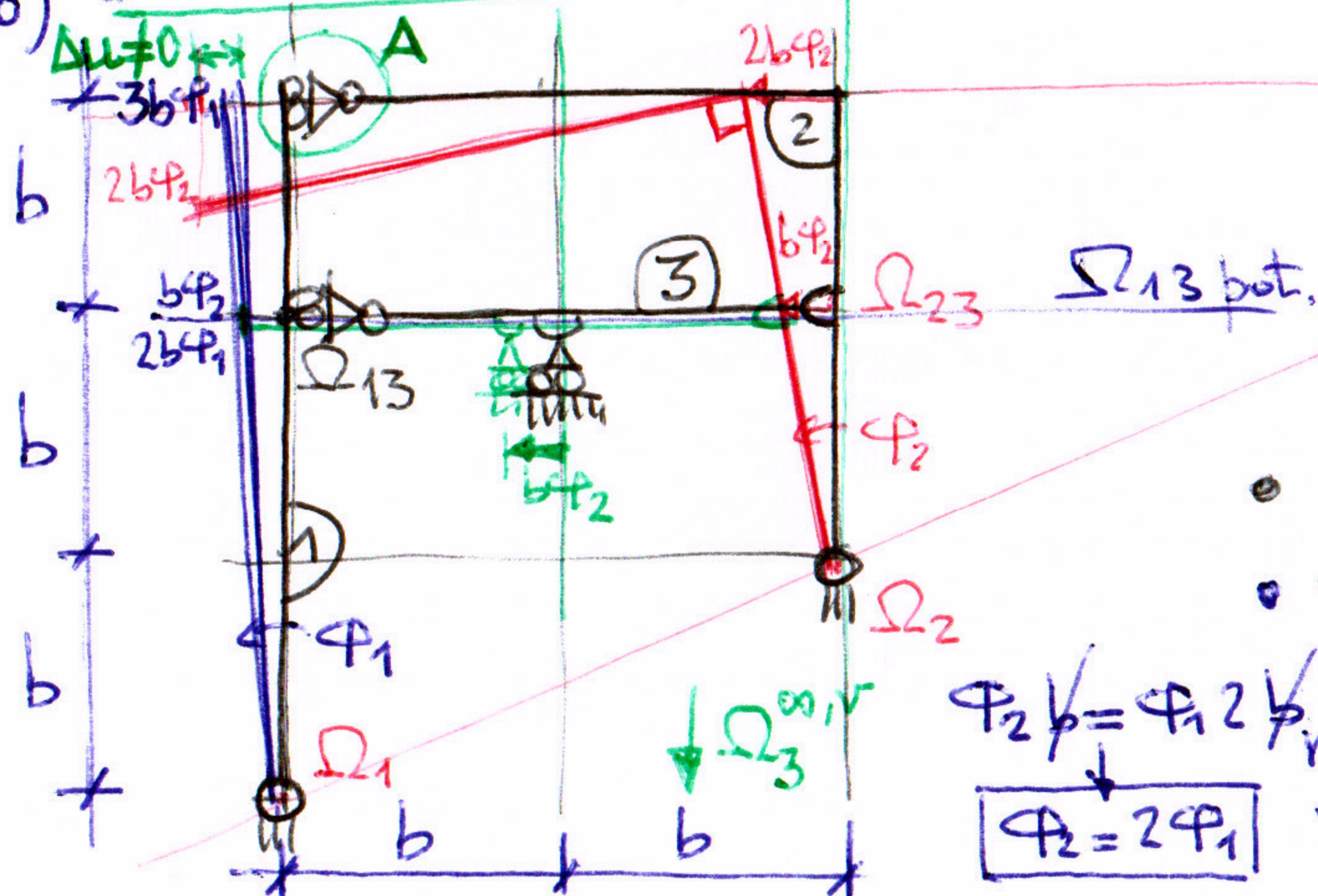
$\rightarrow$ 2+4 sistema fisso
 $\rightarrow$ in cascata, tutto fisso
SISTEMA NON LABILE

- Tutto ciò che è targato 3 può essere considerato in un secondo momento.

N.B.

- Biella 3 condensabile in carrello -
- Consentirebbe il passaggio da $n=4$ a $n=3$, $n_d=3$, $n_t=1$
- Sono quindi cruciali le * (con τ tenuta in conto con l'asse del carrello introdotto)
- A valle, ricostruire anche gli altri CIR, specie se c'è moto (per il disegno delle spostate) -

6) Schema simile ($n=3$)



③ $\bullet \Omega_1 \Omega_3 \Omega_{13} \xrightarrow{+ \text{corr.}} \Omega_{13}$

① $\bullet \Omega_1 \Omega_2 \Omega_{12} \xrightarrow{+ \text{corr.}} \Omega_{12}$

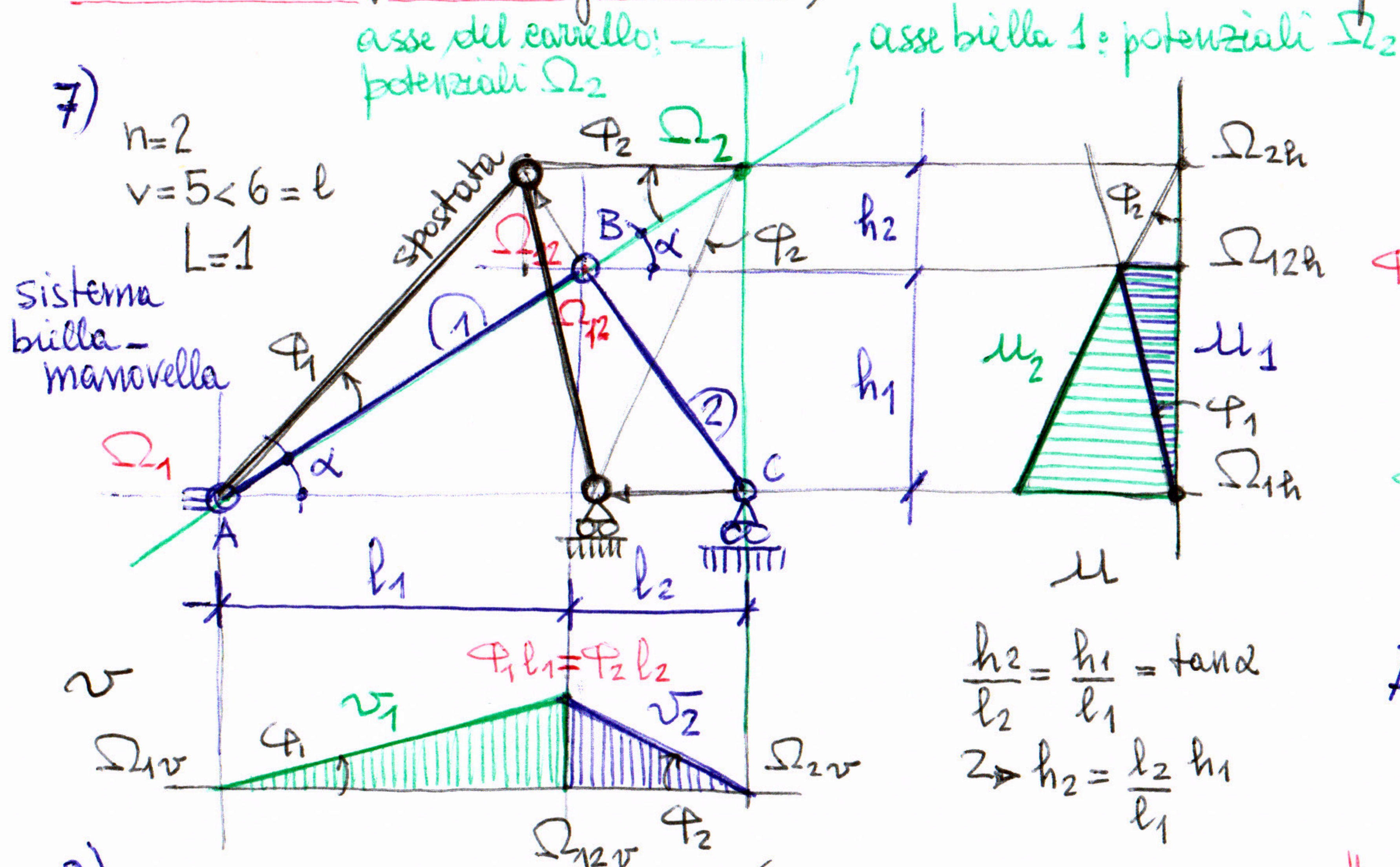
④ $\bullet \Omega_{12} \Omega_{23} \Omega_{13}$ non allineati $\rightarrow$ 1+2+3 formano un CR (quindi, in cascata, sistema non labile)

② $\bullet \Omega_2 \Omega_3 \Omega_{23} \xrightarrow{+ \text{corr.}} \Omega_3^{\infty, v}$

- $\bullet$ Si vede infatti che, anche provando a disegnare la spostata, si ottiene situazione incompatibile.
- $\bullet$ Ad es., basandosi su 1+3+2 $\rightarrow$ vincolo carrello tra 1 e 2 violato ($\Delta u_A \neq 0$)

ma: $u_A^2 = -2b\Phi_2 = -4b\Phi_1$ $u_A^1 = -3b\Phi_1$ $\Delta u_A \neq 0$ Dovrebbe aprirsi il carrello per consentire la spostata

• Ulteriori esempi di AC geometrica, con tracciamento di spostate e mappe di componenti di spostamento.



$$\Phi_1 h_1 = \Phi_2 h_2$$

$$\downarrow$$

$$= \Phi_2 \frac{l_2}{l_1} h_1$$

$$\downarrow$$

$$\Phi_1 l_1 = \Phi_2 l_2 \text{ OK } \checkmark$$

Anche:

$$\overline{AB} : l_1 = \overline{B\Omega_2} : l_2$$

$$\downarrow$$

$$\overline{B\Omega_2} = \frac{l_2}{l_1} \overline{AB}$$

Oppure:
congruenza $\Delta_{B1} = \Delta_{B2}$:

$$\Phi_1 \overline{AB} = \Phi_2 \overline{B\Omega_2}$$

$$\downarrow$$

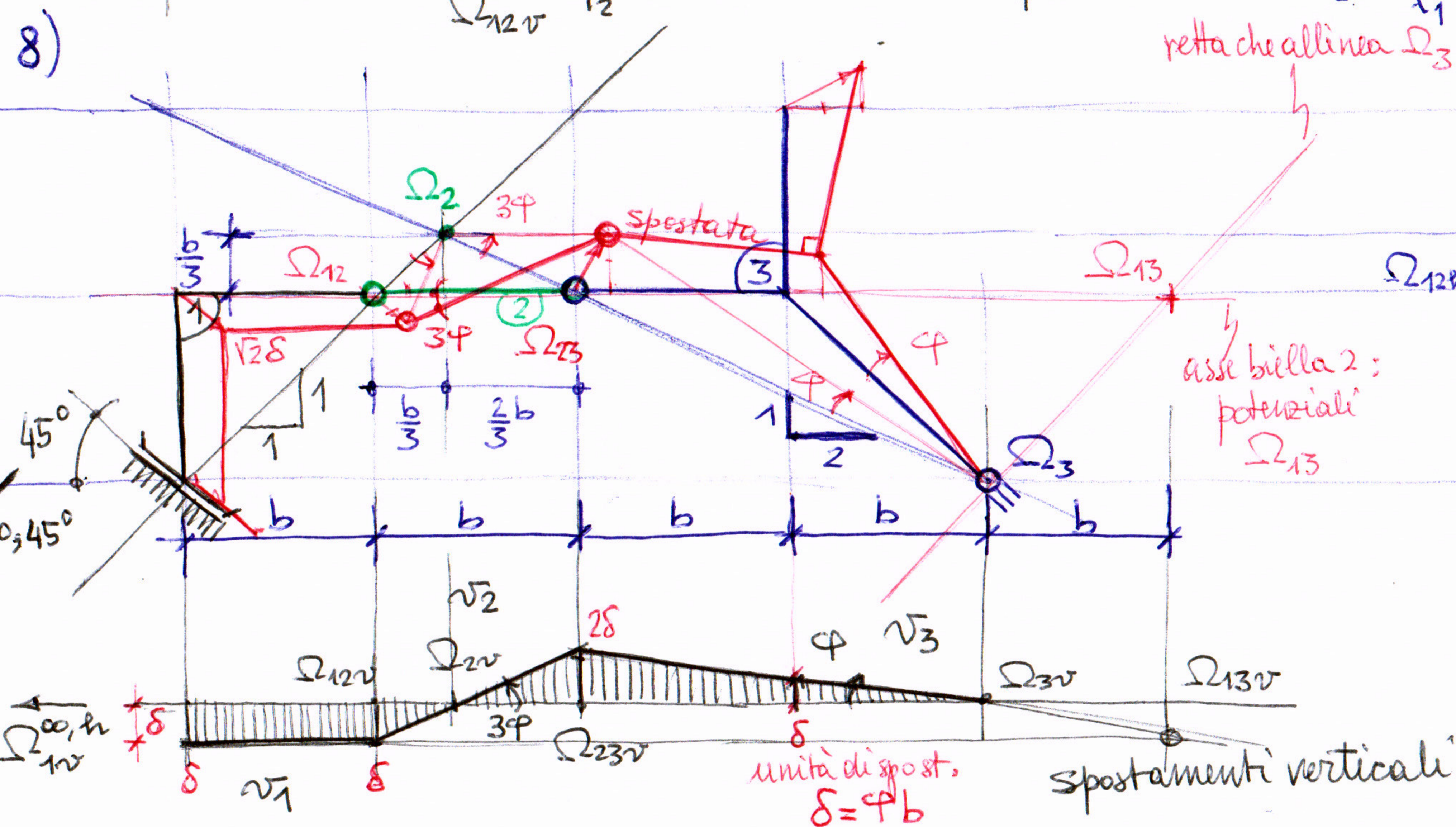
$$\Phi_1 \frac{l_1}{\cos \alpha} = \Phi_2 \frac{l_2}{\cos \alpha} \text{ OK } \checkmark$$

$$\Phi_1 \overline{AB} = \Phi_2 \frac{l_2}{l_1} \overline{AB}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Phi_1 l_1 = \Phi_2 l_2} \text{ OK } \checkmark$$

$\rightarrow$ es. $\Phi_1 : \Phi_2 = \frac{l_1}{l_2} \Phi_1$
oppure $\Phi_2 : \Phi_1 = \frac{l_2}{l_1} \Phi_2$



spostamenti orizzontali

$$3\Phi \frac{b}{3} = \Phi b \text{ OK}$$

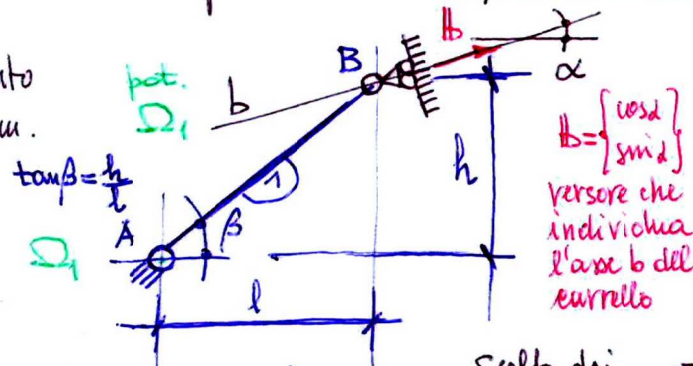
$$\Phi b = \delta \text{ OK}$$

N.B.:
La spostata di ogni coppia di aste della catena cinematica si ricostruisce tramite la continuità sul CIR relativo.

A.C. analitica - Scrittura esplicita delle eq.ni di vincolo (sistema di congruenza)

Esempio di riferimento
(potenzialm. cinematicam.
isodeterminato)

$$V=L=3$$



- Descrizione analitica degli spostamenti del sistema in f.ne di $\vec{u}$, in particolare in corrispondenza dei vincoli rimossi (sovrapponendo gli effetti dei moti base ammessi dai gdl scelti):

$$\begin{cases} u_B = u_A - \varphi_A h \\ v_B = v_A + \varphi_A l \end{cases} (*)$$

- Scrittura delle eq.ni di vincolo (in corrispondenza ai vincoli rimossi)

$$\begin{cases} \text{cerniera in A: } \begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{carrucolo in B: } \vec{\Delta}_{Bb} = \vec{\Delta}_B \cdot \vec{b} = u_B \cos \alpha + v_B \sin \alpha = 0$$

Sost. (*)

$$(u_A - \varphi_A h) \cos \alpha + (v_A + \varphi_A l) \sin \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha u_A + \sin \alpha v_A + (l \sin \alpha - h \cos \alpha) \varphi_A = 0$$

- Sistema delle eq.ni di vincolo in forma matriciale (sistema di congruenza)

$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta_{Bb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & l \sin \alpha - h \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \end{Bmatrix} = \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = \vec{C} \cdot \vec{u} = \vec{V} = \vec{0}$$

- Studio delle proprietà algebriche del sistema (qui sistema lineare omogeneo 3×3)

Ammette soluzioni non banali sse

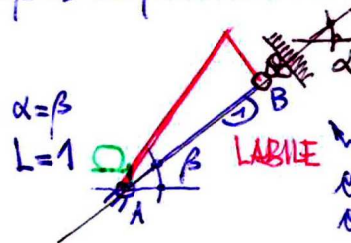
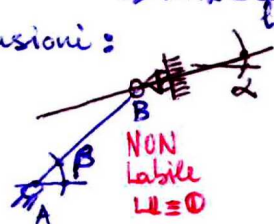
$$\det \vec{C} = 1 \cdot (l \sin \alpha - h \cos \alpha) = 0 \quad (\vec{C} \text{ singolare})$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{h}{l} \tan \beta \rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \text{Sistema LABILE (c.v.d.) con soluz.}$$

- Conclusioni:

$$\alpha \neq \beta$$

$$L=0$$



la spostata diviene
compatibile col vincolo
carrucolo presente in B

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \varphi_A \text{ arbitrario} \end{cases}$$

maglia chiusa formata
dalla struttura con
la terra

- $\vec{V}$: vettore degli spostamenti corrispondenti ai $v \times 1$ gdl rimossi

- $\vec{u}$: vettore dei gdl scelti ($l=3$) $\times 1$

- $\vec{C}$: matrice di congruenza ($v \times l = 3 \times 3$)

- $\vec{V}$: spostamenti assegnati (impressi)

- Procedimento alternativo ottimizzato con schema ad albero (viene implicitamente imposto $u_A = 0, v_A = 0$)

- * rimozione di un solo gdl

carrucolo rimosso $\rightarrow$ scrittura di una sola eq.ni di vincolo:

$$\Delta_{Bb} = u_B \cos \alpha + v_B \sin \alpha = -\varphi_A h \cos \alpha + \varphi_A l \sin \alpha = 0$$

$$\text{Sistema di congruenza } (l \sin \alpha - h \cos \alpha) \varphi_A = 0$$

$$\text{ridotto: } \vec{V} = \vec{C} \cdot \vec{u} = \vec{V} = \vec{0} \quad (\text{qui } 1 \times 1)$$

$$\text{Con stesse conclusioni: } \begin{cases} l \sin \alpha - h \cos \alpha \neq 0 \rightarrow \varphi_A = 0 \\ l \sin \alpha - h \cos \alpha = 0 \rightarrow \varphi_A \text{ arbitr.} \end{cases}$$