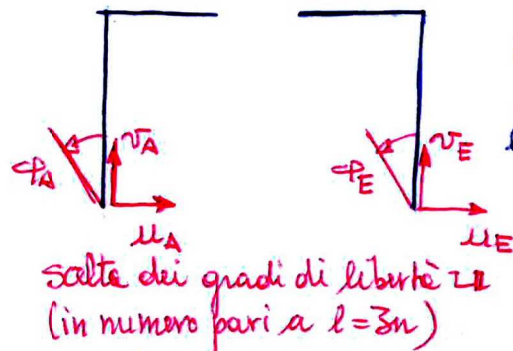
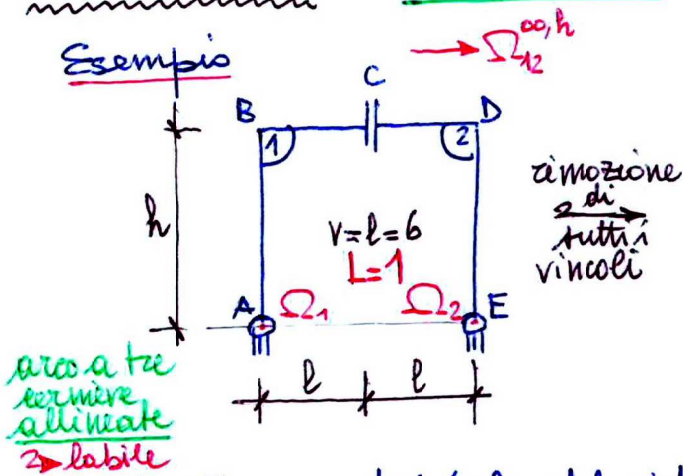


Esempio



scrittura
delle
eq. di
vincolo

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \Delta u_C = u_C^{(2)} - u_C^{(1)} = (u_E - \phi_E h) - (u_A - \phi_A h) = 0 \\ \Delta \phi_C = \phi_C^{(2)} - \phi_C^{(1)} = \phi_E - \phi_A = 0 \\ u_E = 0 \\ v_E = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DI CONGRUENZA
(completo)

Scrittura matriciale del sistema di congruenza

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta u_C \\ \Delta \phi_C \\ u_E \\ v_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \phi_A \\ u_E \\ v_E \\ \phi_E \end{bmatrix} = \mathbf{\bar{V}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{\bar{V}} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{C}$ compilata per colonne, ponendo $u_j = 1, u_k = 0$ per $k \neq j$

MATRICE
DI
CONGRUENZA

Sistema lineare omogeneo (per vincoli non
esistenti)
Ci si chiede se $\exists$ no soluzioni
non banali ($\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$)

rettore dei gradi di libertà (del sistema
privo di vincoli)

NOTE

• Per avere $L=0$ occorre $r=l$, quindi $v \geq l$, infatti

- Se $v < l$: $r[\mathbf{C}] \leq v < l \Rightarrow L > 0$
 $-r[\mathbf{C}] \geq -v \Rightarrow L = l - r \geq l - v$: L almeno pari
allo sbilanciamento $l-v$ es.:

• Se $v = l$: sistema potenzialmente isodeterminato

- Se $\mathbf{C}$ di rango pieno, $r=l=v \Rightarrow L=0$
(sistema cinematicamente isodeterminato).
È possibile analizzare $\det[\mathbf{C}]$. Se $\neq 0 \Rightarrow L=0$

• Se $v > l$: sistema potenzialmente iperdeterminato
- Se $\mathbf{C}$ di rango pieno, $r=l < v \Rightarrow L=0$
(sistema cinematicamente iperdeterminato)

Proprietà algebriche di $\mathbf{C}$

grado di libertà (o di indeterminazione cinematica) $L = N[\mathbf{C}] = l - r[\mathbf{C}] \geq 0$

dimensione del nucleo di $\mathbf{C}$:
n. di vettori lineari indipendenti $\mathbf{U}$; soluzioni non banali del sistema

n. di colonne e delle incognite u_j

rango della matrice $\mathbf{C}$
(max n. di righe o di colonne linearmente indip.)
con $r[\mathbf{C}] \leq \min\{v, l\}$
deficiente di rango
rango pieno

- Qui $r[\mathbf{C}] = 5$ (3^a e 6^a colonna lin. dip.)

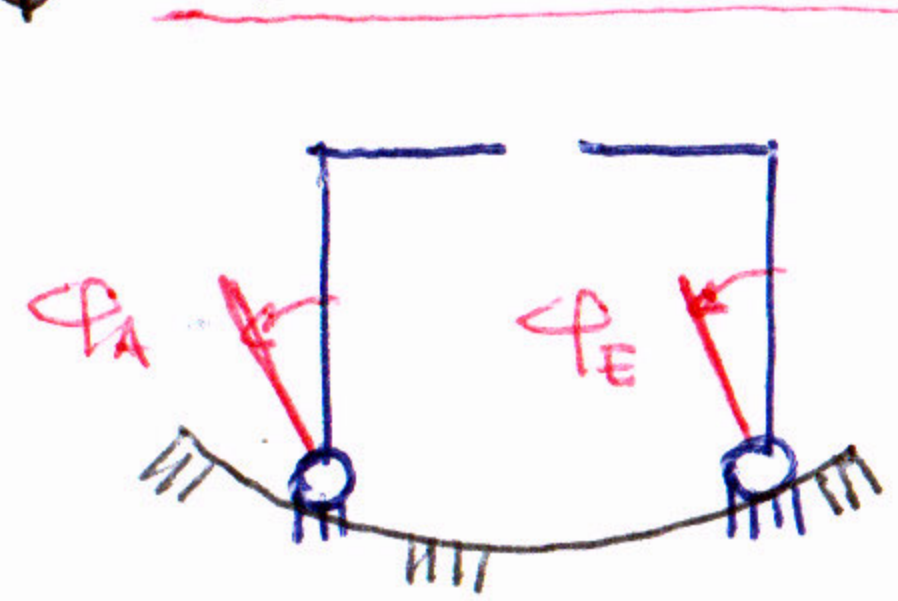
$L = 6 - 5 = 1$
infatti $\det[\mathbf{C}] = h - h = 0$ ($\mathbf{C}$ singolare)

6×6
quadrata
($v=l=6$)

SISTEMA LABILE

Se $\mathbf{C}$ deficiente di rango ($r < l$),
sistema labile
o cinematicamente indeterminato

• Sistema di congruenza ridotto tramite schema ad albero: Si rimuovono i soli qdv, in numero minore possibile, tali da aprire tutte le maglie chiuse (incluso quelle event. formate dalla struttura con la terra).



$$\begin{Bmatrix} \Delta u_c \\ \Delta \varphi_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h & -h \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_E \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow V' = C' \cdot U' = 0$$

$\begin{matrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 & 2 \times 1 \end{matrix}$

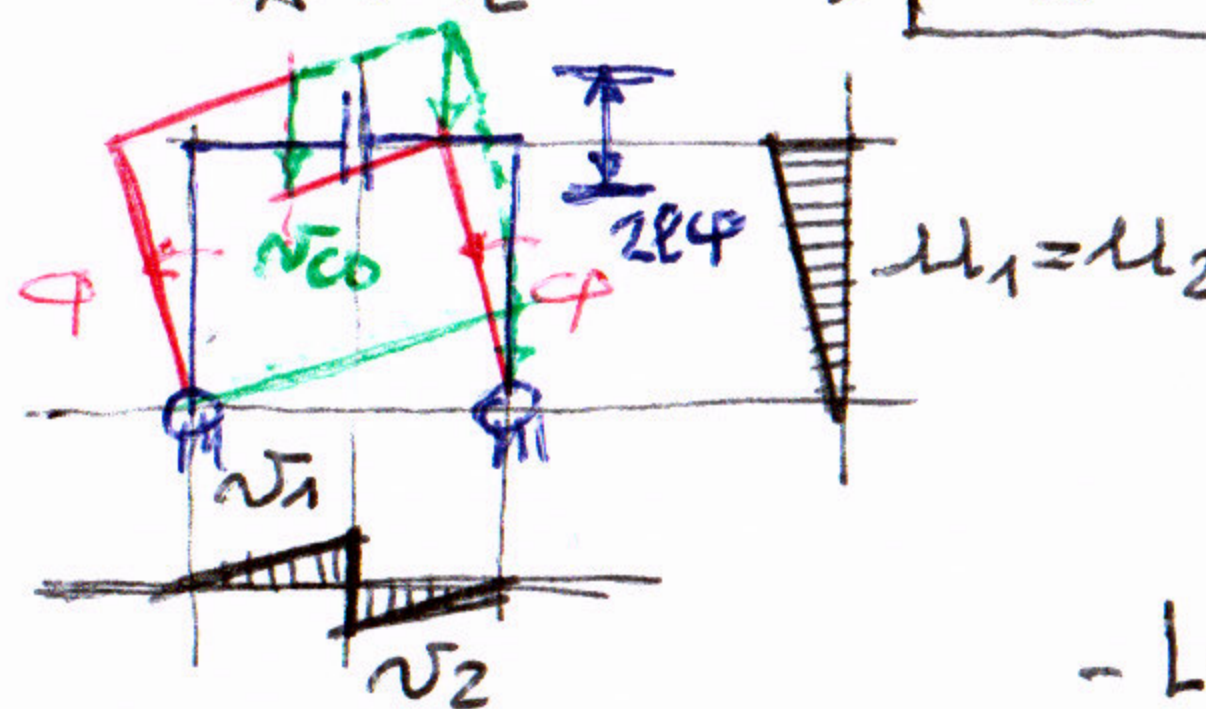
Si ha $L = N[C'] = l' - r[C']$

$= 2 - 1 = 1$ Sistema LABILE
1 colonna lin. dip.

Infatti:

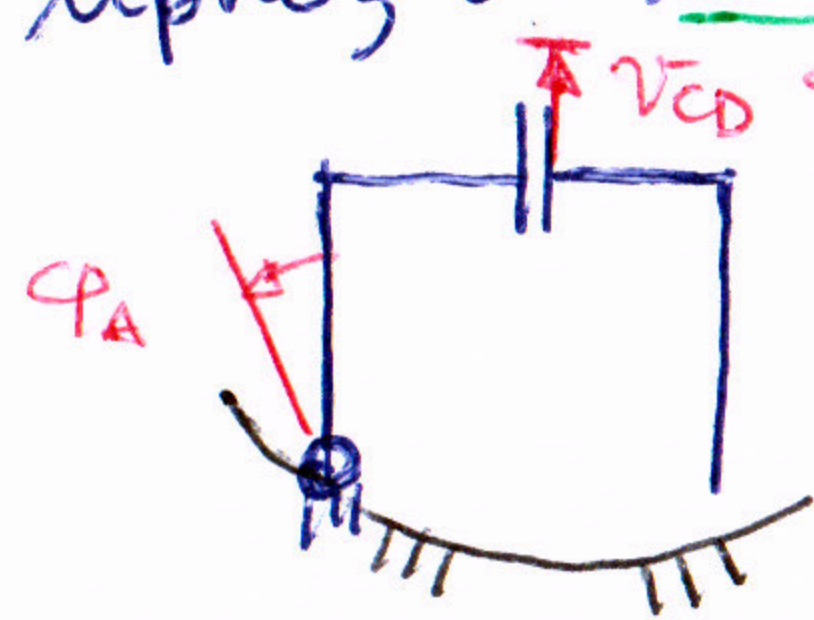
$\det[C'] = 0$

C' singolare $\Rightarrow$ denuncia la labilità di sistema potenzialmente indeterminato.



- Soluzione del sistema (soluzioni non banali): $-\varphi_A + \varphi_E = 0 \Rightarrow \varphi_A = \varphi_E = \varphi$
- Spostata del sistema labile, con mappe:

• Altro schema ad albero (maggiormente tipico, con un piede solo a terra):



$$\begin{Bmatrix} u_E \\ v_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ v_{cd} \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow V'' = C'' \cdot U'' = 0$$

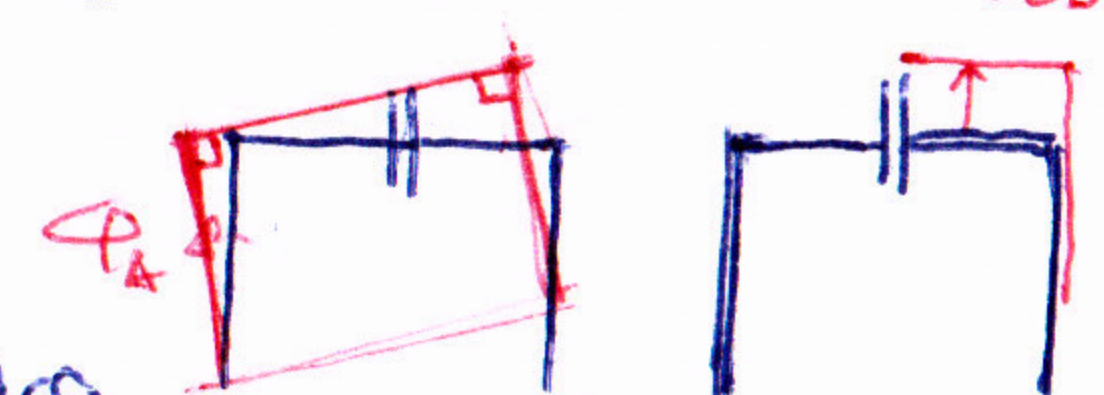
N.B.: qui C'' non sottomatrice di C (poiché U'' non sottovettore di U)

- $L=1$ come sopra, C'' singolare -

- Soluzione: $2l\varphi_A + v_{cd} = 0 \Rightarrow v_{cd} = -2l\varphi_A$

- Spostata come sopra, con v_{cd} applicato in seguito a φ_A (rotaz. di 1+2).

scorrimento relativo negativo (piatto di ds. vs. il basso, rispetto a quello di sn.)

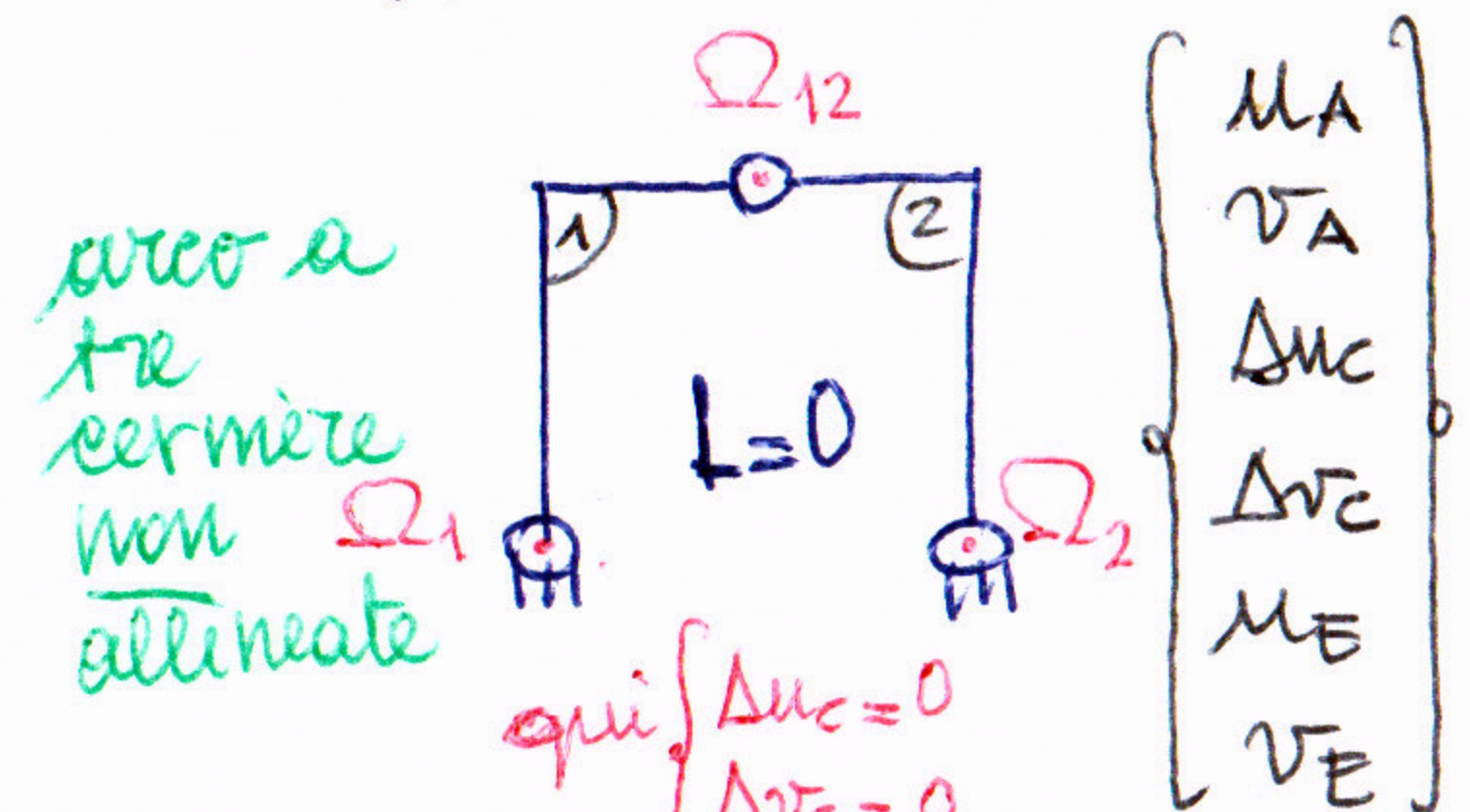


• Procedura generale di AC analitica

- Computo di v e $l=3n$
- Analisi di schema completo o di schema ad albero, con scelta di qdv u o v
- Espressione degli spostamenti in corrispondenza dei vincoli rimossi, in funzione dei qdv scelti:
 $V = V(u)$ oppure $V' = V'(v)$ -
Ciò compila C o C'
- Per cedimenti nulli ($\bar{v}=0$ o $\bar{v}'=0$) il sistema omogeneo ottenuto ammette soluzioni non banali in dipendenza da
 $L = N[C] = l' - r[C] \begin{cases} > 0 \text{ LABILE} \\ = 0 \text{ NON LABILE} \end{cases}$
- Se labile, soluzioni (non banali) del sistema.
- Rappresentazione della spostata (con eventuali mappe di componenti di spostamento).

N.B.: come nell'approccio geometrico, eventuali bielle possono essere inizialmente condensate in catelli, al fine di dedurre la condizione di labilità.

• Rendiamo non labile il sistema, modificando il vincolo relativo in C .



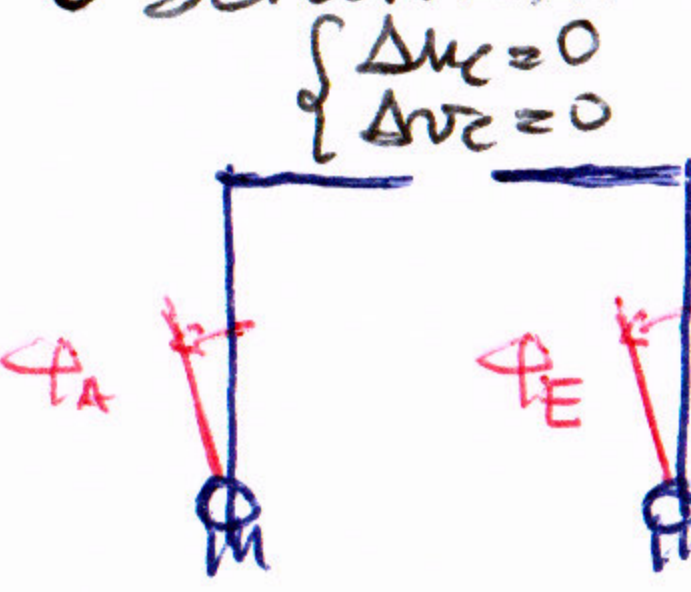
qui $\begin{cases} \Delta u_c = 0 \\ \Delta v_c = 0 \end{cases}$

$\Delta v_c = v_c^{(2)} - v_c^{(1)} = (v_E - \varphi_E l) - (v_A + \varphi_A l)$

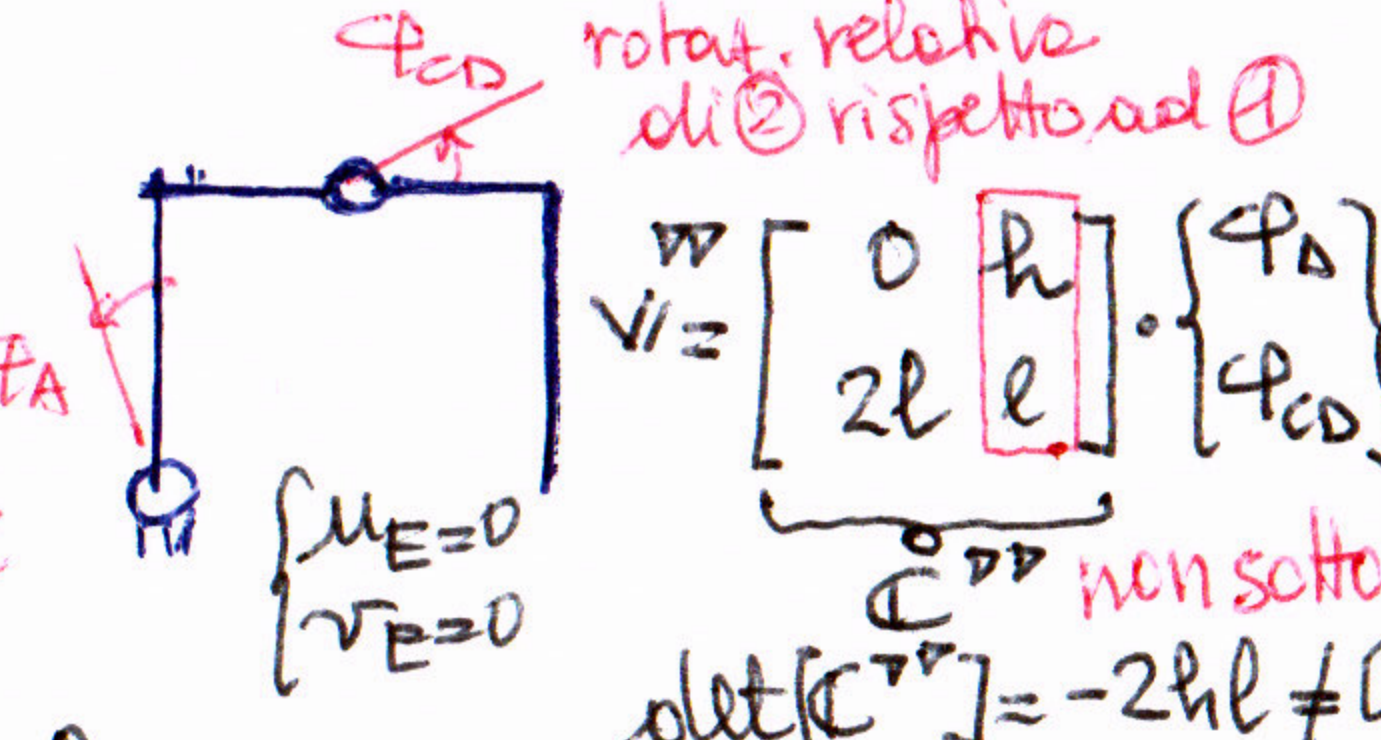
$$\begin{Bmatrix} u_A & v_A & \varphi_A & u_E & v_E & \varphi_E \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & -l & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{Bmatrix} = 0$$

ora $\det[C] = -hl - hl = -2hl \neq 0$
 $L = l - r[C] = 6 - 6 = 0$

• Schemi ad albero:



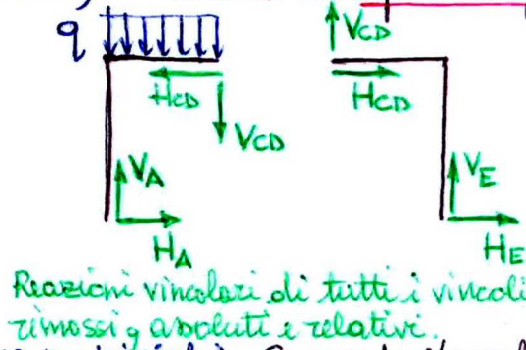
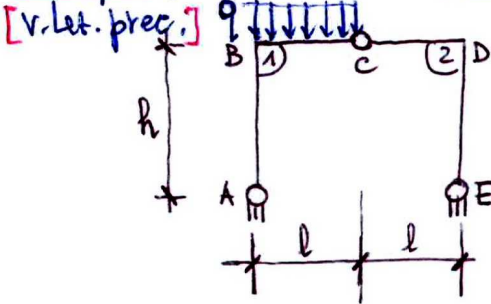
$V' = \begin{bmatrix} h & -h \\ -l & -l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_E \end{Bmatrix} = 0$
 $\det[C'] = -2hl \neq 0$



$\det[C''] = -2hl \neq 0$

6a Lezione CdSdC - Statica e dualità statica/cinematica

Esempio (arco a tre cerniere non allineate) - Analisi con esploso completo.



Reazioni vincolari di tutti i vincoli rimossi, assoluti e relativi.

crizzi@unibg.it

Scrittura delle eq.ni di equilibrio (in numero pari a $l=3n$) (curando l'analogia/dualità con la scelta operata in AC per il 3)

$$\begin{matrix} \begin{matrix} M_A \\ V_A \\ H_A \\ M_E \\ V_E \\ H_E \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \sum F_x^0 = 0 \Rightarrow H_A - H_{CD} = 0 \\ \sum F_y^0 = 0 \Rightarrow V_A - V_{CD} - ql = 0 \\ \sum M_A^0 = 0 \Rightarrow H_{CD}h - V_{CD}l - \frac{ql^2}{2} = 0 \\ \sum F_x^0 = 0 \Rightarrow H_E + H_{CD} = 0 \\ \sum F_y^0 = 0 \Rightarrow V_E + V_{CD} = 0 \\ \sum M_E^0 = 0 \Rightarrow -H_{CD}h - V_{CD}l = 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

asta ①
asta ②

Sistema di equilibrio (in forma matriciale) - Curando l'analogia $V \Leftrightarrow R$, nel vettore r delle reazioni vincolari incognite:

$$S = \begin{bmatrix} H_A & V_A & H_{CD} & V_{CD} & H_E & V_E \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -h & -l & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ql \\ -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow S \cdot r + f = 0$$

matrice di equilibrio
forze reattive
vettore delle forze attive

$$E \cdot r = -f$$

Equiv.: $E \cdot r = -f$

sistema di equilibrio lineare non omogeneo

$$\begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ \Delta u_C \\ \Delta v_C \\ M_E \\ V_E \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix}$$

Per ispezione, avendo curato le corrispondenze
 $U \Leftrightarrow S, f$
 $V \Leftrightarrow R$
Risulta: Trasposto

DUALITÀ $E = C^T; C = E^T$
degli operatori E e C.

Analisi con schema ad albero:

$$\begin{cases} \sum M_A^0 = 0 \\ \sum M_E^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} h & -l \\ -h & -l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_{CD} \\ V_{CD} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow S' \cdot r' + f' = 0$$

2 sole eq.ni di equilibrio
N.B. - qui E' sottomatrice di E
- $E' = C'^T$
- $\det[E'] = -2hl \neq 0 \Rightarrow r' = -E'^{-1} \cdot f'$

Soluzione:

$$\begin{cases} -2h V_{CD} - \frac{ql^2}{2} = 0 \Rightarrow V_{CD} = -\frac{ql^2}{4h} \\ 2h H_{CD} - \frac{ql^2}{2} = 0 \Rightarrow H_{CD} = \frac{ql^2}{4h} \end{cases}$$

Schema ad albero alternativo:

$$\begin{cases} \sum M_A^{0+2} = 0 \\ \sum M_C^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2h \\ h & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_E \\ V_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow S'' \cdot r'' + f'' = 0$$

N.B. - qui E'' non sottomatrice di E
- $E'' = C''^T$
- $\det[E''] = \det[C''] = -2hl \neq 0$

Soluzione:

$$\begin{cases} 2h V_E - \frac{ql^2}{2} = 0 \Rightarrow V_E = \frac{ql^2}{4h} \\ -h H_E + l V_E = 0 \Rightarrow H_E = \frac{l}{h} V_E = \frac{ql^2}{4h} \end{cases}$$

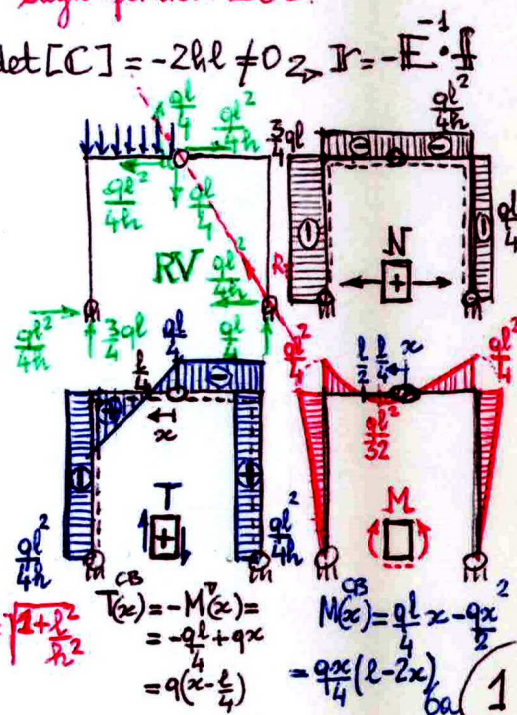
Qui:

$$\det[E] = \det[C] = -2hl \neq 0 \Rightarrow r = -E^{-1} \cdot f$$

Soluzione:

$$r = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ql^2}{4h} \\ \frac{3ql^2}{4h} \\ \frac{ql^2}{4h} \\ -\frac{ql^2}{4h} \\ \frac{ql^2}{4h} \\ \frac{ql^2}{4h} \end{bmatrix}$$

vettore delle RV



• Proprietà del sistema di equilibrio: $E \cdot r = -f$ - $l=3n$ eq.ni in v incognite

- Sistema coerente ("consistent") se ammette almeno una soluzione (sistema equilibrabile)
- Sistema coerente sse $r[E] = r[E, -f]$ (Th. di Rouché-Capelli)
CNS $\hookrightarrow$ rango $\hookrightarrow$ matrice olata dal termine noto
- Sistema non coerente (non ammette alcuna soluzione) sse $r[E] < r[E, -f]$
- Sistema ammette una ed un'unica soluzione sse $r[E] = r[E, -f] = v$ ($I=0$)
Sistema staticamente determinato
- Sistema ammette ∞ soluzioni sse $r[E] = r[E, -f] < v$ ($I>0$)
Sistema staticamente indeterminato

grado di indeterminazione statica
 r di iperstaticità
 $I = N[E] = v - r[E] \geq 0$
rango di E , $r \leq \min\{l, v\}$
 $I=0$: sistema static. determinato.
 $I>0$: sistema static. indeterminato.

Soluzione somma di soluzioni particolare di $E \cdot r = -f$ e delle ∞ soluzioni del sistema omogeneo $E \cdot r = 0$ (det. da I vettori r_i linear. indep., e costituenti il nucleo di E).
(sistemi autoequilibrati di RV)

- Due punti fondamentali: - esistenza delle soluzioni (sistema equilibrabile)
 - soluzione unica o meno (determinaz. vs. indet. statica)

N.B.: - deficienza di rango $\Rightarrow L>0$ indet. cin.
 - deficienza di rango $\Rightarrow I>0$ indet. stat.
 - def. di rango di E e f $\Rightarrow L>0$ e $I>0$ sist. indet.
 molteplicità dei vincoli efficaci

• Classificazione cinematica/statica

AC: sistema di congruenza $\rightarrow v = C \cdot u = \tilde{v} = 0$,
 AS: sistema di equilibrio $\rightarrow s = E \cdot r + f = 0$

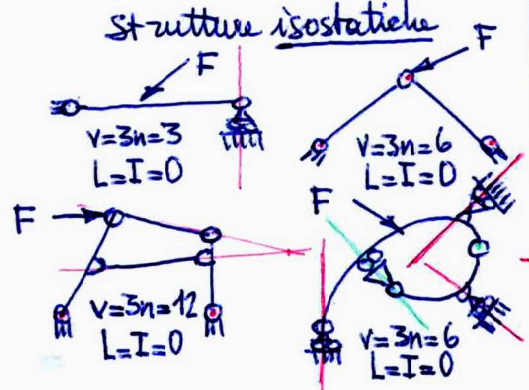
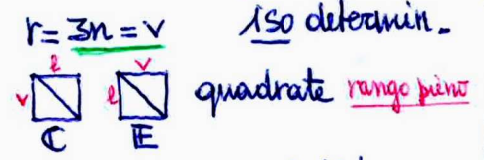
Quindi $\begin{cases} L = l - r \\ I = v - r \end{cases} \rightarrow I - L = v - r - l + r \rightarrow I = L + v - 3n$
diff. tra qdve qdl $\rightarrow$ diff. tra qdl e qdv

grado di labilità o di indet. cin.
 $L = l - r[C]$
grado di iperstaticità o di indet. stat.
 $I = v - r[E]$
 Con corrisp. ($u \leftrightarrow s, f; v \leftrightarrow r$): $E = C^T, C = E \rightarrow r[C] = r[E] = r$

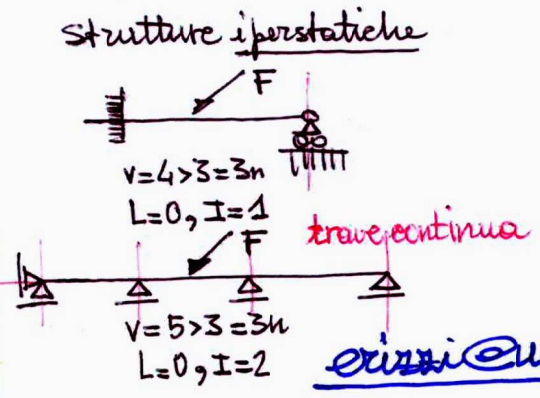
- i gradi di labilità L aggiungono a $v-3n$ dei gradi di indet. stat.
- così come $v < 3n$ è CS di indet. cinem. (labilità) (idem per I sul)
- $v > 3n$ è CS di indet. stat. (iperstaticità)
- se $v = 3n, I = L \geq 0$: $=0$ sistema isodeterminato (isostatico)
 >0 sistema indeterminato

Casistica

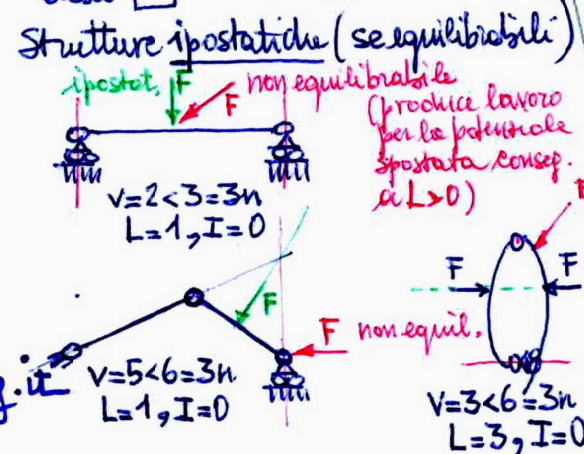
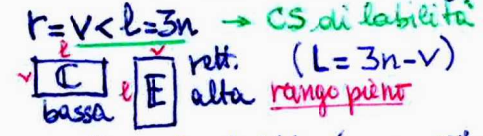
1) $L=0, I=0$ (sistema determ., staticam. e cinem.)
 Iso determin.



2) $L=0, I>0$ (sistema cinem. det. e staticam. indet.)
 $=v-3n$



3) $L>0, I=0$ (sistema cinem. indet. e staticam. det.)



4) $L>0, I>0$ (sistema in det., cin. e static.)
 C, E defic. di rango cin. e static.

