

7a Lez. CdS dC - PLV: ponte tra cinematica e statica

Principio dei Lavori Virtuali

CINEMATICA
 $V = C \cdot u = \bar{V} = 0$

PLV
 $E = C^T, C = E^T$

STATICA
 $S = E \cdot r + f = 0$

Note: - non aggiunge nuove equazioni ma esprime collegamento tra le due sponde della cinematica e della statica

- è dimostrabile (principio $\Rightarrow$ teorema). Vedi meccanica dei continui

- A e B non necessariamente reali, bensì anche virtuali (non legati da rapporto di causa/effetto):
PLV valido indipendentemente dal comportamento del materiale.

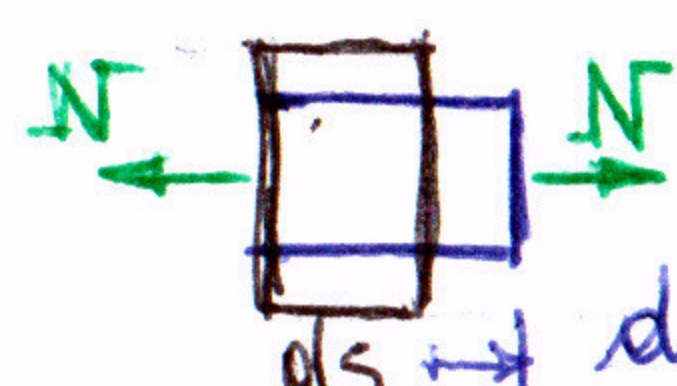
- per corpi indeformabili: $L_i = 0 \Rightarrow L_e = 0$

• Deformazioni elementari: in generale somma di un contributo elastico (reversibile) e di un contributo anelastico (irreversibile),
ad es. per reazioni termiche imprime alla struttura (elongazioni/contrazioni).

$dn = dn_e + dn_t$, $dt = dt_e$, $d\varphi = d\varphi_e + d\varphi_t$ e: elastiche, t: termiche

Deformazioni elastiche del tronco di trave;
dovute alle Azioni Interne N, T, M

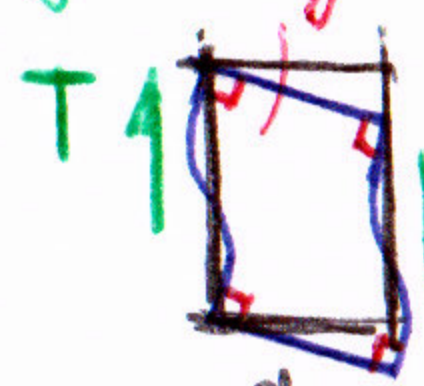
Azioni assiale



$dn_e = \frac{N ds}{EA}$
rigidezza assiale EA

E : modulo di elasticità long.
o modulo di Young
 A : area delle sez. trasv.

Taglio



$dn_e = \frac{T ds}{GA}$
rigidezza tagliante GA

G : modulo di elasticità tangenz.
 $Q = \frac{E}{2(1+\nu)}$ o modulo di taglio
Poisson's ratio

Momento flettente



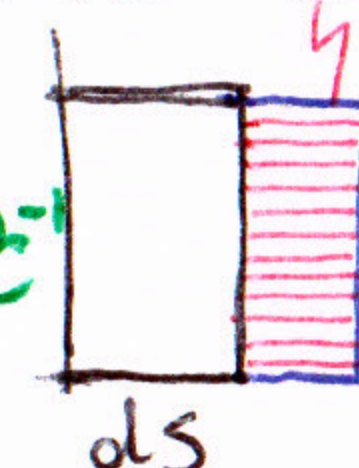
$dn_e = \frac{M ds}{EI}$
rigidezza flessionale EI

I : momento d'inerzia delle sezioni trasv. rispetto all'asse neutro

α : coeff. di dilatazione termica lineare
 $[\alpha] = \frac{1}{[T]}$
 $\alpha \sim 10^{-5} - 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Deformazioni termiche elementari:

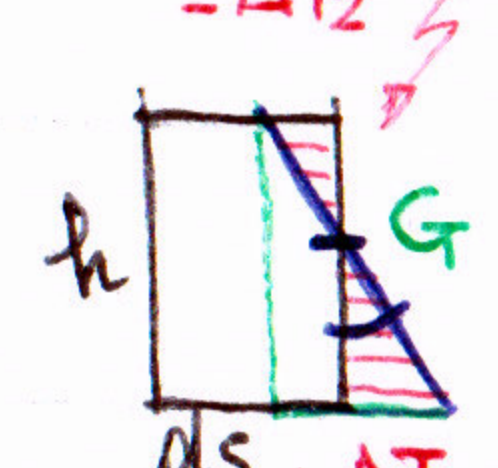
ΔT costante sulla sezione



$\epsilon_t = \alpha \Delta T$
deformat. long. term.

$dn_t = \epsilon_t ds = \alpha \Delta T ds$
elongazione termica

ΔT lineare sulla sezione, con valore nullo in G



$\chi_t = \alpha \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{h}$
curvatura termica

$d\varphi_t = \chi_t ds$
rotazione termica

Spesso:
 $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$
 $d\varphi_t = \frac{2\alpha \Delta T ds}{h}$

• Dimostrazione della relat. di dualità

Da PSV, con A: r, f sist. reale
B: $v = C \cdot u$ sist. virtuale $\Rightarrow$ equil.

$L_e^{AB} = 0$
 $L_e^{AB} = r \cdot v + f \cdot u = 0$ $\Leftrightarrow v, f, u \Leftrightarrow$ lavoro

$(C^T \cdot r + f) \cdot u = 0 \quad \forall u$

$\Rightarrow C^T \cdot r + f = 0$ $\Leftrightarrow$ eq. ne di equil.
scrittura posta per l'equil.

$E = C^T$

A Sistema di quantità statiche staticamente ammissibili (cioè equilibrate).

B Sistema di quantità cinematiche cinematicamente ammissibili (cioè congruenti).

$V(A, B) \Rightarrow L_e = L_i$
lavoro esterno $\downarrow$ AB lavoro interno $\downarrow$ AB lavori mutui prodotti da A per B

Es. nei sistemi di travi:

$L_e^{AB} = \sum_i R_i^A \delta_i^B + F_i^A \delta_i^B + W_i^A \varphi_i^B + q_i^A \tilde{\delta}_i^B$

$L_i^{AB} = \int_{ser} N^A dn^B + T^A dt^B + M^A d\varphi^B$

$\uparrow$ deformazioni elementari del tronco di trave ds

Sovrapposizione delle due forniscono distrib. lineare di ΔT generica sulla sezione.

• Manifestazioni del PLV:

- PSV (prin. degli spostamenti virtuali) $\rightarrow$ CS di equil.

B cinematic. amm. $\Rightarrow$ A static. ammissibile (cioè equilibrato)

- PFV (prin. delle forze virtuali) $\rightarrow$ CS di cong.

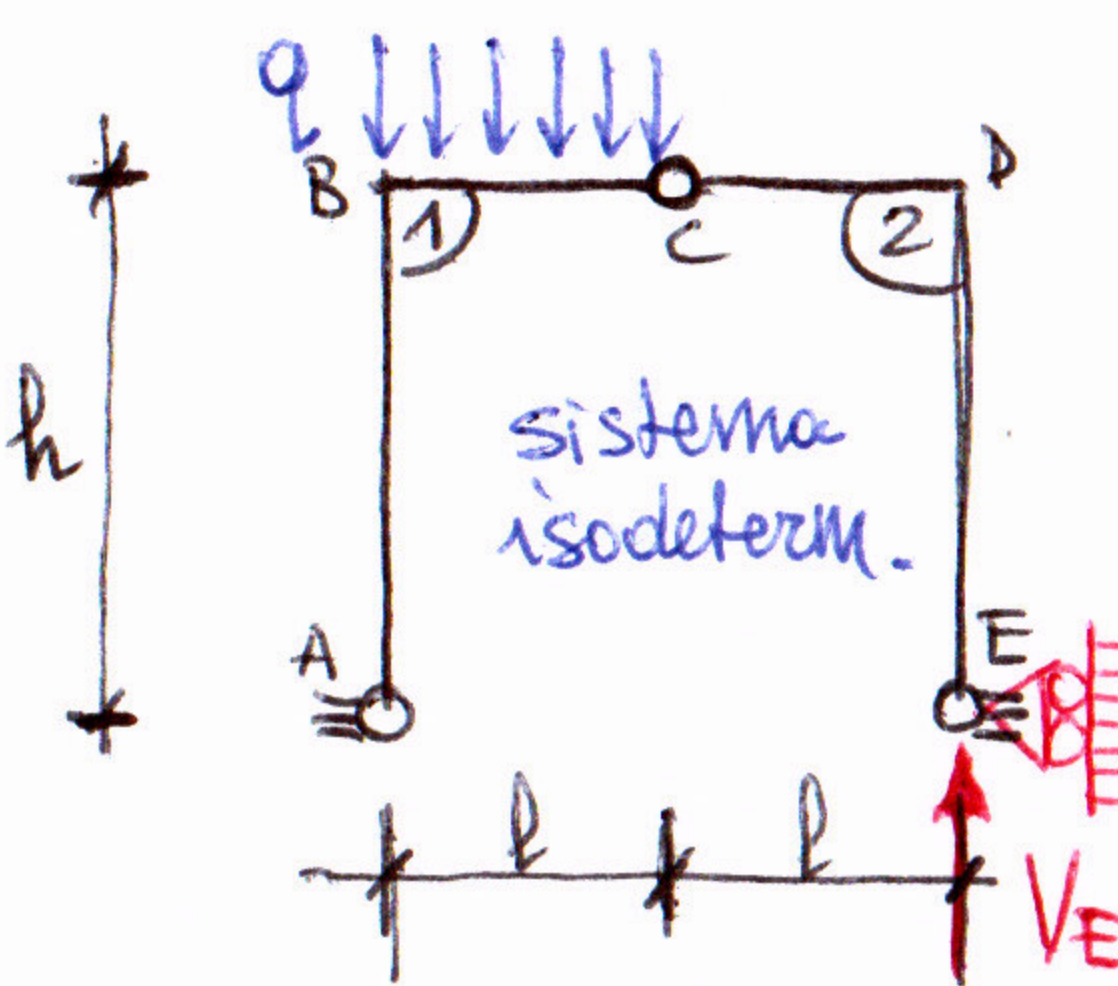
A static. amm. $\Rightarrow$ B cinematic. amm. (cioè congruente)

• Soluzione di strutture (deformabili) staticamente indeterminate

• determinazione di componenti di spostamento δ_i, φ_i

Usi: • determinazione di componenti di RV o AI in strutture staticamente determinate (sistemi articolati di corpi rigidi), con $L_i = 0 \Rightarrow L_e = 0$.

Calcolo di RV col PLV (PSV)



①: Strutt. reale

Calcolo della comp. di RV V_E :

- si rimuove qdv associato, evidenziando la RV incognita
- il valore di V_E , tale da imporre l'equil. è quello tale per cui lo spostamento virtuale ora possibile produce lavoro esterno nullo.

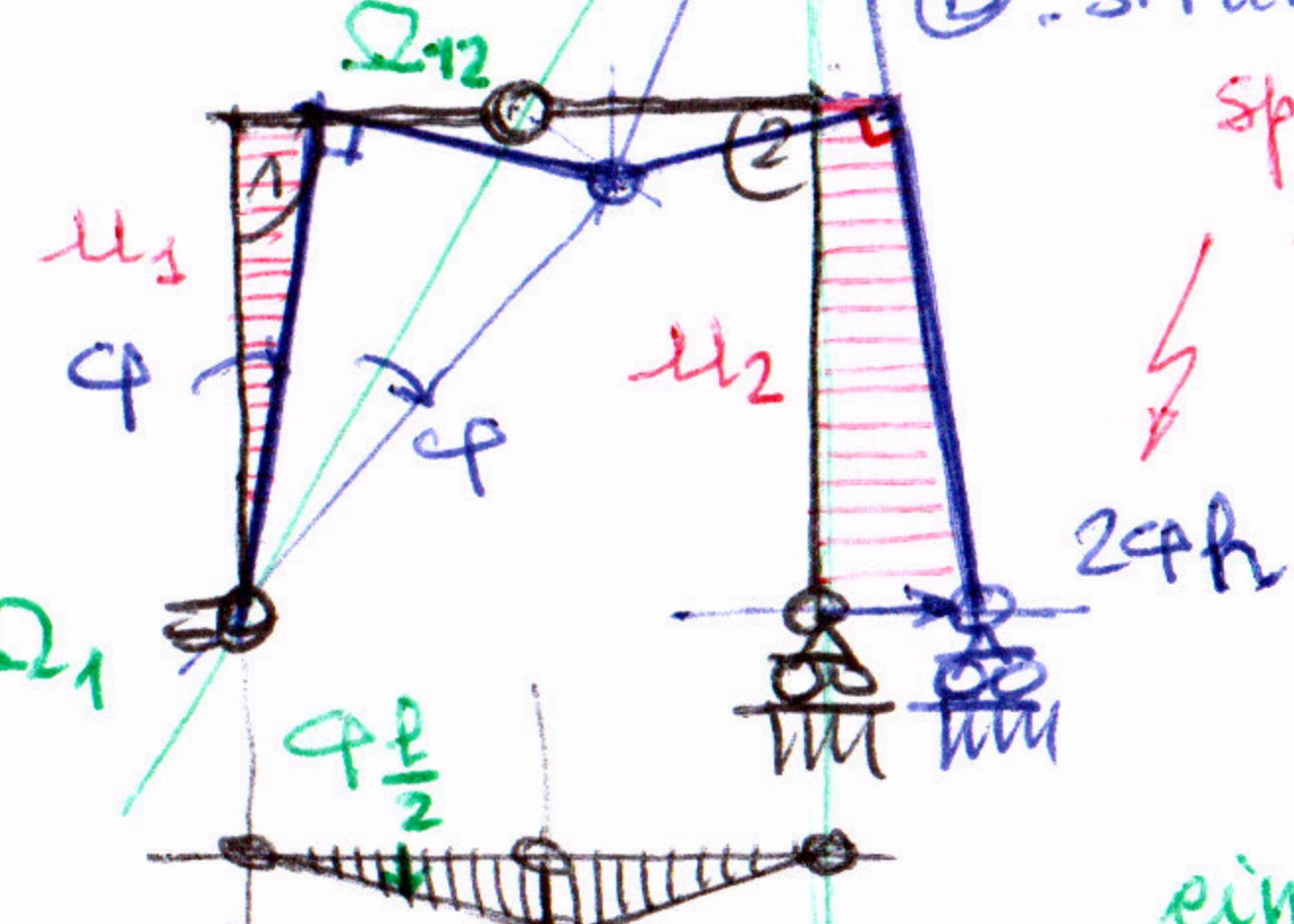
Scrittura del PSV:

② congr. $\Delta u_{AB} = 0$

$$V_E \cdot 2\phi l - q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0 \quad \forall \phi \Rightarrow V_E = \frac{ql}{4}$$

Analogamente, per il calcolo di H_E :

①: strutt. reale



②: strutt. fittizia congruente

Scrittura del PSV:

$$H_E \cdot 2\phi h + q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0 \quad \forall \phi \Rightarrow H_E = -\frac{ql^2}{4h}$$

Qui l'interpretazione dell'eq. ne di equilibrio scritta tramite il PSV è immediata: $\sum M_A^{①+②} = 0$

②: struttura virtuale (fittizia) congruente

← spostata virtuale dalle strutture con vincolo rimosso (compatibile coi vincoli residui)

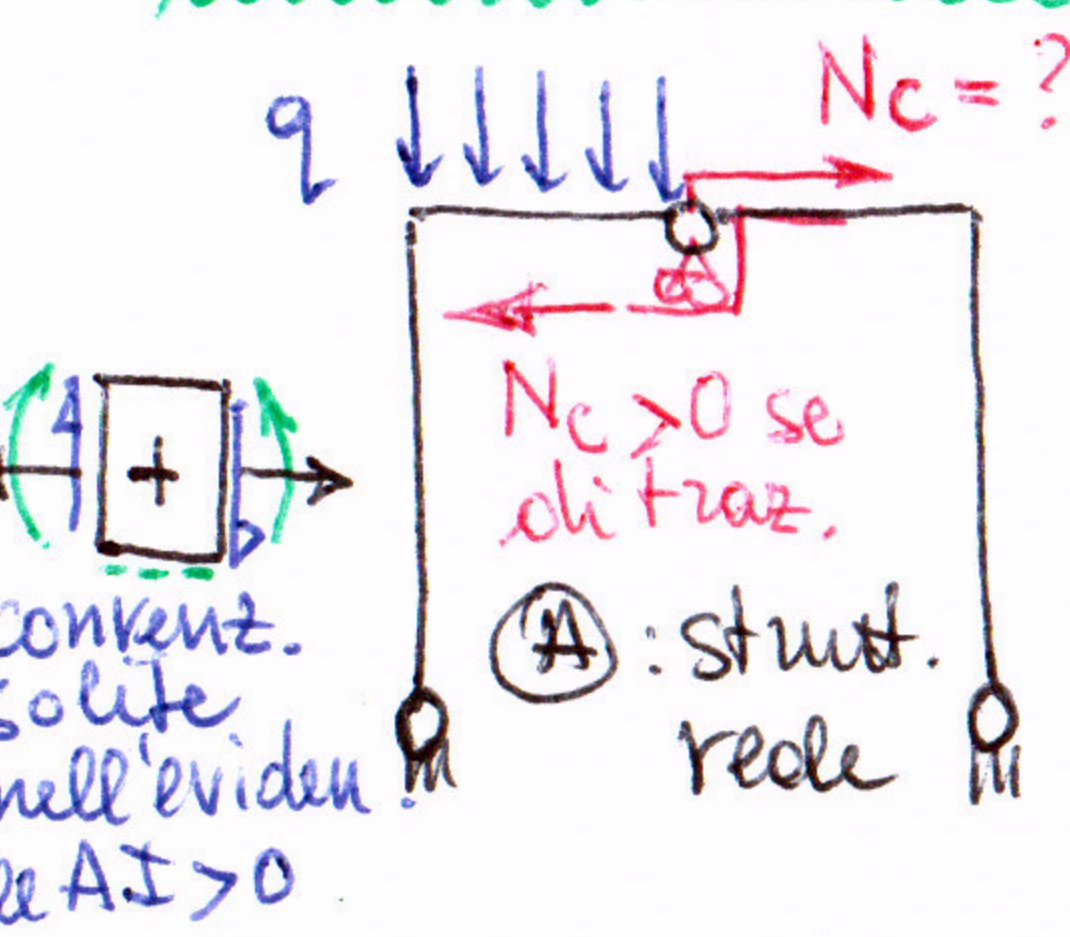
↑ spostata che produce lavoro positivo per V_E

N.B. Lavoro di q:

$$L_q = \int_0^l (q dx) \cdot \phi x = q \phi \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = q \phi \frac{l^2}{2}$$

risultante $= (ql) \cdot (\frac{\phi l}{2})$ spost. del p.to di appl. del risultante

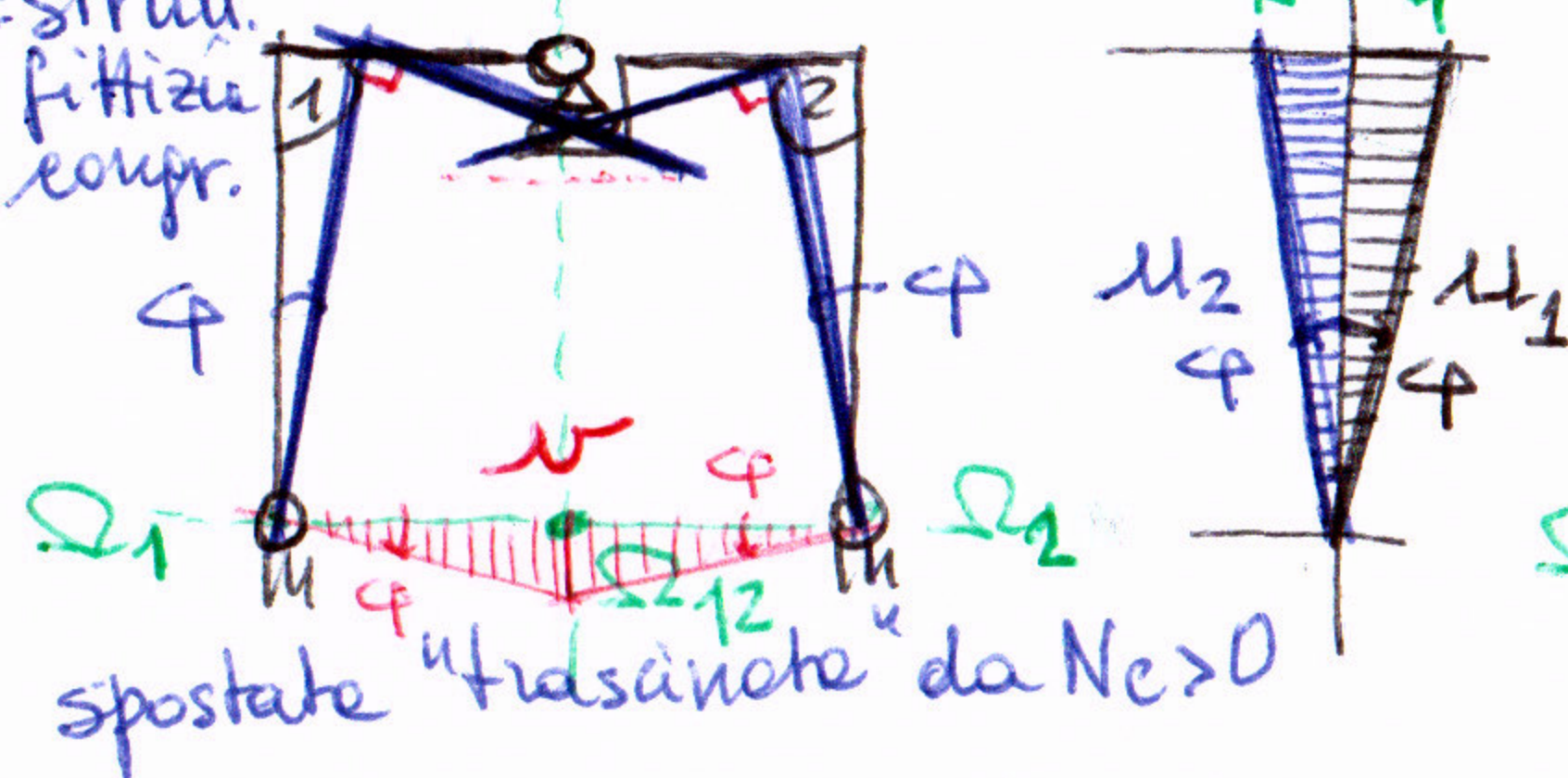
Calcolo di AI col PLV (PSV)



Qui AI può essere vista come RV relativa: in pratica non c'è differenza con alt. eq. precedenti (se non per le presunte di due azioni statiche mutue).

$$\Delta u_c = 2\phi l$$

②: strutt. fittizia congr.



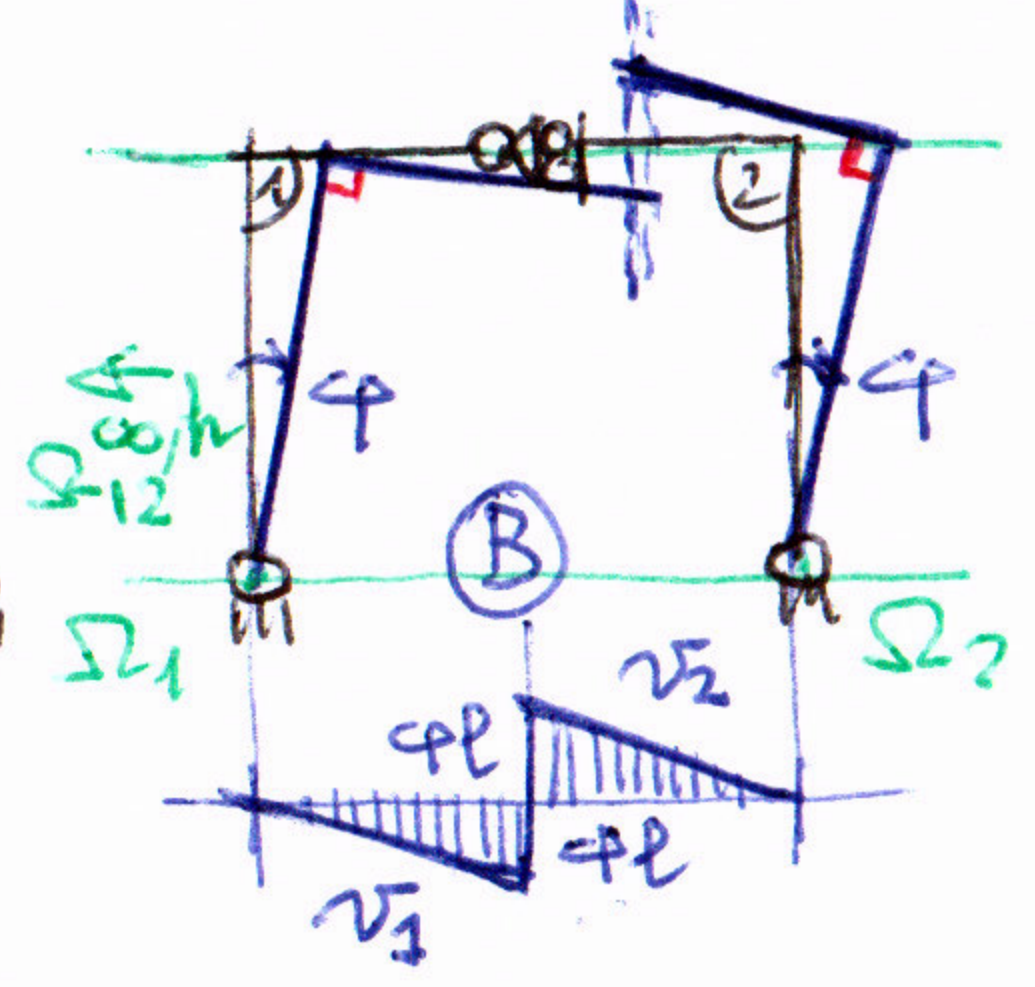
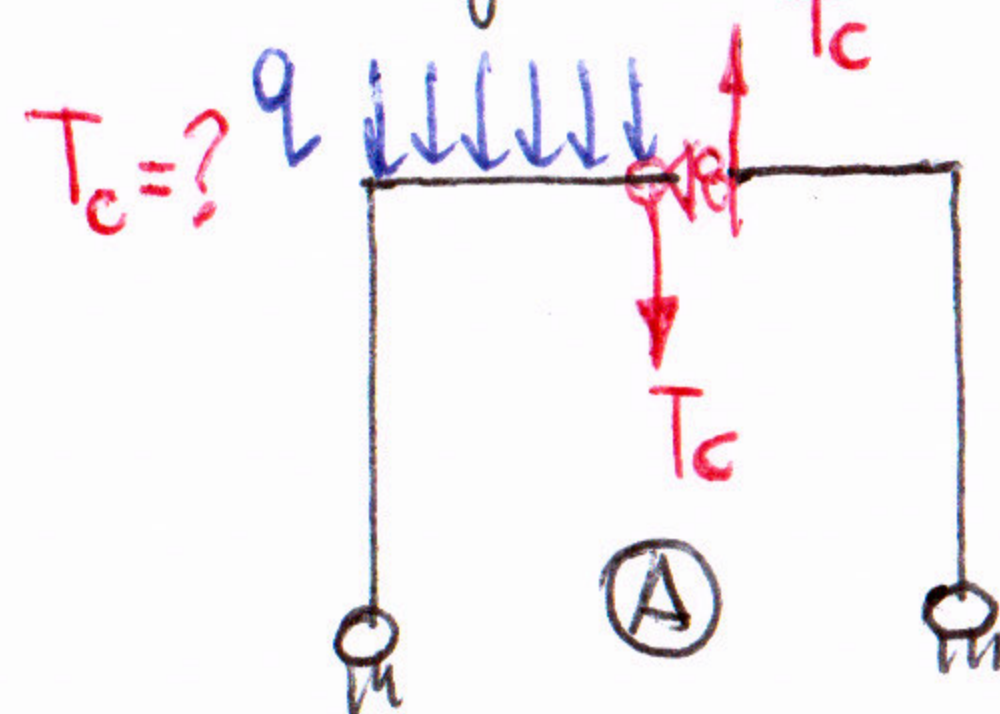
Scrittura del PLV (PSV):

$$L_{AB} = N_c \cdot \phi h + N_c \cdot \phi h + q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0$$

$$= N_c \cdot 2\phi h + q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0 \quad \forall \phi$$

$$N_c = -\frac{ql^2}{4h} \text{ (compressione)}$$

Analogamente:



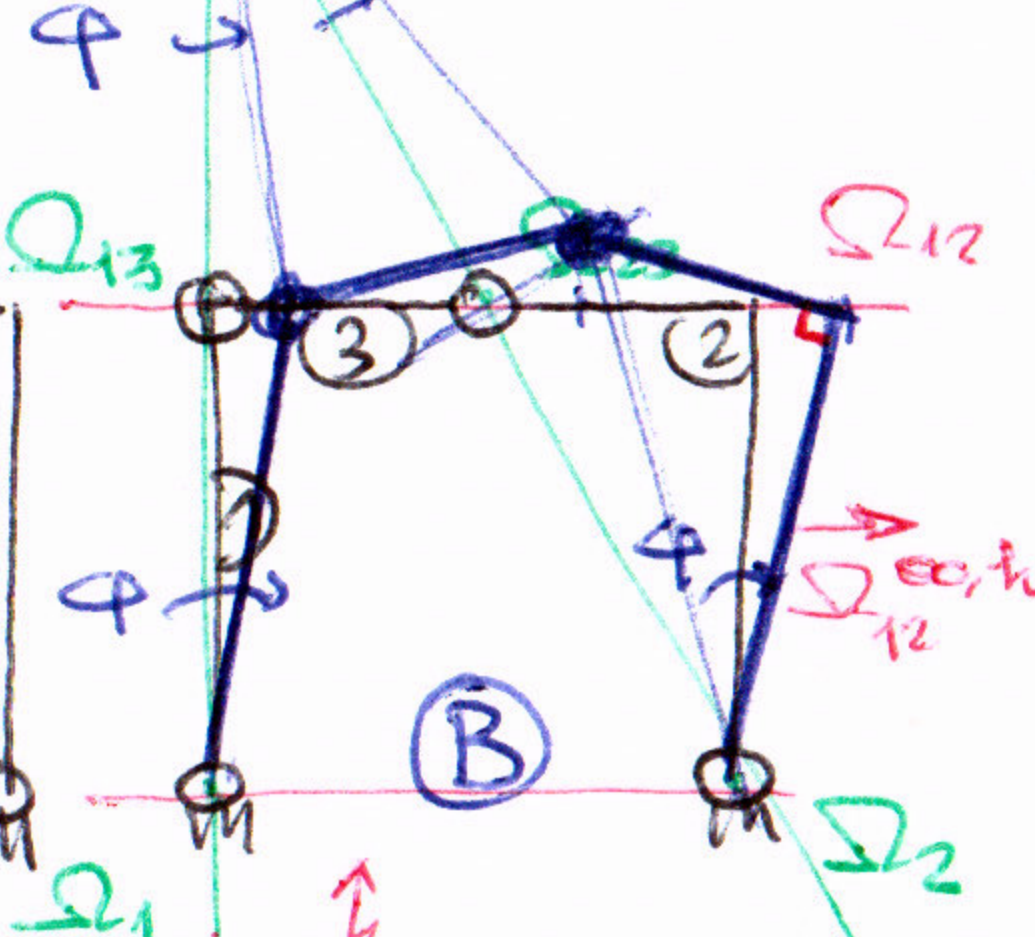
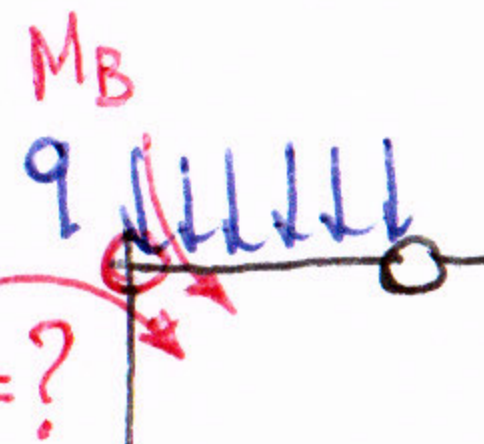
$$L_{AB} = T_c \cdot \phi l + T_c \cdot \phi l + q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0 \quad \forall \phi$$

$$= T_c \cdot 2\phi l + q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0$$

$$T_c = -\frac{ql}{4}$$

ΔH : su asta inclinata:

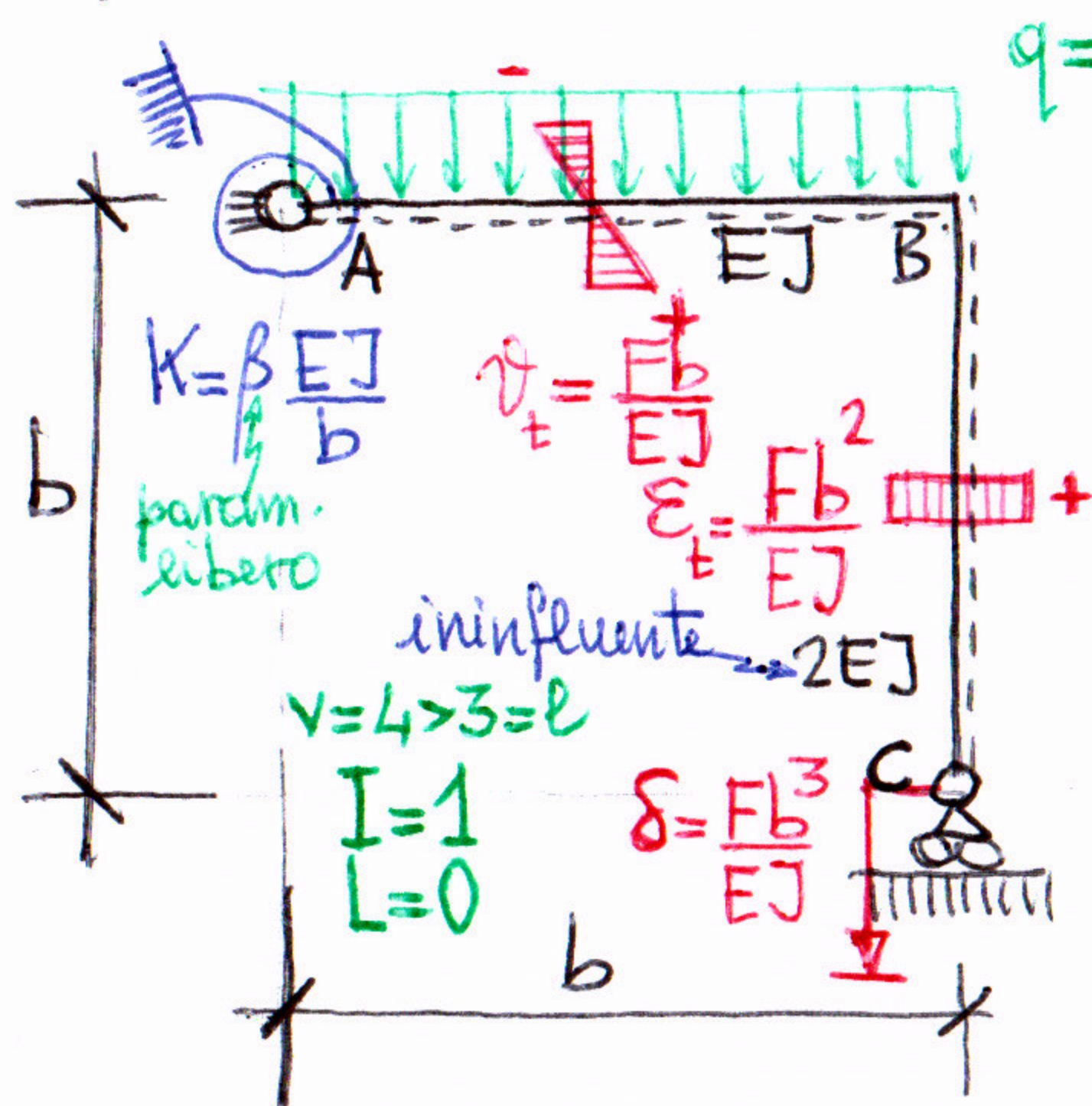
 direz. locali all'asta (non di e v).



$$L_{AB} = M_B \cdot \phi + M_B \cdot \phi + q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0$$

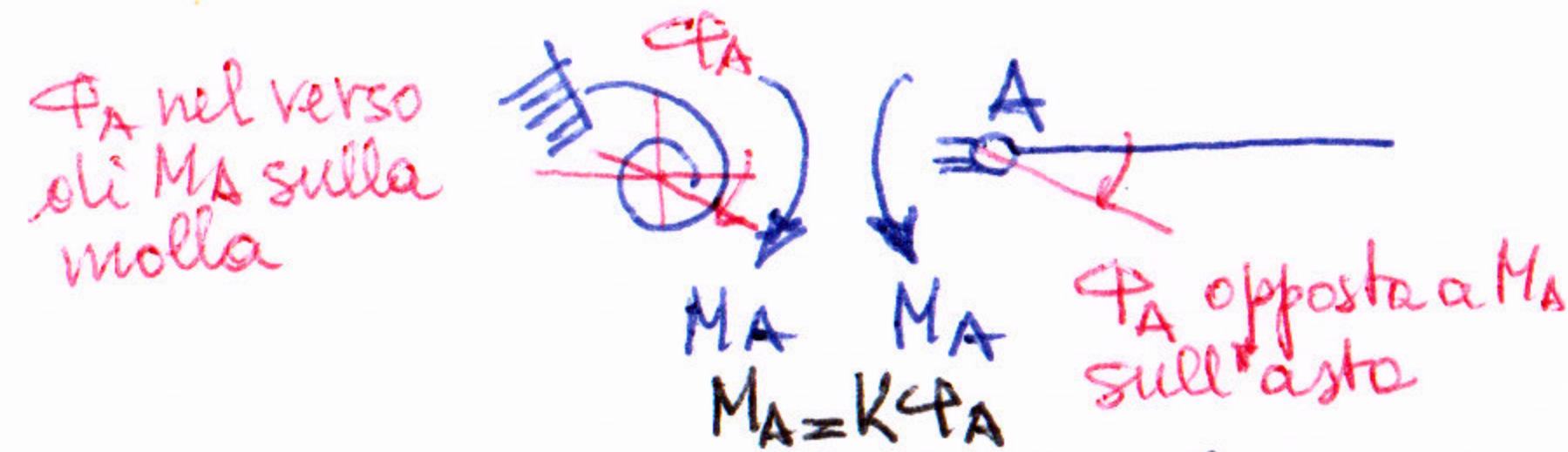
$$= M_B \cdot 2\phi - q l \cdot \frac{\phi l}{2} = 0$$

$$M_B = \frac{ql^2}{4}$$

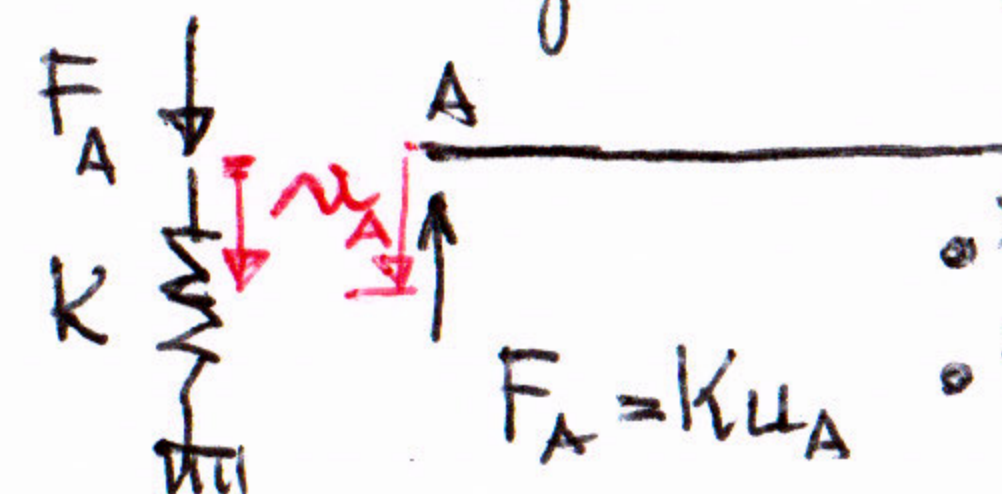


$q = \frac{F}{b}$ • Dati:

- $q = F/b$, carico uniformemente distribuito su AB
- molla elastica rotazionale lineare in A, di costante di rigidità K



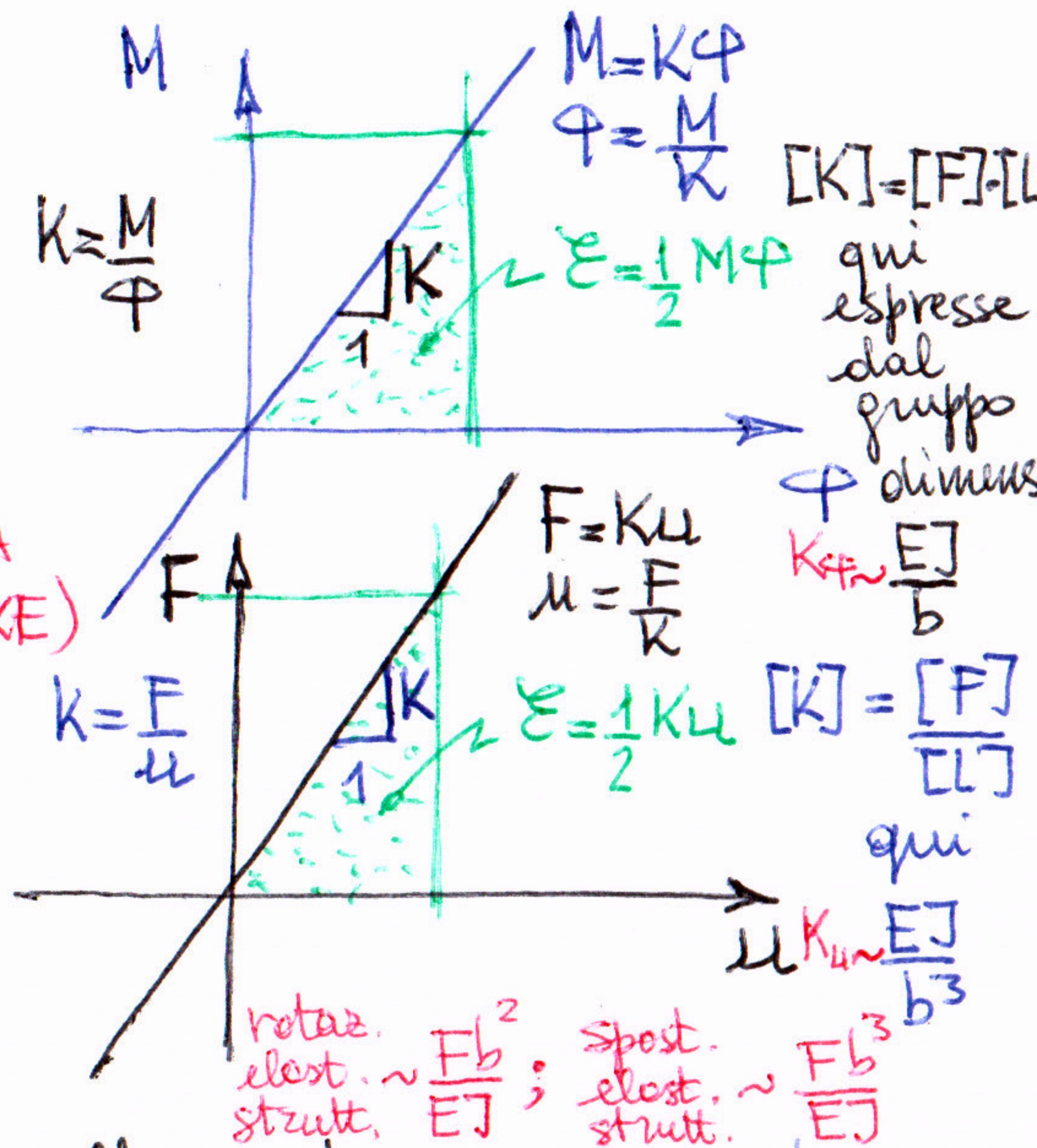
idem per molla elongazionale, se presente



- F_A sull'asta opposta ad u_A
- F_A sulla molla nello stesso verso di u_A

vincolo (con g.d.v. associato alle rotazioni) cedevole elasticamente

MOLLA ELASTICA LINEARE (HOOKE)



- cedimento vincolare permanente (anelastico) in C: $v_c = \bar{v}_c = -\delta = -\frac{Fb^3}{EJ}$ (cedimento vs. il basso).

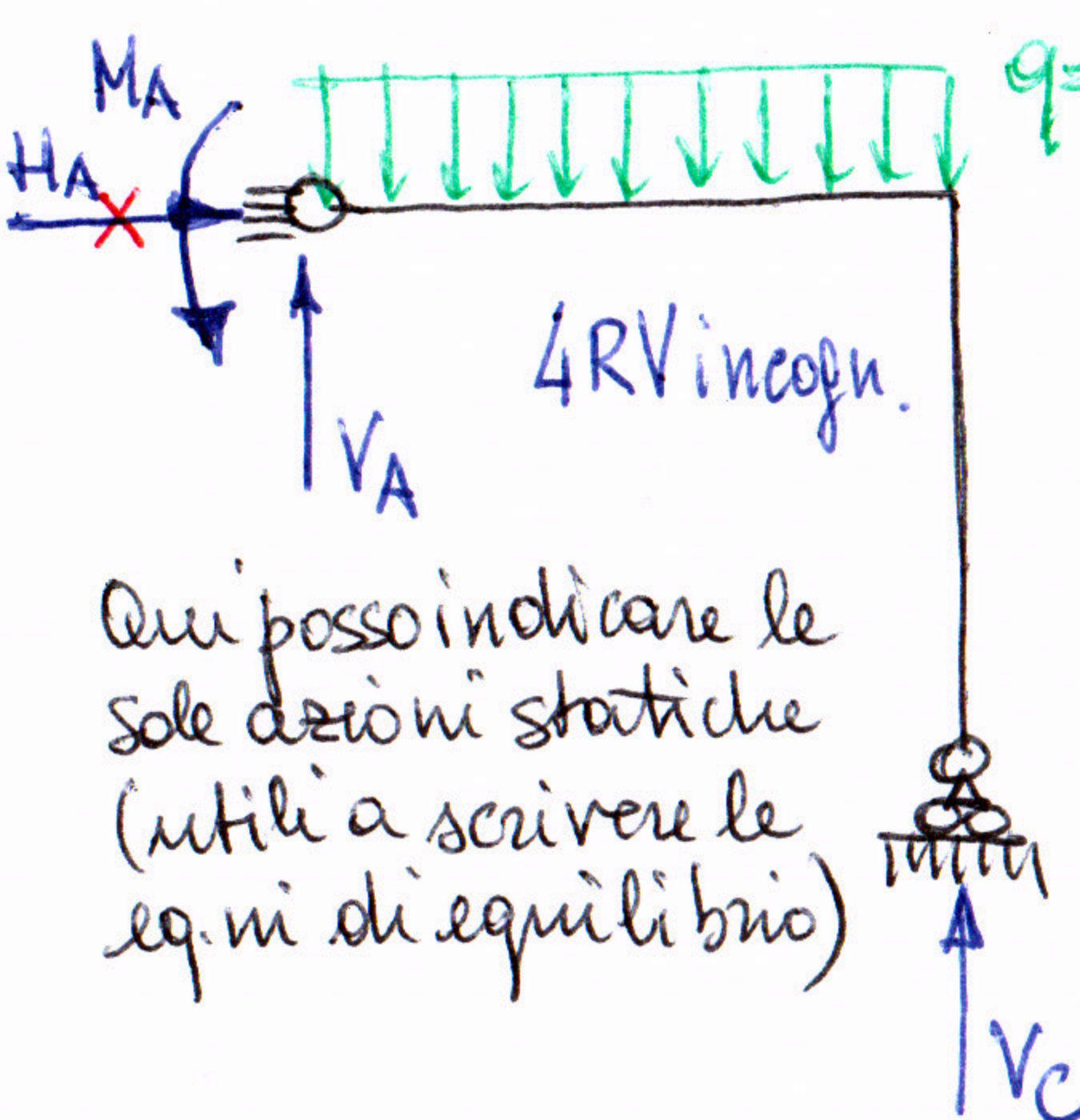
- deformazione termica longitudinale costante su tutta l'asta BE, corrispondente a ΔT uniforme sulle sez. trasv.

$\epsilon_t = \frac{Fb^2}{EJ} \Rightarrow$ gruppo dimens. $\frac{Fb^2}{EJ} = \frac{Fb^3}{EJ \cdot b}$, $[\epsilon_t] = [1]$

- curvatura termica (a farfalla $+\Delta T/-\Delta T$) su tutta l'asta AB:

$\vartheta_t = \frac{Fb}{EJ} \Rightarrow$ gruppo dimens. $\frac{Fb}{EJ} = \frac{Fb^2}{EJ \cdot b}$, $[\vartheta_t] = \frac{[1]}{[L]}$ (curvatura)

Calcolo delle Reazioni Vincolari (con scelta dell'incognite iperstatica)



Qui posso indicare le sole azioni statiche (utili a scrivere le eq. di equilibrio)

Eq. di equilibrio (3):

$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$ staticam. determin.

$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_c b + M_A = \frac{Fb^2}{2}$

$\sum M_C = 0 \Rightarrow -V_A b + M_A = -\frac{Fb^2}{2}$

Check

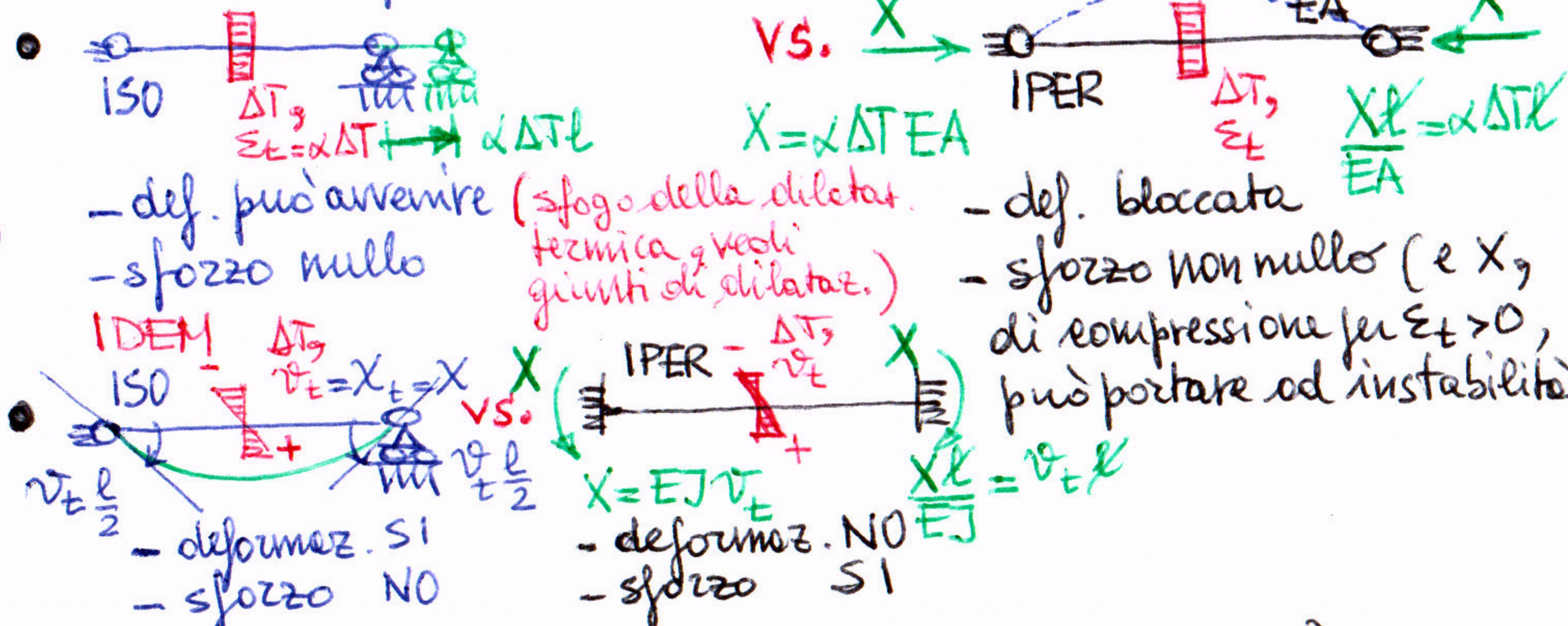
$(V_c + V_A) b = 2 \cdot \frac{Fb^2}{2}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_c = F$

Evidentem. l'equilibrio non basta per det.

$V_A, V_c, M_A \Rightarrow$ e' indetermin. statica tra queste 3 RV.

Rilevanza pratica:



Scelta dell'incognite iperstatica X (metodo delle forze) (ad es., ma non esclusivamente, tra le RV V_A, V_c, M_A).

$X = M_A$ - Possono quindi essere espresse le rimanenti $RV = RV(X)$:

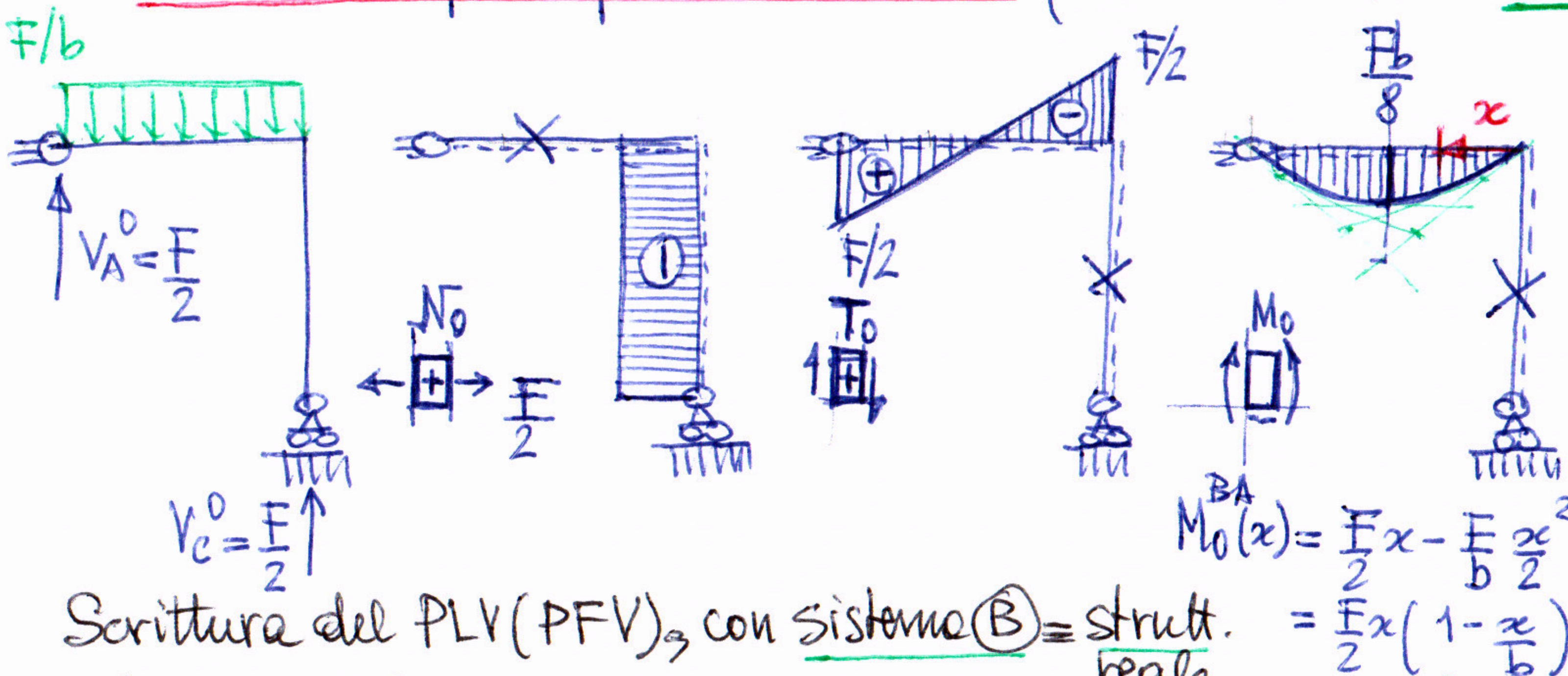
$$\begin{cases} V_A = \frac{F}{2} + \frac{X}{b} \\ V_c = \frac{F}{2} - \frac{X}{b} \end{cases}$$

ci traduce l'indeterm. statica del problema (V valore di X, le $RV(X)$ sono sempre in grado di imporre l'equil. Non è però determinabile il valore di X tramite il solo equil.)

Occorrerà la congruenza $\phi_A = \frac{M_A}{K}$ per risolvere X

Soluzione mediante il PLV (PFV)

Struttura principale isostatica (consolo az. statiche e $X=0$)



Scrittura del PLV (PFV) con Sistema (B) = strutt. reale

① Str. fittizia

② Str. reale congruente
Il PFV consente indirettamente di scrivere l'eq. di congruenza $\phi_A = M_A/K$

$$-\frac{1}{b}(\delta) - \frac{1}{K}X = \int_{str} M^p \frac{M_0 + XM^p}{EJ} ds + \int_{BC} N^p \varepsilon_t ds + \int_{AB} M^p \vartheta_t ds$$

N.B.
 $\begin{cases} RV = RV_0 + X RV^p \\ AI = AI_0 + X AI^p \end{cases}$ per sovrapposizione degli effetti

(trascurando effetti elastici assiali e taglianti)

$$X \left(\frac{1}{K} + \int_{str} \frac{M^p{}^2 ds}{EJ} \right) = \frac{\delta}{b} - \int_{str} \frac{M^p M_0}{EJ} ds - \int_{BC} N^p \varepsilon_t ds - \int_{AB} M^p \vartheta_t ds \Rightarrow X = \frac{- \int_{str} \frac{M^p M_0}{EJ} ds + \frac{\delta}{b} - \int_{BC} N^p \varepsilon_t ds - \int_{AB} M^p \vartheta_t ds}{\frac{1}{K} + \int_{str} \frac{M^p{}^2 ds}{EJ}}$$

Calcolo degli integrali:

$$\int_{str} \frac{M^p M_0}{EJ} ds = \int_0^b \left(-\frac{x}{b} \right) \frac{F}{2} x \left(1 - \frac{x}{b} \right) \frac{dx}{EJ} = -\frac{F}{2bEJ} \int_0^b \left(x^2 - \frac{x^3}{b} \right) dx = -\frac{F}{2bEJ} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4b} \right) = -\frac{4-3}{12} \frac{1}{2} \frac{Fb^2}{EJ} = -\frac{1}{24} \frac{Fb^2}{EJ}$$

è dimensionale una rotazione
Idem per i termini sotto:

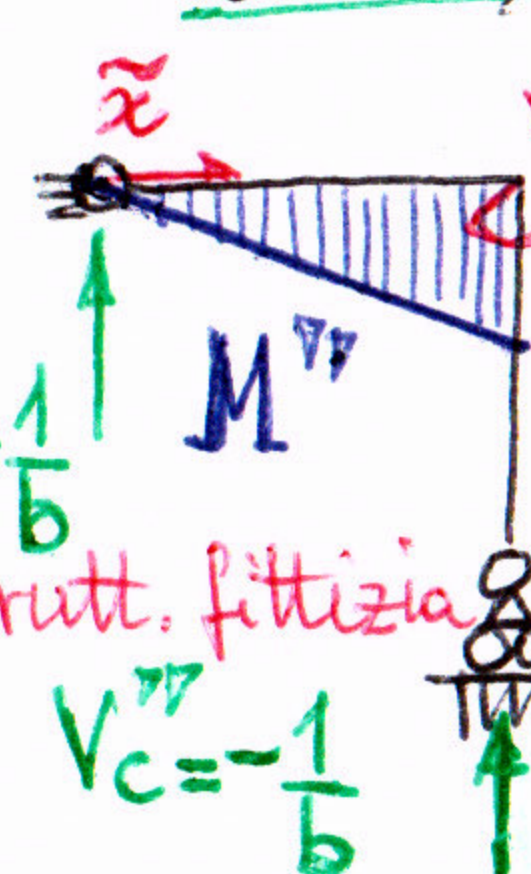
$$\int_{str} \frac{M^p{}^2 ds}{EJ} = \int_0^b \frac{x^2}{b^2} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{3} \frac{b}{EJ} \text{ omogeneo con } 1/K = \frac{1}{\beta} \frac{b}{EJ}, \int_{BC} N^p \varepsilon_t ds = \frac{1}{b} \varepsilon_t b = \frac{Fb^2}{EJ}, \int_{AB} M^p \vartheta_t ds = \vartheta_t \int_0^b -\frac{x}{b} dx = -\frac{b}{2} \vartheta_t = -\frac{1}{2} \frac{Fb^2}{EJ}, \frac{\delta}{b} = \frac{Fb^2}{EJ}$$

Si ottiene:

$$X = Fb \frac{\frac{1}{24} + 1 - 1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{3}} = Fb \frac{13}{24} \frac{\beta}{3+\beta} = \boxed{\frac{13}{8} \frac{\beta}{3+\beta} Fb = X}$$

Sostituendo in $RV(X)$: $V_A = \frac{1}{8} \frac{12+17\beta}{3+\beta} F$, $V_C = \frac{3}{8} \frac{4-3\beta}{3+\beta} F$ ($V_A + V_C = F$)
 ora possibile tracciare N, T, M finali.

Calcolo di spostamenti (es. ϕ_B)



Sistema ①

Sistema ② Strutt. reale

PLV: $1 \cdot \phi_B + \frac{1}{b} \delta = \int_{str} M^p \frac{M_0 + XM^p}{EJ} ds + \int_{BC} N^p \varepsilon_t ds + \int_{AB} M^p \vartheta_t ds$
 Risultato $\phi_B = \frac{13}{48} \frac{6+\beta}{3+\beta} \frac{Fb^2}{EJ}$
 Quindi, per molla rigida ($\Delta l_{dt} \rightarrow 0$): $\mu_C = \phi_B \cdot b$, $v_C = -\delta$

β	0	1	5	∞
X/Fb	0	13/32	65/64	13/8
V_A/F	1/2	29/32	97/64	17/8
V_C/F	1/2	3/32	-33/64	-9/8

V_C cambia di segno ($V_C = 0$ per $\beta = 4/3$)

Per β crescente (molla più rigida) M_A risulta crescente. Ciò alleggerisce l'appoggio C (fino a portare trazione su CB, $V_C < 0$).

$EA \rightarrow \infty$ $GA \rightarrow \infty$

orizzi@unibg.it