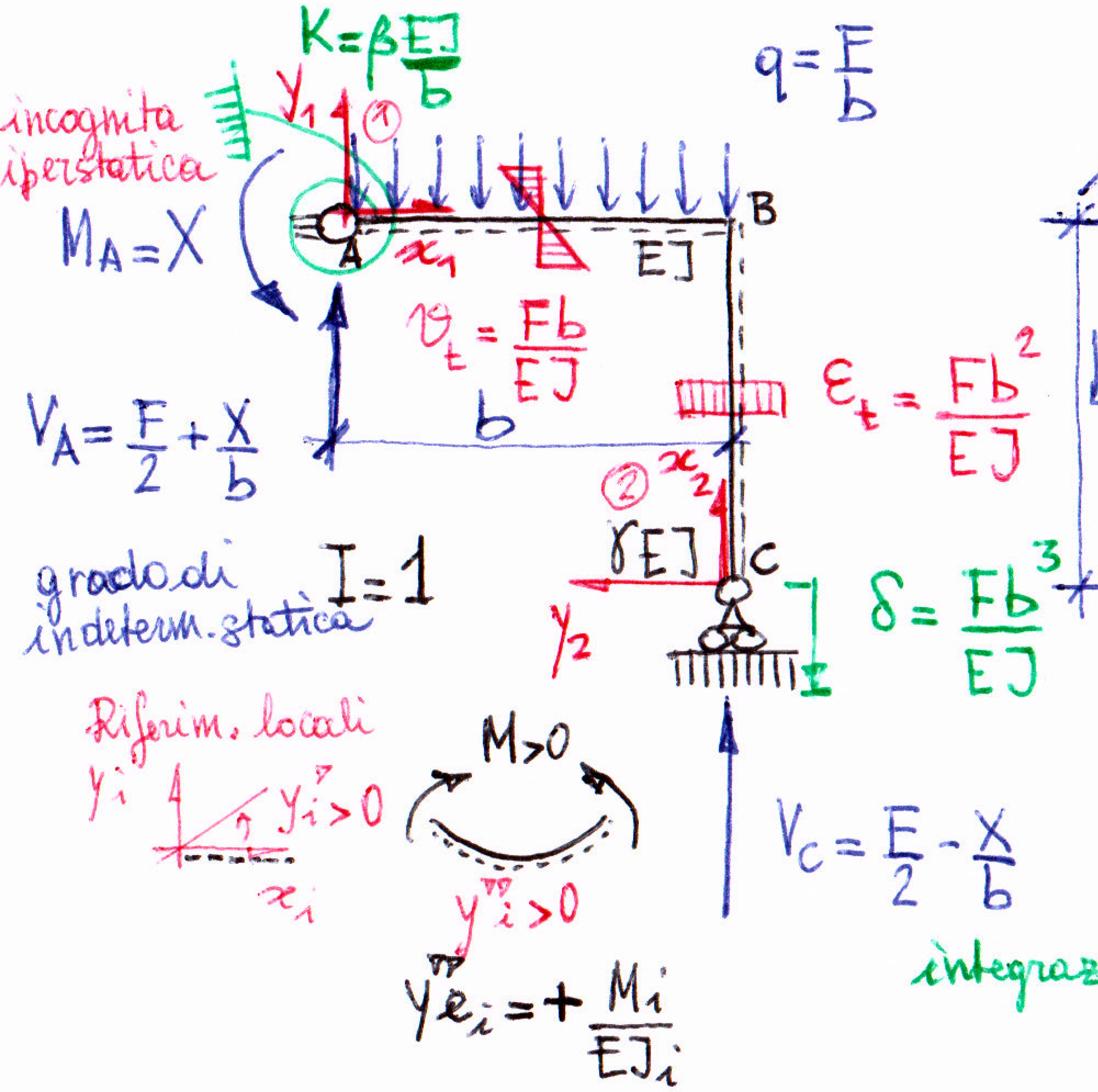
egidio.rizzi@unibg.it



- Nel riferimento locale $x_i, y_i(x_i)$ di ogni tratto $i=1,2\dots n$ (n campi di integrazione):

curvature $\chi_i \simeq y_i''(x_i) = y''_{e_i}(x_i) + y''_{t_i}(x_i)$ ← per tratto con ev. curvatura termica

$|y_i'| \ll 1$; y''_{e_i}: curvatura elastica; y''_{t_i}: curvatura termica χ_t o ϑ_t

$y''_{e_i}(x_i) = \frac{M_i}{EJ_i}$

($2n+I$ condizioni al contorno da imporre)

- Moltiplicando per EJ_i (tipicamente per $EJ_i = cost$ nei vari tratti):

$$EJ_i\, y_i''(x_i) = EJ_i\, y''_{e_i}(x_i) + EJ_i\, y''_{t_i}(x_i)$$
$$= M_i(x_i) + EJ_i\, \vartheta_{t_i}$$

ϑ_t risulta in un termine aggiuntivo in M

N.B.: la rigidezza flessionale del tratto BC è ininfluente

- Tratto ①

integraz. $\int dx_1$

$$EJ y_1'' = -\frac{F}{b}\frac{x_1^2}{2} + \left(\frac{F}{2}+\frac{X}{b}\right)x_1 - X + Fb$$
$$EJ y_1' = -\frac{F}{b}\frac{x_1^3}{6} + \left(\frac{F}{2}+\frac{X}{b}\right)\frac{x_1^2}{2} - X x_1 + Fb\, x_1 + A_1$$
$$EJ y_1 = -\frac{F}{b}\frac{x_1^4}{24} + \left(\frac{F}{2}+\frac{X}{b}\right)\frac{x_1^3}{6} - X\frac{x_1^2}{2} + Fb\frac{x_1^2}{2} + A_1 x_1 + A_2$$

$+(Fb - X)\frac{x_1^2}{2}$

2 costanti d'integrazione ∀ campo

componente di moto rigido nel riferim. scelto

- Tratto ②

$$\gamma EJ y_2'' = M = 0 \to EJ y_2'' = \frac{M}{\gamma} = 0$$
$$EJ y_2' = B_1 \leftarrow \text{cost. d'integr.}$$
$$EJ y_2 = B_1 x_2 + B_2$$

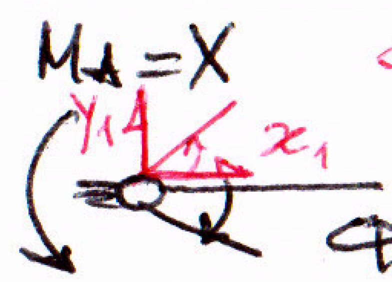
moto rigido dell'asta BC (con all. dovuto ad ε_t)

- Permangono quindi $2n+I=5$ incognite da determinare: X; A_1, A_2; B_1, B_2

- Scrittura delle condizioni al contorno ($n_{c.c.} = 2n+I$):

NB.: le c.c. traducono un fatto fisico (indipendente dai riferimenti) ma la loro scrittura esplicita dipende dai riferimenti scelti (vedi segni ± da non sbagliare)

5 c.c.
- $y_1(0)=0$ cerniera in A
- $y_1'(0) = -\frac{X}{K}$ molla elastica in A



$\varphi_A = -y_1'(0)$; $\varphi_A = \frac{M_A}{K} = \frac{X}{K}$ opposte a X

- $y_1(b) = -\delta + \varepsilon_t b = -\frac{Fb^3}{EJ} + \frac{Fb^2}{EJ}b = 0$ carrello in C + elongazione termica su BC. (B è nodo fisso: $u_B = 0$ per $\left(\frac{EA}{\ell}\right)_{AB} \to \infty$; $v_B = 0$ per $\left(\frac{EA}{\ell}\right)_{BC} \to \infty$ + compensaz. effetti di δ ed ε_t)
- $y_1'(b) = y_2'(b)$ continuità alle rotazioni in B

- $y_2(b)=0$ cerniera in A + $\left(\frac{EA}{\ell}\right)_{AB} \to \infty$ ← inestensibilità assiale elastica dell'asta AB.

- Imposizione delle c.c.
- $y_1(0)=0 \to \boxed{A_2=0}$ sopprime la traslaz. rigida verticale nel riferim. ①.
- $y_1'(0) = -\frac{X}{K} \to EJ\, y_1'(0) = -\frac{X}{K}EJ \to A_1 = -\frac{X}{\frac{\beta}{b}} = \boxed{-\frac{b}{\beta}X = A_1(X)}$ - Sost. X: $\boxed{A_1 = -\frac{13}{8}\frac{1}{3+\beta}Fb^2}$
- $y_1(b)=0 \to -\frac{F}{b}\frac{b^4}{24} + \left(\frac{F}{2}+\frac{X}{b}\right)\frac{b^3}{6} - X\frac{b^2}{2} + Fb\frac{b^2}{2} + A_1 b + \cancel{A_2} = 0 \to \frac{Fb^3}{24}(-1+2+12) - Xb^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}\right) = 0 \to +\frac{13}{24}Fb - X\frac{-\beta+3\beta+6}{6\beta} = 0 \to X = \frac{13}{24}Fb\frac{6\beta}{2(3+\beta)}$

Il metodo della LE ha consentito di valutare φ_A, quindi di determinare l'incognita iperstatica scelta

$$\boxed{X = \frac{13}{8}\frac{\beta}{3+\beta}Fb}$$

- $y_1'(b) = y_2'(b) \Rightarrow -\frac{F}{b}\frac{b^3}{6} + \left(\frac{F}{2}+\frac{X}{b}\right)\frac{b^2}{2} - Xb + Fb\,b + \underbrace{A_1}_{-\frac{b}{\beta}X} = B_1 \Rightarrow B_1 = Fb^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+1\right) - Xb\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{\beta}\right) = Fb^2\,\frac{-2+3+12}{12} - Xb\,\frac{-\beta+2\beta+2}{2\beta}$

$$\boxed{B_1 = \frac{13}{12}Fb^2 - \frac{2+\beta}{2\beta}bX}$$

Sostituendo X:

$$B_1 = \frac{13}{12}Fb^2 - \frac{2+\beta}{2\cancel{\beta}}\,b\,\frac{13}{8}\frac{\cancel{\beta}}{3+\beta}Fb = \frac{13}{48}Fb^2\left(4 - 3\,\frac{2+\beta}{3+\beta}\right) = \frac{13}{48}Fb^2\left(\frac{12+4\beta-6-3\beta}{3+\beta}\right) = \boxed{\frac{13}{48}\,\frac{6+\beta}{3+\beta}Fb^2 = B_1}$$

- $y_2(b) = 0 \Rightarrow B_1 b + B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = -B_1 b$

$$\boxed{= -\frac{13}{12}Fb^3 + \frac{2+\beta}{2\beta}b^2X = B_2}$$ – Sostit. X:

$$\boxed{B_2 = -\frac{13}{48}\,\frac{6+\beta}{3+\beta}Fb^3}$$

– Scrittura delle LE finali:

- $EJ\,y_1(x_1) = -\frac{F}{b}\frac{x_1^4}{24} + \left(\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\frac{\beta}{3+\beta}\right)F\frac{x_1^3}{6} + \left(1-\frac{13}{8}\frac{\beta}{3+\beta}\right)Fb\frac{x_1^2}{2} - \frac{13}{8}\frac{Fb^2}{3+\beta}x_1$

$$= -\frac{F}{b}\frac{x_1^4}{24} + \frac{4(3+\beta)+13\beta}{3+\beta}\frac{Fx_1^3}{48} + \frac{8(3+\beta)-13\beta}{3+\beta}\frac{Fb\,x_1^2}{16} - \frac{13}{8}\frac{Fb^2}{3+\beta}x_1$$

$$= -\frac{F}{b}\frac{x_1^4}{24} + \frac{12+17\beta}{3+\beta}\frac{Fx_1^3}{48} + \frac{24-5\beta}{3+\beta}\frac{Fb\,x_1^2}{16} - \frac{13}{8}\frac{Fb^2}{3+\beta}x_1$$

- $EJ\,y_2(x_2) = \frac{13}{48}\frac{6+\beta}{3+\beta}Fb^2x_2 - \frac{13}{48}\frac{6+\beta}{3+\beta}Fb^3$

– Inoltre, da X trovata, si determinano RV finali sostituendo in RV(X): $V_A = \frac{1}{8}\frac{12+17\beta}{3+\beta}F$; $V_C = \frac{3}{8}\frac{4-3\beta}{3+\beta}F$

– Si tracciano quindi N, T, M finali

– Calcolo di componenti di spostamento (a partire dalle eq.ni finali delle LE trovate) [da esprimersi nel rif. assoluto scelto (v, φ, u)]

moto rigido rotatorio ($+\varepsilon_t$)

$\varphi>0$: $\varphi_A = -\frac{X}{K} = -\frac{13}{8}\frac{\cancel{\beta}}{3+\beta}Fb\frac{b}{\cancel{\beta}EJ} = -\frac{13}{8}\frac{1}{3+\beta}\frac{Fb^2}{EJ}$ (N.B. Se $\beta\to\infty$, $\varphi_A\to 0$)

$u>0$: $u_C = -y_2(0) = -\frac{B_2}{EJ} = \frac{13}{48}\frac{6+\beta}{3+\beta}\frac{Fb^3}{EJ} = \varphi_B\cdot b$

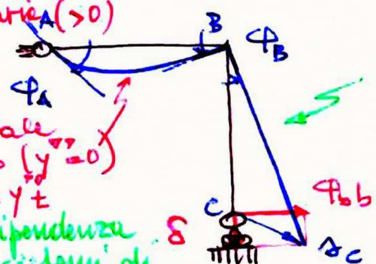
$\varphi>0$: $\varphi_B = \frac{B_1}{EJ} = \frac{13}{48}\frac{6+\beta}{3+\beta}\frac{Fb^2}{EJ}$

$\varphi_A = +y_1'(0)$ oraria (<0)

$\varphi_B = +y_1'(b)$ antioraria (>0)

$v>0$: $v_C = -\frac{Fb^3}{EJ}$ (imposto) $= y_1(b) + $ deve risultare per verifica $- \varepsilon_t b$

– Rappresentazione della deformata qualitativa

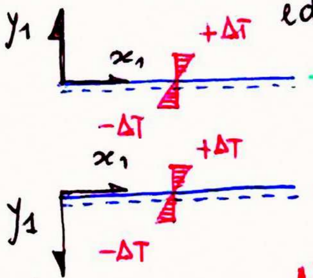


N.B.: curvatura totale e p.ti di flesso ($y''=0$) dip. da y_e'' e y_t'' (in dipendenza dai sistemi di riferimento locali scelti)

moto rigido (+ elongazione termica)
Asta BC non inflessa e senza X_t (quindi senza curvatura)

— o —

- Scrittura delle c.c.: Att. ai segni! e delle eq.ni differenz. di partenza

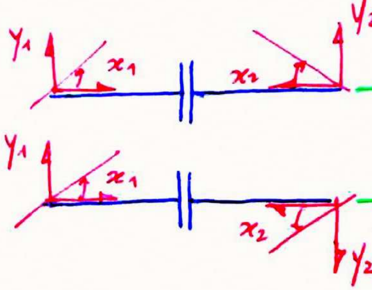


$\rightarrow EJ\,y_1'' = +M - EJ\vartheta_t$

$\rightarrow EJ\,y_1'' = -M + EJ\vartheta_t$

$\rightarrow y_1(b) = y_2(b)$

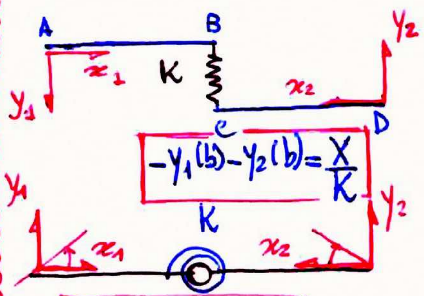
$\rightarrow y_1(b) = -y_2(b)$



$\rightarrow y_1'(b) = -y_2'(b)$

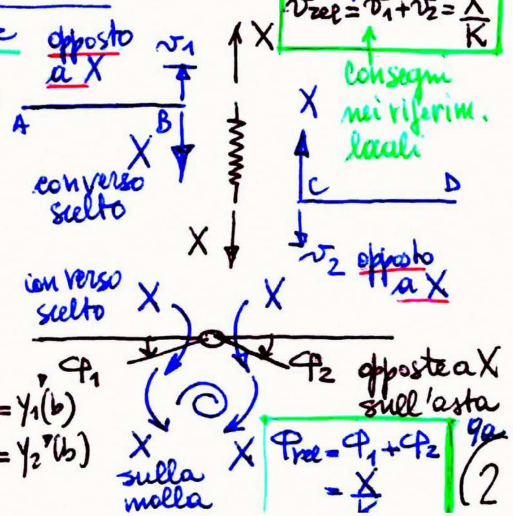
$\rightarrow y_1'(b) = y_2'(b)$

c.c. su molle relative



$$\boxed{-y_1(b) - y_2(b) = \frac{X}{K}}$$

$$\boxed{y_1'(b) + y_2'(b) = \frac{X}{K}}$$



$v_1 = -y_1(b)$
$v_2 = -y_2(b)$

$$\boxed{v_{rel} = v_1 + v_2 = \frac{X}{K}}$$

consegni nei riferim. locali

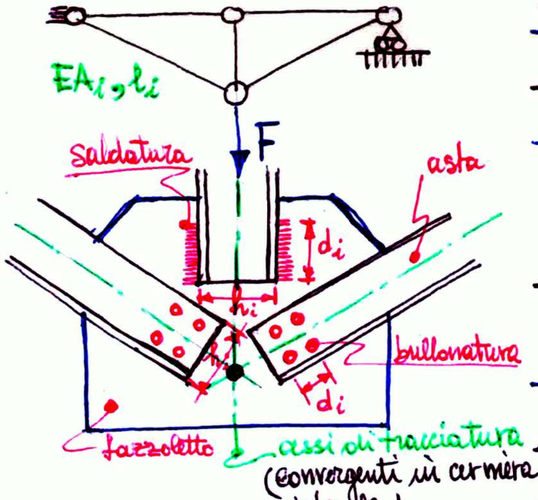
$\varphi_1 = y_1'(b)$
$\varphi_2 = y_2'(b)$

$$\boxed{\varphi_{rel} = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{X}{K}}$$

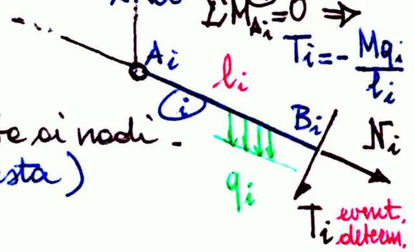
egidio.rizzi@unibg.it

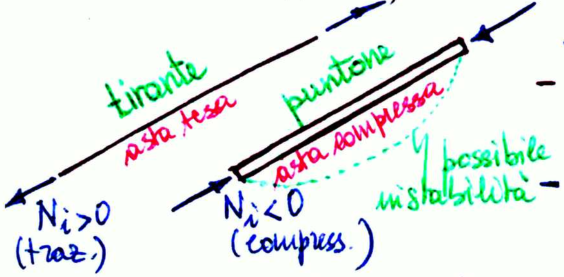
 – **Travature reticolari (piane)** egidio.rizzi@unibg.it

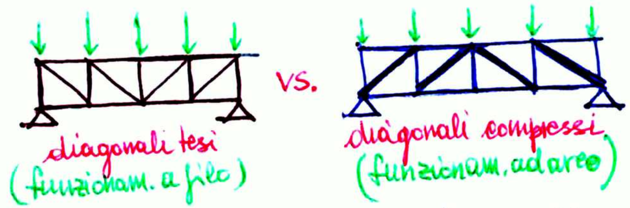
PONTE AD ARCO



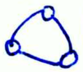
- Tipologia particolare di strutture con le seguenti caratteristiche:
  - leggere, ottimizzate (distribuzione opportuna degli elementi resistenti)
  - assemblabili in opera, per mezzo di unioni saldate o bullonate
  - applicazioni diverse (copertura di grandi luci, travi, capriate, capannoni industriali in acciaio, tralicci, gru, ponti, fusoliere, autotelai, ecc.)
  - aste incernierate agli estremi (idealizzazione), bielle, con carichi nodali (riportati ai nodi); si trascura il peso proprio distribuito o lo si riporta ai nodi.
  - aste snelle: $d_i \simeq h_i \ll l_i$ (unione ~ puntiforme rispetto allo sviluppo dell'asta)
  - materiali diversi: ferro, acciaio, legno, legno lamellare, C.A.
  - spesso con aste rettilinee, sede di sola azione assiale N_i (comunque possibile realizzare profili curvi, lineari a tratti).
  - per la verifica di resistenza, necessario det. N_i o $|N_i|$ (per materiali a comportamento simmetrico a traz./compr.) ⇒ $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} < \sigma_{Ri}$
  - importante determinare le aste tese (tiranti) e le aste compresse (puntoni) ⇒ V. Instabilità delle strutture – Es. ⇒
    specie per le aste più snelle, più lunghe

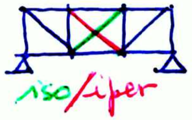






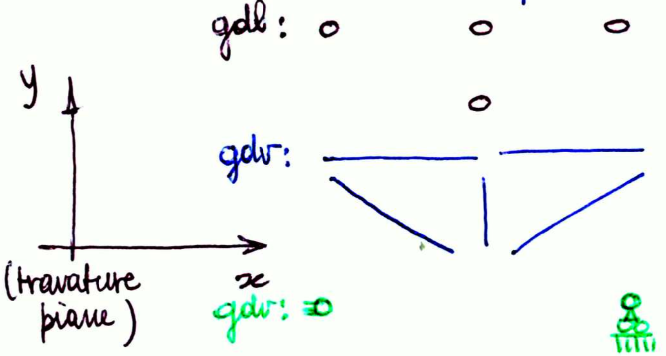
- Analisi cinematica e statica con metodi "ad hoc".

AC: computo gdv e gdl + analisi di montaggio di maglie isodeterminate con sovrapposizione di schemi  (anello chiuso isostatico).

Es. 

AS: analitica (anche numerica) o grafica
metodi soliti — statica grafica
(poligono delle forze, poligono funicolare, diagramma cremoniano – V. Culmann, Ritter, ETH-Zürich)
Karl Culmann: 1821–1881 — 1800 — Wilhelm Ritter: 1847–1906

Interpretazione specifica per trav. retic.:



n nodi ⇒ 2n gdl nel piano — 2n gdl

a aste ⇒ a gdv — di rigidità se $\frac{EA_i}{l_i} \to \infty$; elastico se $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA_i}$ — a+v gdv

$N_i = \frac{EA_i}{l_i} \Delta l_i$ — rigidezza elastica della molla asta

$F_i = k_i \, x_i$

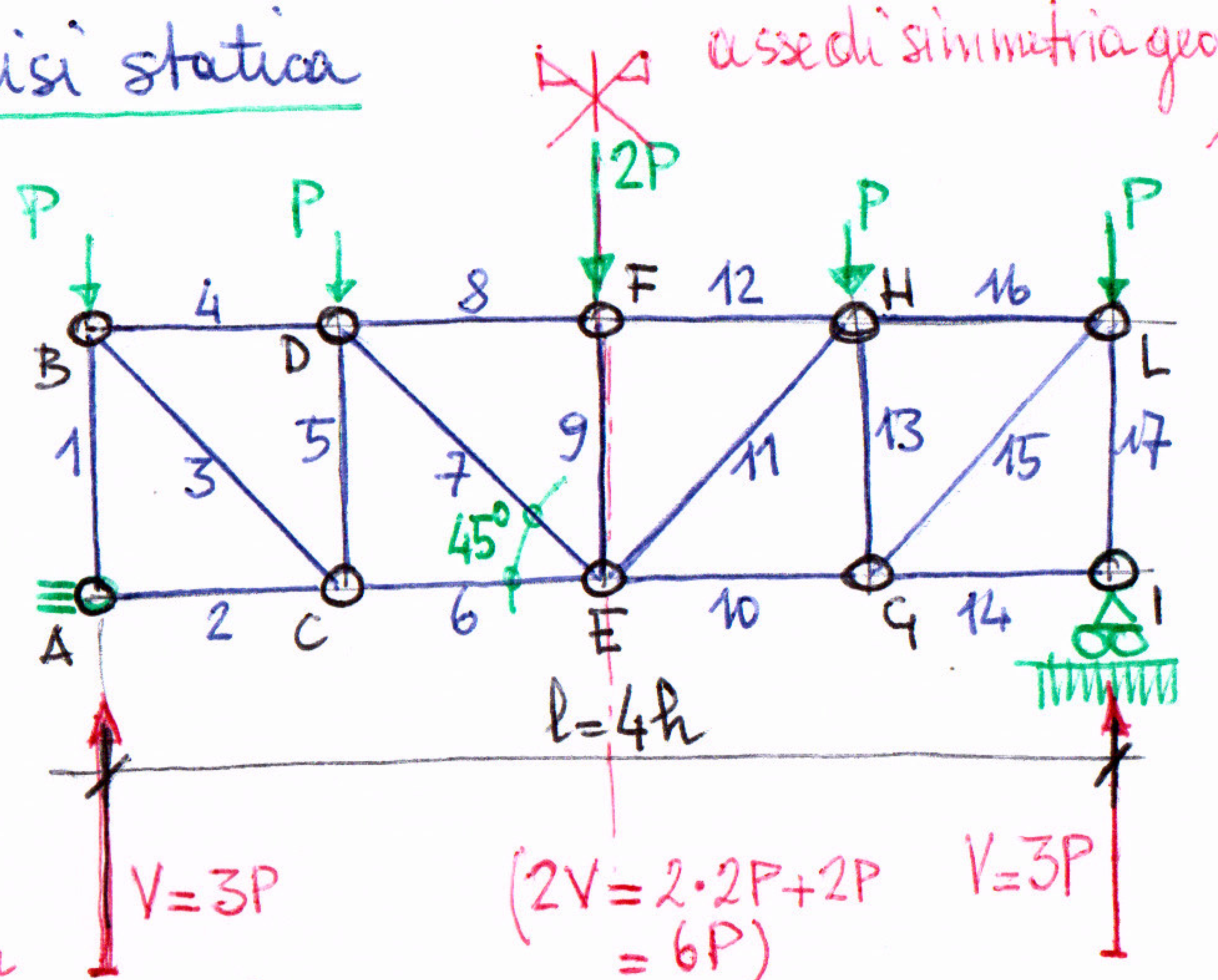
v gdv esterni ⇒ v gdv a terra

VS. ⇒ $\boxed{a+v \geq 2n}$

CN di non labilità di facile determinazione basta contare aste, nodi e gdv a terra.

Analisi statica

Es.

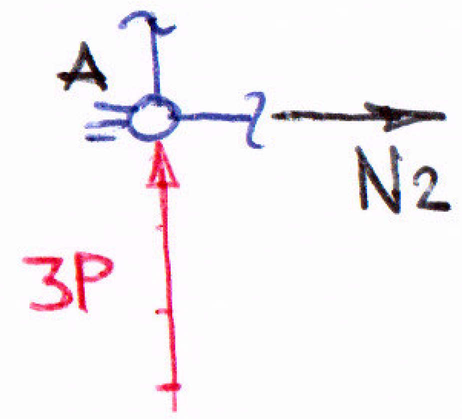


n = 10
a = 17
v = 3
a + v = 2n
ISOST.

- **Metodo degli equilibri nodali** (o metodo dei nodi)

Si risolve partendo da un nodo ove convergono due sole aste con N_i incognite

- Nodo A:



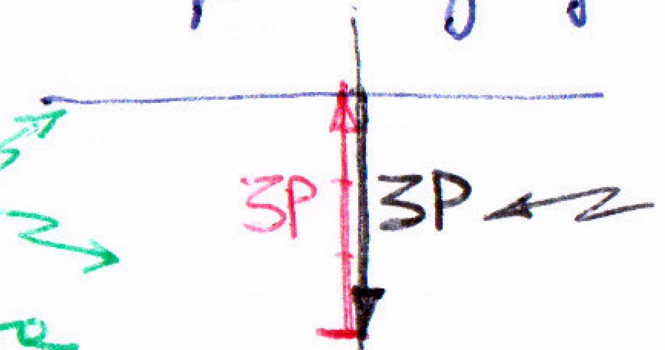
($N_i > 0$ se traz.)

Equil. analitico:

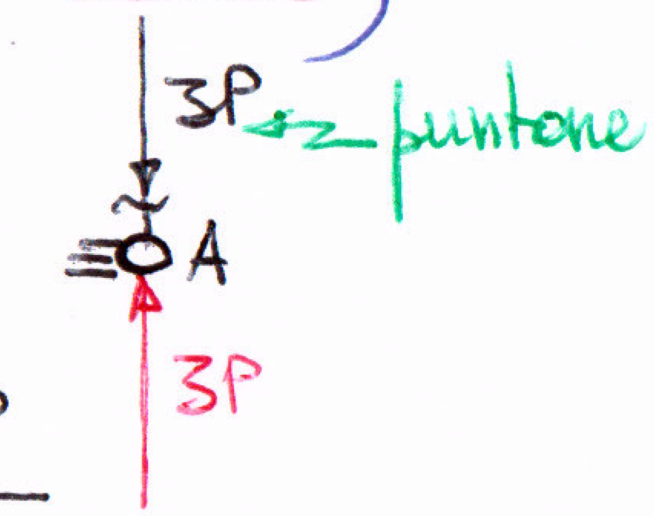
$$\begin{cases} \sum F_x^A = 0 \Rightarrow \boxed{N_2 = 0} \\ \sum F_y^A = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 = -3P} \text{ (puntone)} \end{cases}$$

Equil. grafico: (poligono delle forze chiuso)

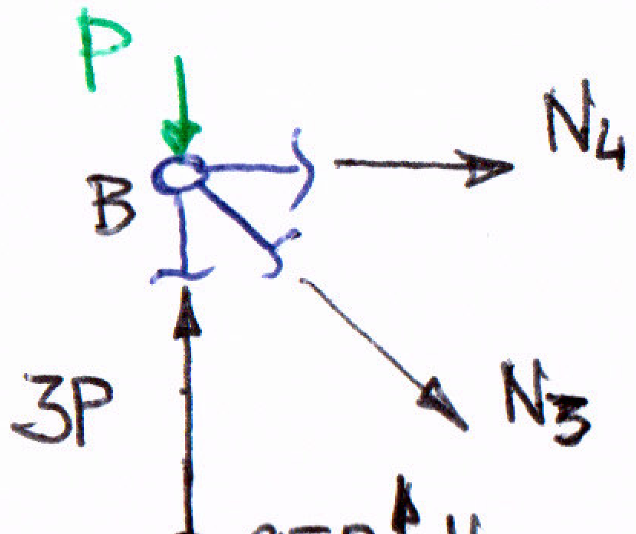
parallele alle aste con N_i incognite



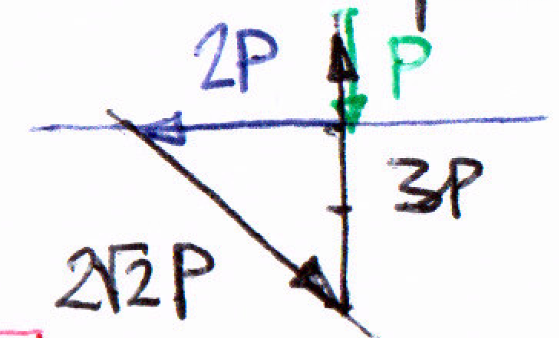
N.B.: azione sul nodo, punta sul nodo

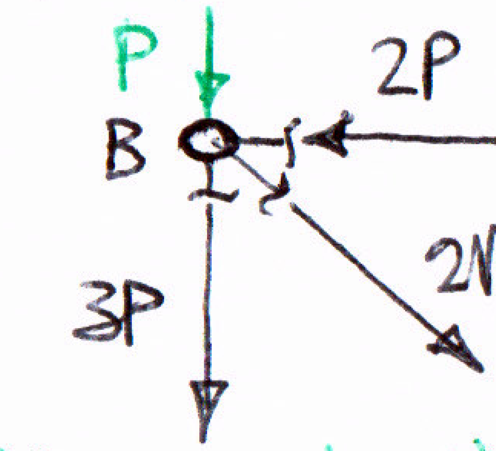


- Nodo B:

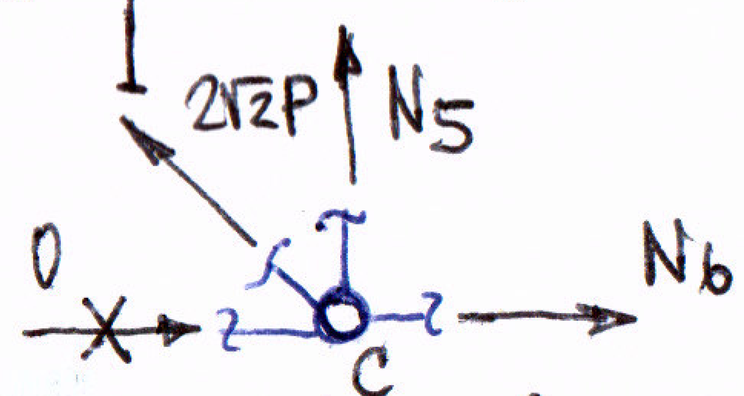


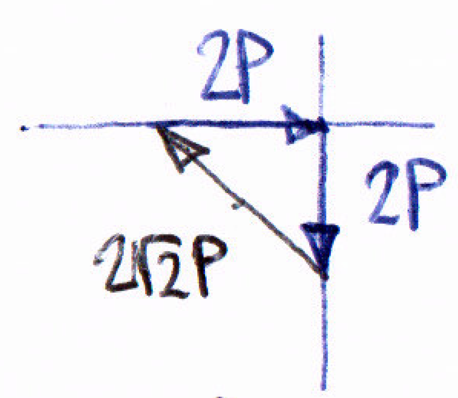
$$\begin{cases} \sum F_x^B = 0 \Rightarrow N_4 + \frac{N_3}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{N_4 = -2P} \text{ (puntone)} \\ \sum F_y^B = 0 \Rightarrow 3P - P - \frac{N_3}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{N_3 = 2\sqrt{2}\,P} \text{ (tirante)} \end{cases}$$





- Nodo C:

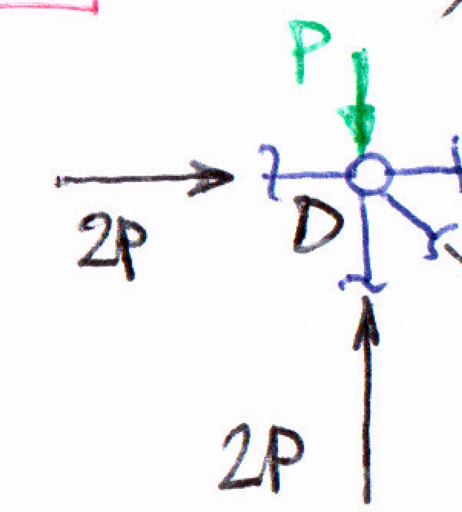




$\boxed{N_6 = 2P}$

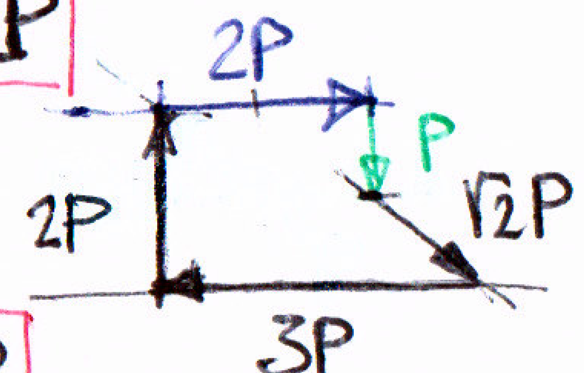
$\boxed{N_5 = -2P}$

- Nodo D:



$\boxed{N_8 = -3P}$

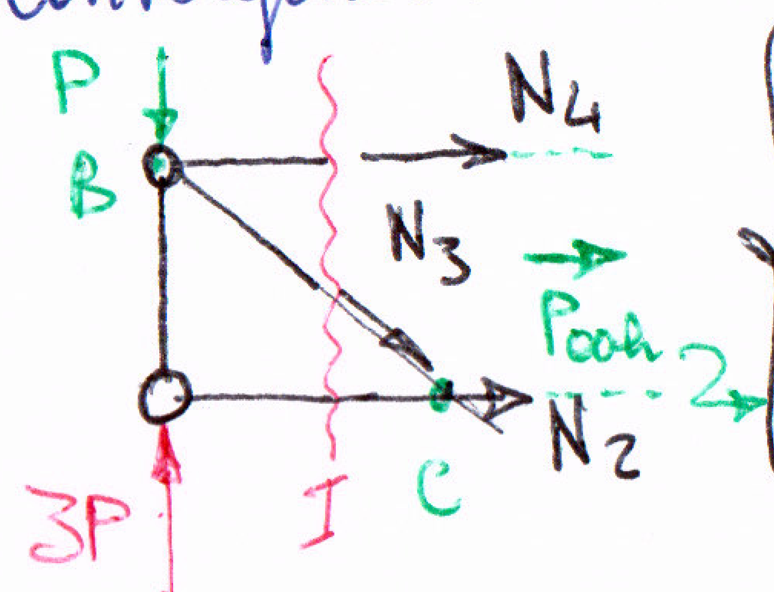
$\boxed{N_7 = \sqrt{2}P}$



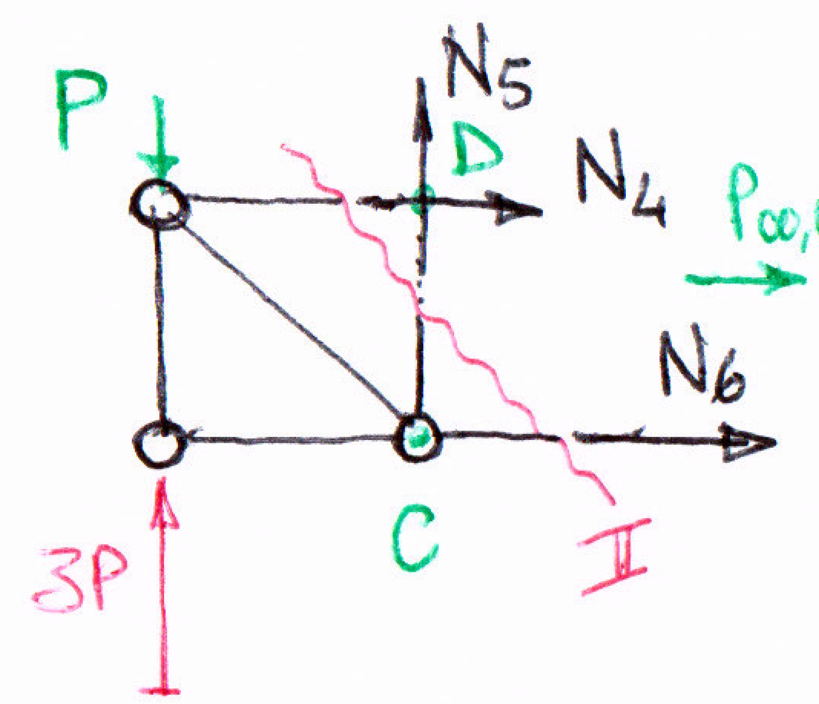
Disegnando gli equilibri nodali in un unico diagramma si ottiene il diagr. cremoniano (utile per precisione grafica) [con forze ed azioni assiali lette dal disegno nella scala delle forze]

- **Metodo delle sezioni** (o di Ritter) ~1862

- Si taglia con sez. secante tre aste con N_i incognita (non convergenti in un unico punto).
- Si scrivono gli equilibri alla rotazione (della parte di sn. o di ds. tenuta) rispetto ai tre punti in cui, a due a due, convergono le aste.

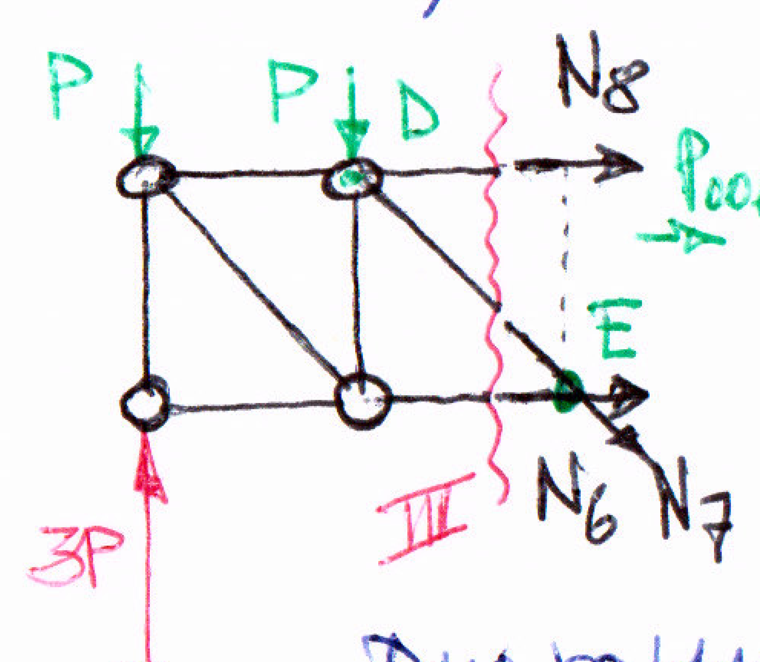


$$\begin{cases} \sum M_C^{sn} = 0 \Rightarrow N_4 = -2P \\ \sum M_B^{sn} = 0 \Rightarrow N_2 = 0 \\ \sum F_y^{sn} = 0 \Rightarrow N_3 = 2\sqrt{2}P \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sum M_D^{sn} = 0 \Rightarrow N_6 = 2P \\ \sum F_y^{sn} = 0 \Rightarrow N_5 = -2P \\ \left(\sum M_C^{sn} = 0 \Rightarrow N_4 = -2P\right) \end{cases}$$

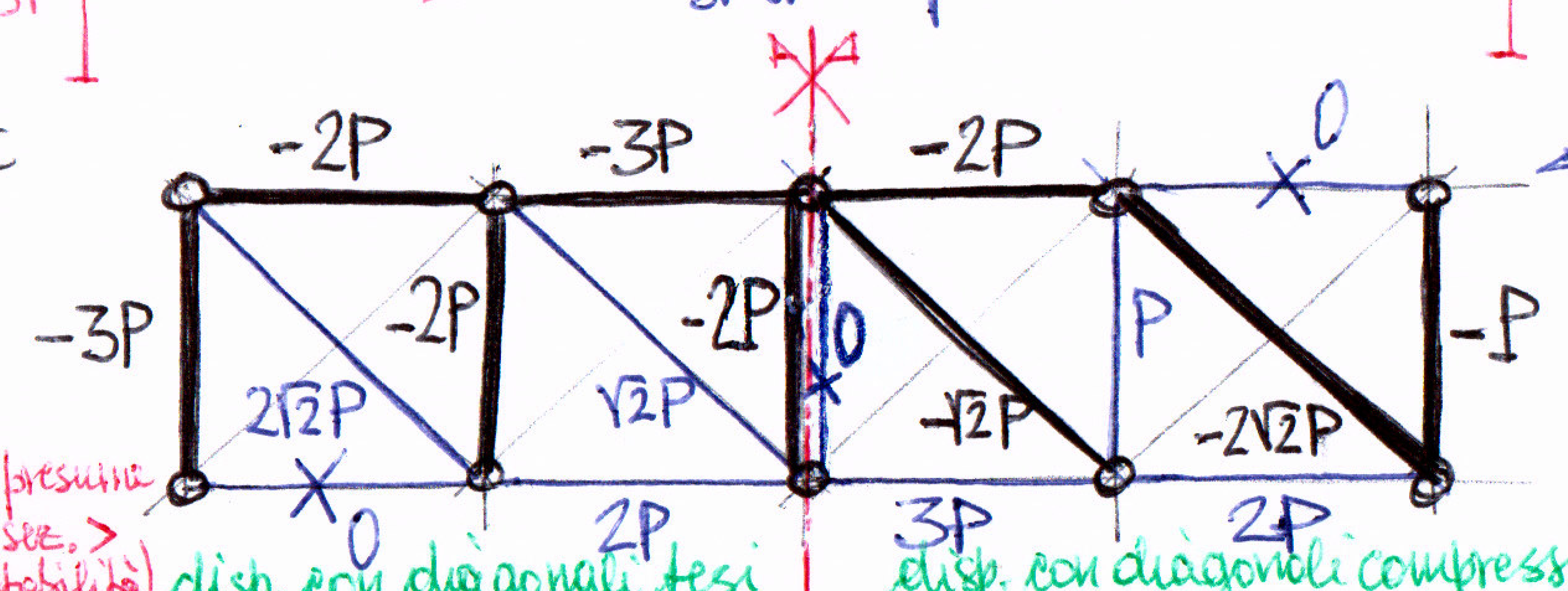
è la stessa di prima — verifica



$$\begin{cases} \sum M_E^{sn} = 0 \Rightarrow N_8 = -3P \\ \sum F_y^{sn} = 0 \Rightarrow N_7 = \sqrt{2}P \\ \left(\sum M_D^{sn} = 0 \Rightarrow N_6 = 2P\right) \text{ verif.} \end{cases}$$

(entrambe simmetriche)

- In genere, l'uso combinato dei due metodi consente di risolvere l'intera travatura reticolare
  - si traccia il quadro finale con le azioni assiali ottenute (in genere con puntoni a linea più spessa)
  - oppure rappresentaz. in forma tabellare



↑ poichè si presume abbiano sez. > (per verifica di stabilità)

disp. con diagonali tesi | disp. con diagonali compressi

Due rappresentazioni:
- a sn. travatura con diagonali tesi (disposiz. opportuna)
- a ds. travatura con diagonali compressi

erizzi@unibg.it