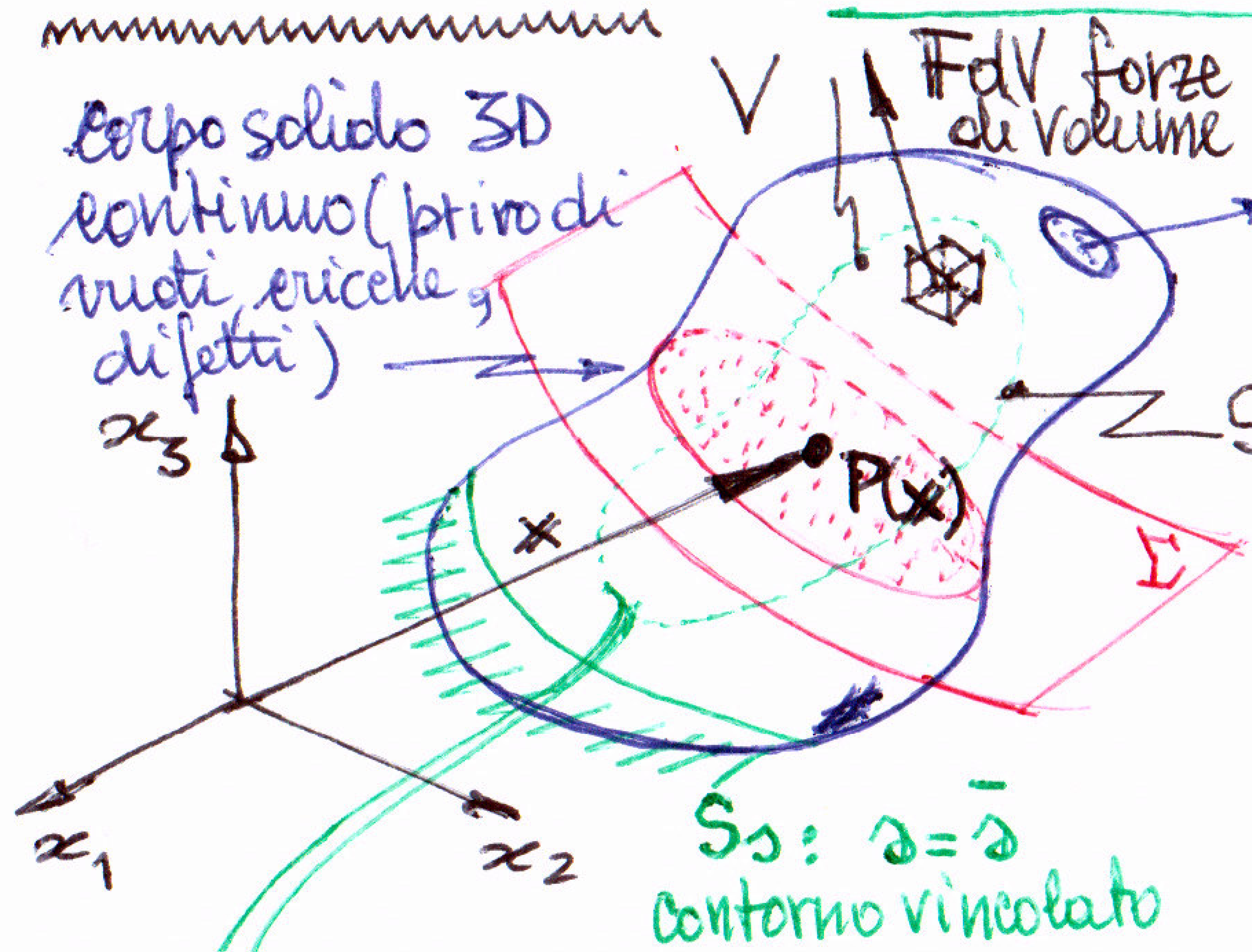
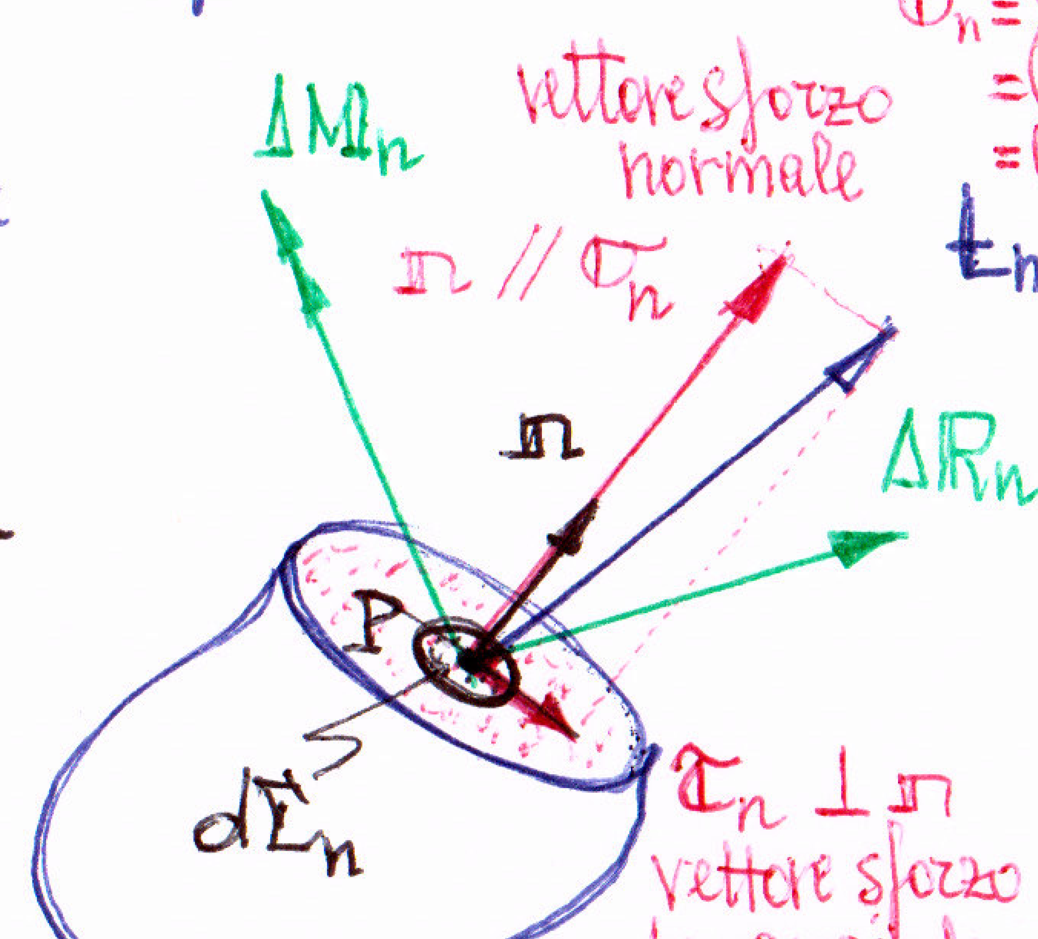
 - Meccanica dei continui: sforzo o tensione

egidio.rizzi@unibg.it

Corpo solido 3D continuo (privo di vuoti, cricche, difetti)



⇒



$\sigma_n = \sigma_n\, n = (t_n \cdot n)\, n = (n \cdot \sigma \cdot n)\, n$

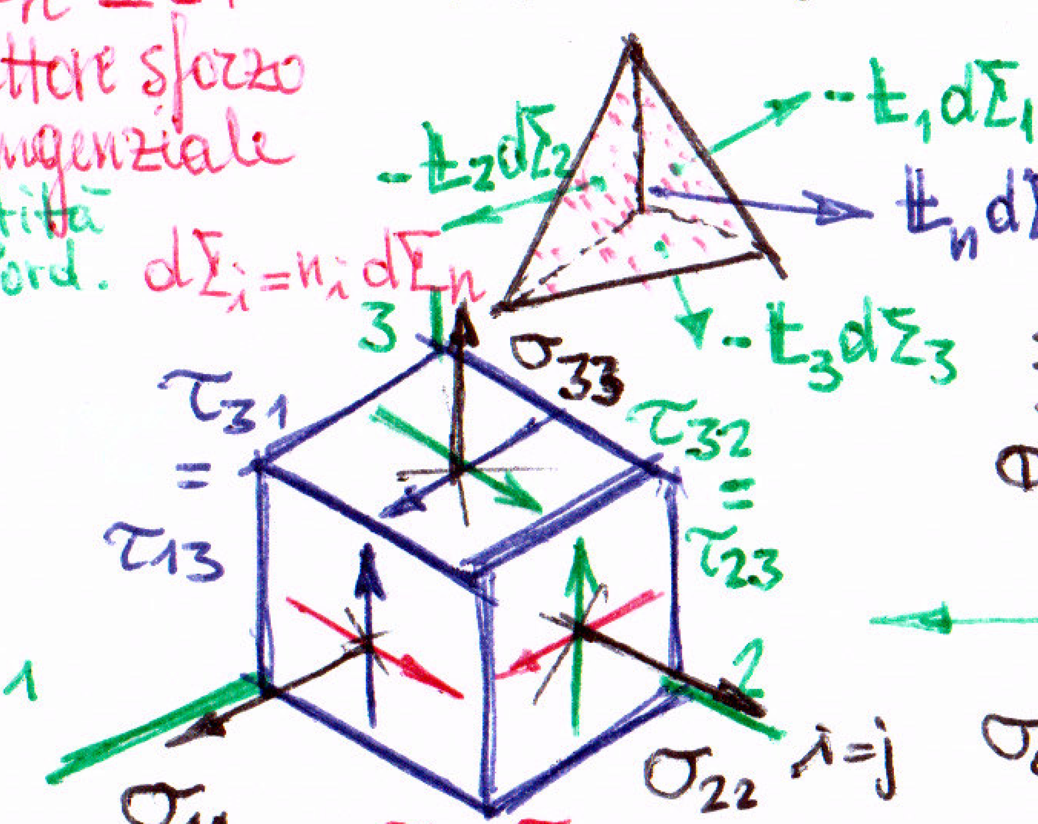
$t_n = \sigma_n + \tau_n$

$\tau_n = t_n - \sigma_n = \sigma \cdot n - \sigma_n I \cdot n = (\sigma^T - \sigma_n I) \cdot n$ — identità 2° ord.

Sforzo di CAUCHY, Augustin-Louis (1789-1857) ~1822

- $\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta R_n}{\Delta \Sigma_n} = t_n$ vettore sforzo di Cauchy
- $\lim_{\Delta\Sigma_n \to 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta \Sigma_n} = 0$ continuo non polare di Cauchy

Tetraedro di Cauchy, nell'intorno di P(x):



Equil. alla traslazione: $t_n = \sum_i t_i\, n_i = n \cdot \sigma = \sigma^T \cdot n$; $t_{nj} = n_i \sigma_{ij}$

Equil. alla rotaz.: $\sigma^T = \sigma \Leftrightarrow \sigma_{ji} = \sigma_{ij}$

tensore sforzo di Cauchy (del 2° ordine, simmetrico)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix}$$

matrice di sforzo

componenti di σ nel riferim. cartesiano

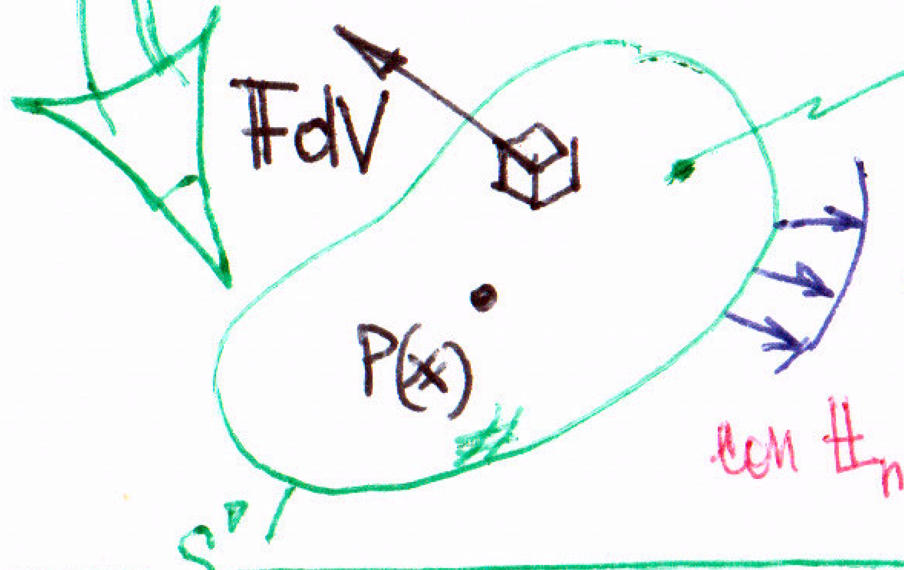
$\sigma_{ij} = t_{ij}$

$i = j$ $\sigma_{ii(i)}$ sforzi normali

$i \neq j$ $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ sforzi tangenziali

Significato fisico delle componenti di σ

- Equazioni indefinite di equilibrio dei continui:



V' arbitrario ∩ in V e contenente P(x) (P ∈ V')

Equil. alla traslaz.:

$$\int_{V'} F\, dV' + \int_{S'} t_n\, dS' = 0$$

$$\int_{V'} F\, dV' + \int_{S'} n \cdot \sigma\, dS' = 0$$

⇓ th. div.

$$\int_{V'} F\, dV' + \int_{V'} \mathrm{div}\,\sigma\, dV' = 0$$

$$\int_{V'} (F + \mathrm{div}\,\sigma)\, dV' = 0 \quad \forall V' \text{ arbitrario}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\sigma + F = 0 \text{ in } V} \Rightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = 0 \text{ in } V$$

c.c. $t_n = n \cdot \sigma = f$ su S_f ⇒ $n_i \sigma_{ij} = f_j$ su S_f

es. $\begin{cases} N' = -q_t \\ T' = -q_n \end{cases}$ analogie con $\sigma \cdot \mathrm{div}\,\sigma = -F$ (v. eq.ni indefinite delle travi)

notazione: $_{,i} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}$

th. della divergenza:

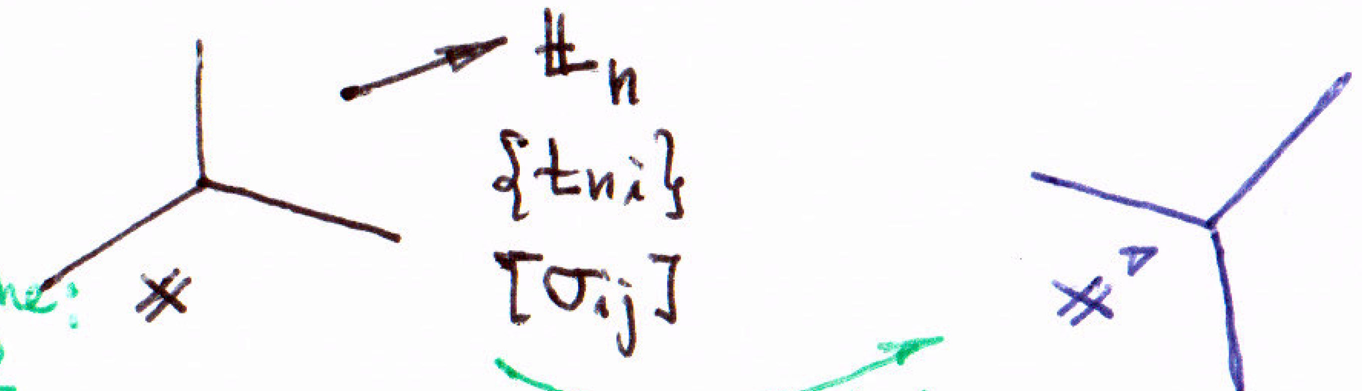
$$\int_V \mathrm{div}\, g\, dV = \int_S n \cdot g\, dS$$

g: campo tensoriale (es. vettore, tensore del 2° ordine, ecc.)

$\nabla \cdot g = \frac{\partial}{\partial x} \cdot g$ — gradiente

Da equil. alla rotazione si conferma $\sigma^T = \sigma$, tensore simm.

- Trasformazione delle componenti al variare del riferimento



riferim. ruotato

$\{v'\} = [Q] \cdot \{v\}$ — comp. in x' ; comp. in x

v: vettore generico

con Q tensore ortogonale: $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I$ — tensore identità del 2° ordine

$\{v\} = [Q]^T \{v'\}$

$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $I_{ij} = \delta_{ij}$ Kronecker $\begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Trasformazione:

$\{t'_n\} = [Q] \cdot \{t_n\} = [Q] \cdot [\sigma]^T \cdot \{n\}$

$= [Q] \cdot [\sigma]^T \cdot [Q]^T \cdot \{n'\}$

$= [\sigma']^T \cdot \{n'\}$

Legge di trasform. delle componenti di un tensore doppio

con $[\sigma']^T = [Q] \cdot [\sigma]^T \cdot [Q]^T$

quindi: $\boxed{[\sigma'] = [Q] \cdot [\sigma] \cdot [Q^T]}$

- Tensioni principali

$t_n \,//\, n \Rightarrow t_n = \sigma_n$ e $\tau_n = 0$

$\sigma^{(T)} \cdot n = \sigma_n I \cdot n$

$(\sigma - \sigma_n I) \cdot n = 0$ — pb. agli autovalori

autovalori di σ: tensioni principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ — 3 radici reali dell'eq.ne caratt.

autovettori di σ: direzioni principali di tensione n_I, n_{II}, n_{III}

nel rif. princ. $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$

Eq.ne caratteristica: (cubica)

$$-\det(\sigma - \sigma_n I) = \sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

Invarianti:

$$\begin{cases} I_1 = \mathrm{tr}\,\sigma & \text{primo} \\ I_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \mathrm{tr}^2\sigma) & \text{secondo} \\ I_3 = \det\sigma = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathrm{tr}\,\sigma^2 + \frac{1}{6}\mathrm{tr}^3\sigma & \text{terzo} \end{cases}$$

N.B. tr è operatore invariante: $\mathrm{tr}[\sigma'] = \mathrm{tr}[\sigma]$; $Q_{ij}\sigma_{jk}Q_{ik} = \delta_{jk}\sigma_{jk}$

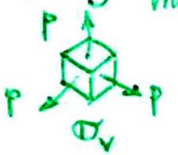
Da th. di Cayley-Hamilton: $\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 I = 0 \xleftrightarrow{\mathrm{tr}} 3I_3 = \mathrm{tr}\,\sigma^3 - I_1\mathrm{tr}\,\sigma^2 - I_2\mathrm{tr}\,\sigma$

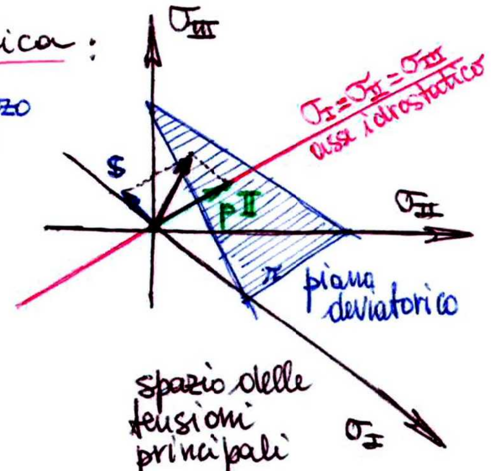
- **Componenti volumetrica e deviatorica**:

$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D = p\,\mathbb{I} + \mathbb{S}$$

deviatore di sforzo $\mathbb{S} = \sigma_D = \sigma - \frac{tr\,\sigma}{3}\mathbb{I} = \sigma - p\,\mathbb{I}$

$p = \frac{tr\,\sigma}{3}$ tensione media $= \frac{I_1}{3}$





Componenti utili a descrivere il comportamento meccanico dei materiali:

- elastico isotropo disaccoppiato $p = K\vartheta$, $\mathbb{S} = 2G\,e$ (deformazione volumetrica $\vartheta = tr\,\varepsilon$)
  - E: modulo di elasticità longitud. o di Young
  - ν: coeff. di contrazione trasversale o di Poisson
  - $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ K: modulo di volume
  - $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ G: modulo di taglio
  - deviatore di deformazione $e = \varepsilon - \frac{\vartheta}{3}\mathbb{I}$
- plastico (metalli, geomateriali) $\Rightarrow$ v. Teoria della Plasticità
  - metalli: comp. dip. solo da $\mathbb{S}$
  - geomateriali: comp. dip. dalla pressione di confinamento (materiali frizionali) governati dall'attrito

- **Pb. agli autovalori per σ_V e σ_D**:
  - $\sigma_V \cdot n = \sigma_V\, n$ $\rightarrow$ $p\,n = \sigma_V\, n$ $\forall n$: $-\ \sigma_V = p$ autoval. ; n arbitr. autovett.
  - $\mathbb{S}\cdot n = s\,n$ $\rightarrow$ $(\sigma - p\,\mathbb{I})\cdot n = s\,n \rightarrow \underbrace{\sigma\cdot n = (s+p)\,n}_{\sigma}$:
    - $\boxed{\sigma_i = s_i + p \quad s_i = \sigma_i - p}$ $i = I, II, III$ autovalori shiftati di p
    - stesse direzioni principali di σ

  possibile risolvere il pb. agli autov. di $\mathbb{S}$ per poi risalire a quello di σ

- **Eq.ne caratteristica del deviatore**:

$$s^3 - \cancel{J_1} s^2 - J_2 s - J_3 = 0$$

(eq.ne cubica in forma depressa, senza termine $\sim s^2$)

0, per def. di deviatore: $tr\,\mathbb{S} = 0$

Invarianti di $\mathbb{S}$:
$$\begin{cases} J_1 = tr\,\mathbb{S} = tr\,\sigma - \frac{tr\,\sigma}{3}3 = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} tr\,\mathbb{S}^2 \\ J_3 = \det \mathbb{S} = \frac{1}{3} tr\,\mathbb{S}^3 \end{cases}$$

noti I_K, J_i calcolabili da queste relaz.

- **Relazioni tra gli invarianti**: $J_i = J_i(I_K)$ $i = 1,2$; $K = 1,2,3$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \leftarrow \sigma = s + p\ ;\ p = \frac{I_1}{3},\ I_1 = 3p$$

$$\sigma(s^2 + p^2 + 2ps - 3ps - 3p^2 - I_2) - I_3 = 0$$

$$(s+p)(s^2 - ps - 2p^2 - I_2) - I_3 = 0 \rightarrow s^3 - \cancel{ps^2} - 2p^2 s - I_2 s + \cancel{ps^2} - p^2 s - 2p^3 - pI_2 - I_3 = 0 \Rightarrow s^3 - \overbrace{(3p^2 + I_2)}^{J_2}s - \overbrace{(2p^3 + pI_2 + I_3)}^{J_3} = 0$$

confermato che $J_1 = 0$, manca termine s^2

$$\boxed{\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{3}I_1^2 + I_2 \\ J_3 &= \frac{2}{27}I_1^3 + \frac{1}{3}I_1 I_2 + I_3 = I_3 + \frac{1}{3}I_1\left(\frac{2}{9}I_1^2 + I_2\right) \end{aligned}}$$

- **Soluzione analitica dell'eq.ne caratteristica del deviatore**:

- cerco soluz. nella forma $(*)$ $s = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\underbrace{\sqrt{2J_2}}_{\rho = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{eq}^{VM}}\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\cos\alpha$

ρ: distanza radiale dall'asse idrostatico; $\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}}\rho$ tensione equivalente di von Mises

- sostituendo:

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2}\cos^3\alpha - J_2\frac{2}{\sqrt{3}}J_2^{1/2}\cos\alpha = J_3$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\underbrace{\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)}J_2^{3/2} = J_3$$

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad \text{ok} \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}}$$

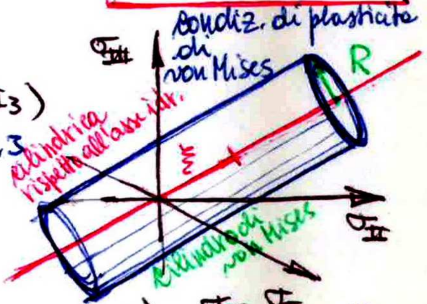
Radici:

$$\begin{cases} 0 \le \alpha_1 = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) \le \frac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\pi \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

$(*)$ Oppure: $s = \beta\sqrt{J_2}\cos\alpha \Rightarrow \beta^3 J_2^{3/2}\cos^3\alpha - \beta J_2^{3/2}\cos\alpha = J_3 \rightarrow \frac{\beta}{3}J_2^{3/2}\underbrace{(\overbrace{3\beta^2}^{4}\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}_{\cos 3\alpha \text{ per } 3\beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}} = J_3$

Procedura di calcolo:

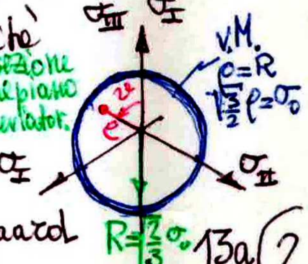
- $\sigma \rightarrow I_1, I_2, I_3$
- $J_2(I_1, I_2)$, $J_3(I_1, I_2, I_3)$
- $\cos 3\alpha_i \rightarrow \alpha_i$, $i = 1,2,3$
- $\cos\alpha_i \rightarrow s_i$
- $\sigma_i = p + s_i$



Significato fisico:

Funz. di snervamento in plasticità $f = f(\xi, \rho, \vartheta)$

- $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}}$ posiz. lungo l'asse idrost.
- $\rho = \sqrt{2J_2}$ distanza dall'asse idr.
- ϑ: α inclinaz. nel piano deviatorico

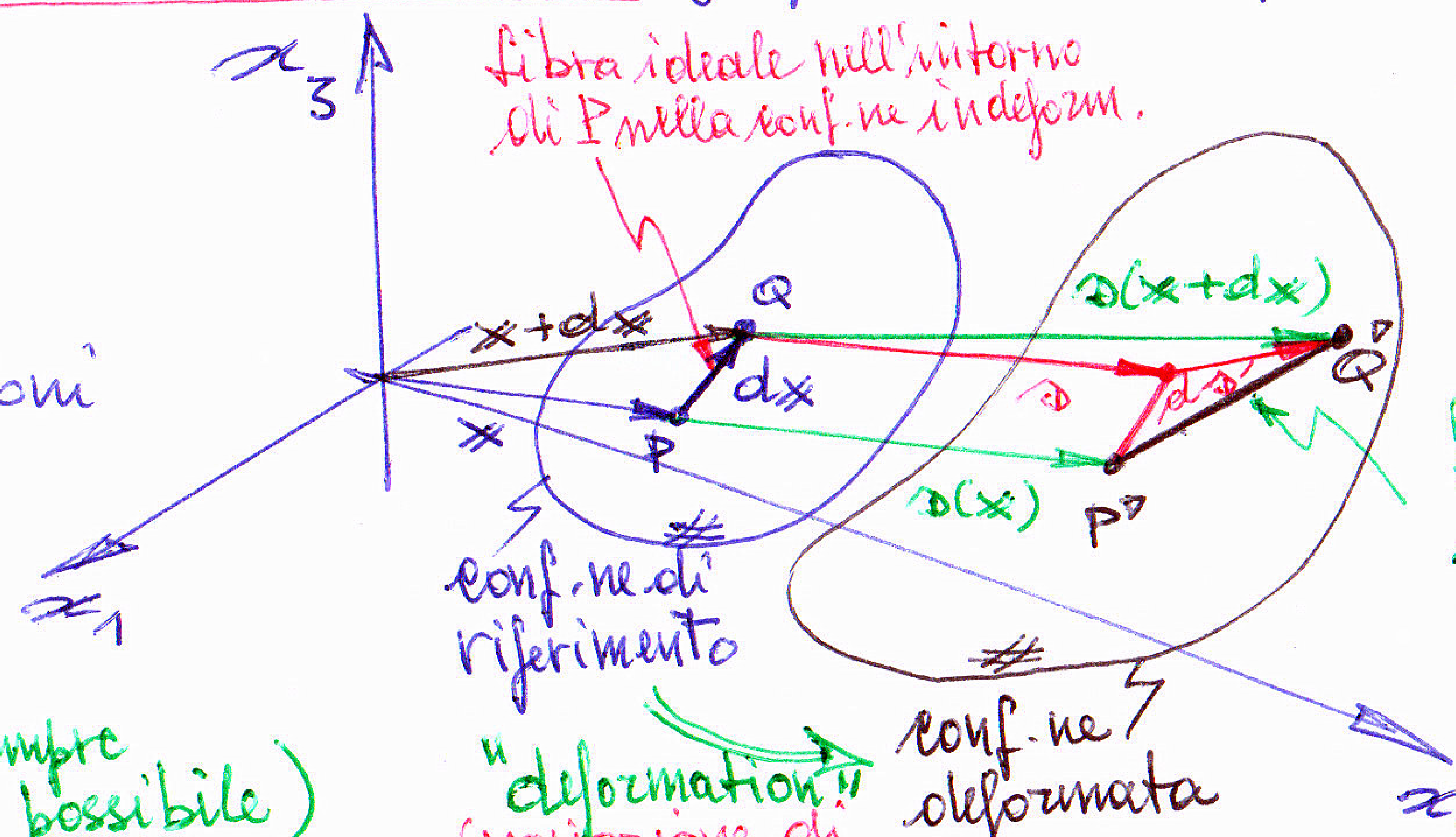


Coordinate di Haigh–Westergaard

14a Lez. CdS dC – Cinematica dei continui (deformazione, eq.ni di congruenza interna)

– Misura della deformazione

$\mathbf{s}$ spostamento $\longrightarrow$ $\boldsymbol{\varepsilon}$ tensore delle piccole deformazioni "strain"



Sviluppo in serie: (al 1° ordine)

$$d\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} + \ldots = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} + \ldots$$

└ tensore gradiente di spostamento $\mathbf{H} = \nabla \mathbf{s}$

$H_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j}$

Hp. di piccoli gradienti di spostamento $|H_{ij}| \ll 1$

– Decomposizione additiva

del gradiente di spostamento: (sempre possibile)

$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\vartheta}$

└ $\boldsymbol{\vartheta} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T)$ parte emisimmetrica $(\boldsymbol{\vartheta}^T = -\boldsymbol{\vartheta})$; $\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i})$

$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$ parte simmetrica $(\boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\varepsilon})$; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i}) = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ $i \neq j$

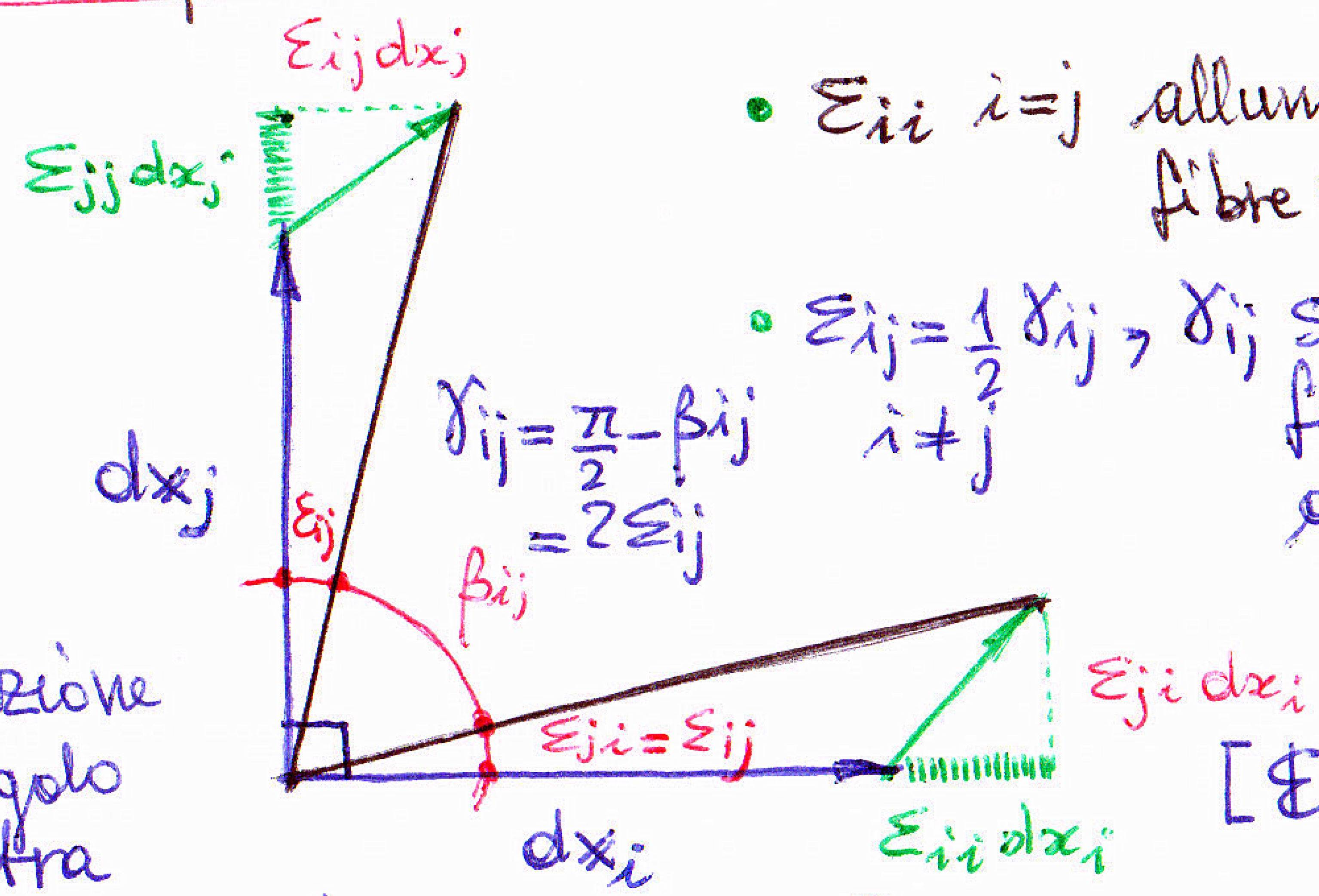
$(\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = s_{i,j} + s_{j,i})$ scorrimenti angolari $(i \neq j)$

$\mathbf{s}$: contiene una componente di traslazione rigida

$\mathbf{H}$: non la contiene più e deve includere rotazione rigida e deformazione pura (infinitesime)

– Significato fisico delle componenti ε_{ij} e ϑ_{ij}

Sia $\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon}$ $(\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{0})$



γ_{ij}: variazione di angolo retto tra fibre mutuamente ⊥

$\gamma_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$

- ε_{ii} $i=j$ allungamento specifico di fibre nella direzione i – Deformaz. normali.
- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$, γ_{ij} scorrimenti angolari tra fibre i,j inizialmente a $\pi/2$ – Deformazioni taglianti $i \neq j$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{13} = \frac{\gamma_{13}}{2} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} = \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \text{simm.} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

tipo $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1$ (v. prova di trazione)

DEFORMAZIONE PURA INFINITESIMA

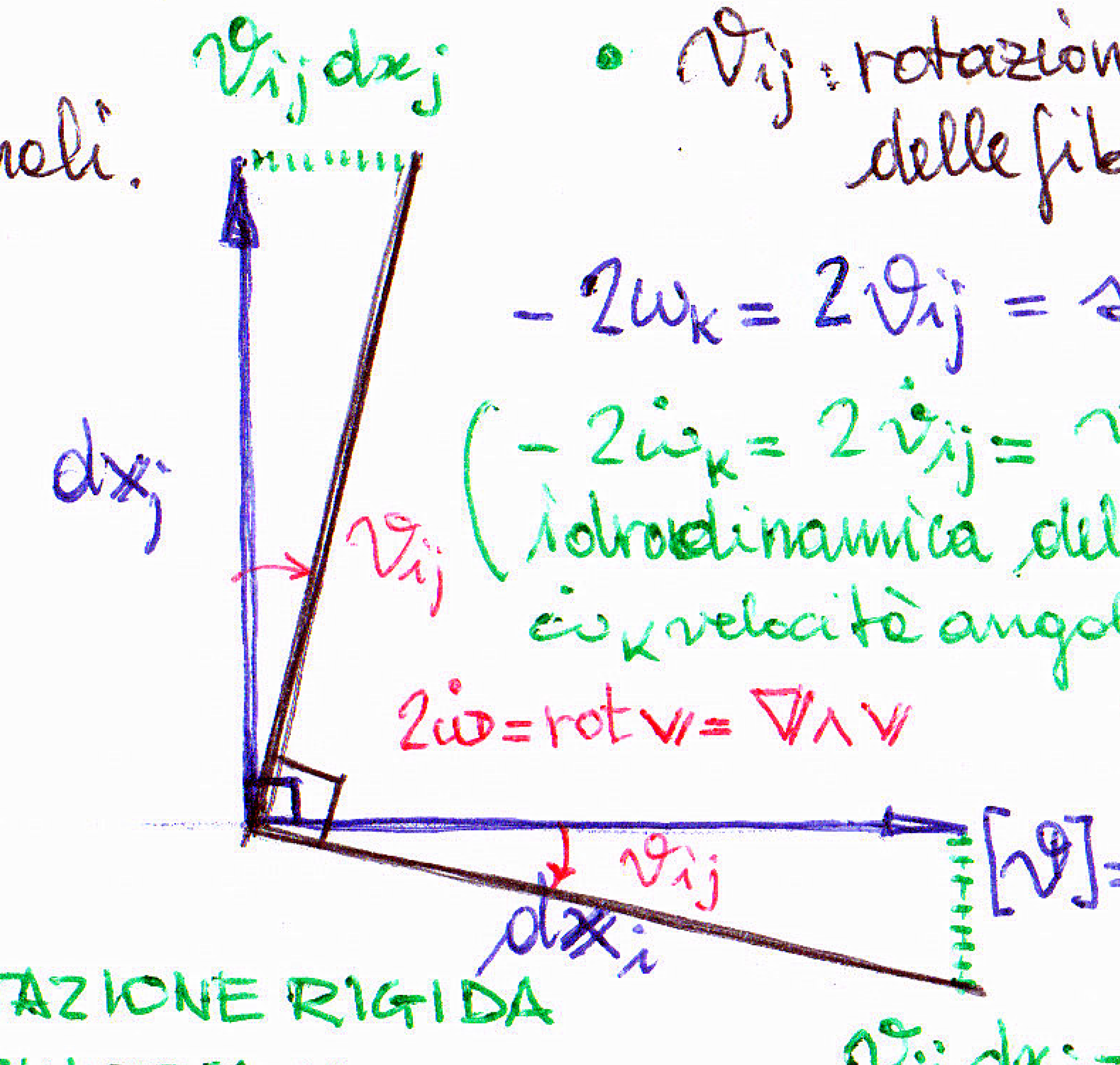
$\boldsymbol{\varepsilon}$

Sia $\mathbf{H} = \boldsymbol{\vartheta}$ $(\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0})$

- ϑ_{ij}: rotazione rigida infinitesima delle fibre i,j –

$-2\omega_k = 2\vartheta_{ij} = s_{i,j} - s_{j,i}$ tipo: (i, j, k)

$(-2\dot{\omega}_k = 2\dot{\vartheta}_{ij} = v_{i,j} - v_{j,i}$ v. analogia idrodinamica del pb. della torsione: $\dot{\omega}_k$ velocità angolare, v_i velocità$)$



ROTAZIONE RIGIDA INFINITESIMA

$\boldsymbol{\vartheta}$

$$[\boldsymbol{\vartheta}] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ -\vartheta_{13} & -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

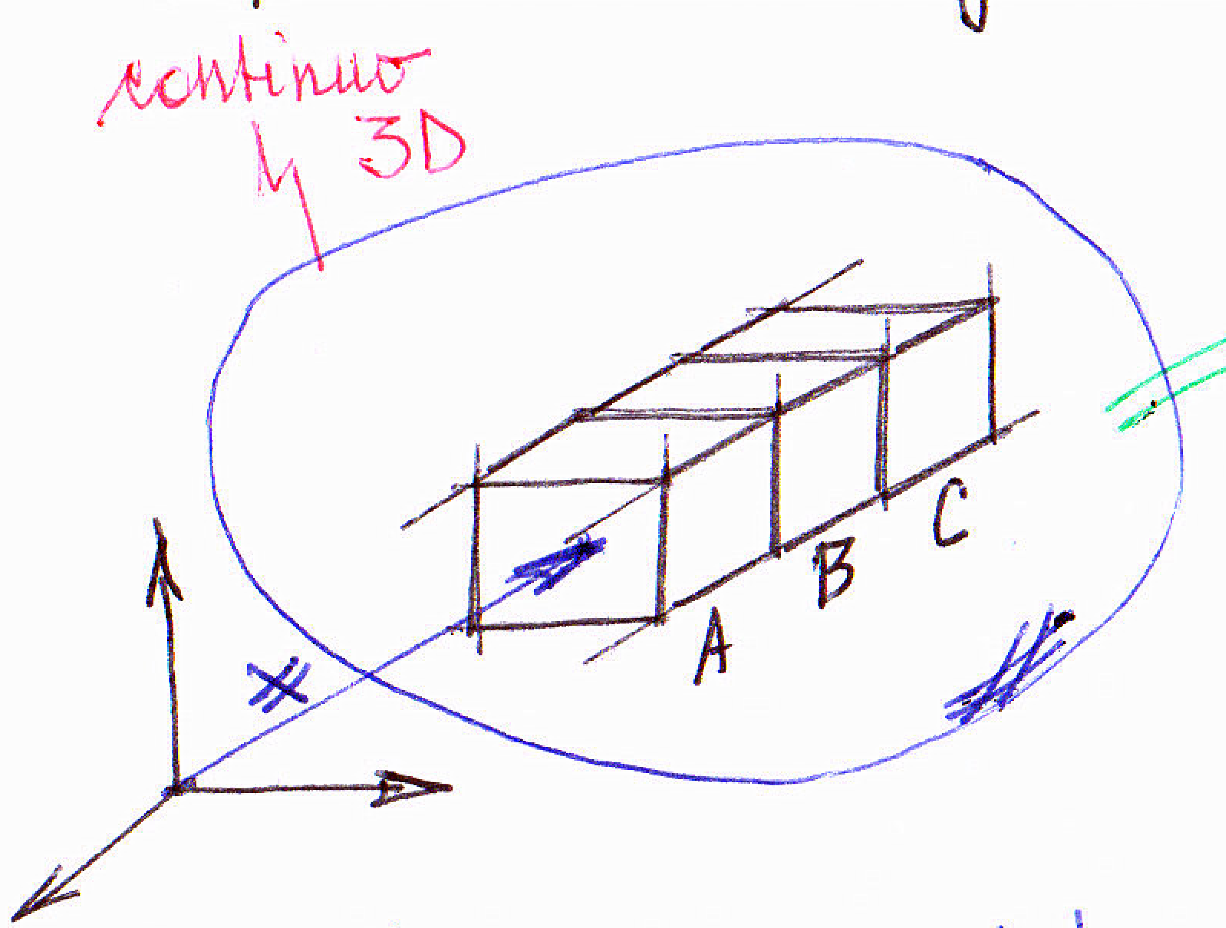
$-\omega_2 = \vartheta_{31} = -\vartheta_{13}$
$\Rightarrow \omega_2 = \vartheta_{13}$

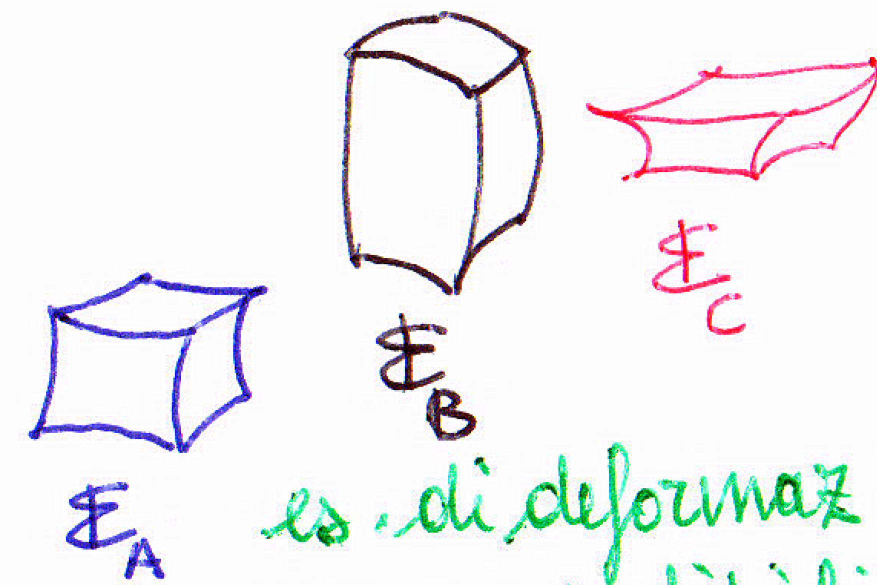
erizzi@unibg.it

egidio.rizzi@unibg.it

• Equazioni di congruenza (compatibilità) interna.

continuo 3D





es. di deformaz. non compatibili

– Se il campo di deformazione risulta compatibile è possibile riassemblare i cubetti deformati indipendentemente, formando nuovamente un continuo (no vuoti, aperture, fratture)

– Affinché il campo $\mathcal{E}(x)$ in termini delle variabili di deformazione ε_{ij} (prescindendo dal campo di spostamento) risulti compatibile, la variazione di $\mathcal{E}(x)$ nello spazio dovrà soddisfare a certe regole.

– CN di congruenza interna per il campo $\varepsilon_{ij}(x_k)$:

se $\mathcal{E}=\frac{1}{2}(\Psi+\Psi^T)$

3 eq.ni scalari 1° gruppo

$$\begin{cases} S_{zz} = R_z = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} = s_{x,xyy} + s_{y,yxx} - 2\cdot\frac{1}{2}(s_{x,yxy} + s_{y,xxy}) \overset{!}{=} 0 \\ S_{xx} = R_x = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0 \\ S_{yy} = R_y = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0 \end{cases}$$

idem

Th. Schwarz (sull'invertib. dell'ordine delle derivazioni)

(se le deformazioni derivano da un campo di spostamento quali parte simmetrica del suo gradiente).

3 eq.ni scalari 2° gruppo

$$\begin{cases} S_{yz} = U_x = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} = 0 \\ S_{zx} = U_y = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} = 0 \\ S_{xy} = U_z = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} = 0 \end{cases}$$

ove S_{ij}, R_i, U_i: scarti o residui di compatibilità (nulli se le deformazioni sono compatibili):

Quindi:

CN: Se $\mathcal{E}=\frac{1}{2}(\Psi+\Psi^T) \Rightarrow S_{ij}=0$ ($\mathbb{S}=\mathbb{O}$) oppure $\begin{cases} R_i=0 \\ U_i=0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \mathbb{R}=\mathbb{0} \\ \mathbb{U}=\mathbb{0} \end{pmatrix}$ vettori

con $\mathbb{S} = \text{rot rot}\,\mathcal{E}$ (rot = curl = $\nabla\wedge$)

tensore del 2° ordine

– Scrittura compatta (eq.ni di compatibilità di de Saint Venant):

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk}}$$

DSV ~ 1884

v. ad es. Malvern (1969), p. 186

– Sono $3^4 = 81$ eq.ni, di cui solo 6 (quelle scritte sopra) non ripetute (distinte).

– Peraltro equivalenti a sole 3 eq.ni indipendenti. Infatti valgono (anche per campo $\mathcal{E}$ non congruente) le seguenti Identità di Bianchi:

$$\begin{cases} R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} = 0 \\ U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} = 0 \\ U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} = 0 \end{cases}$$

oppure $\nabla\cdot\mathbb{S} = \text{div}\,\mathbb{S} = \mathbb{0}$, cioè $S_{ij,i}=0 \quad j=1,2,3$

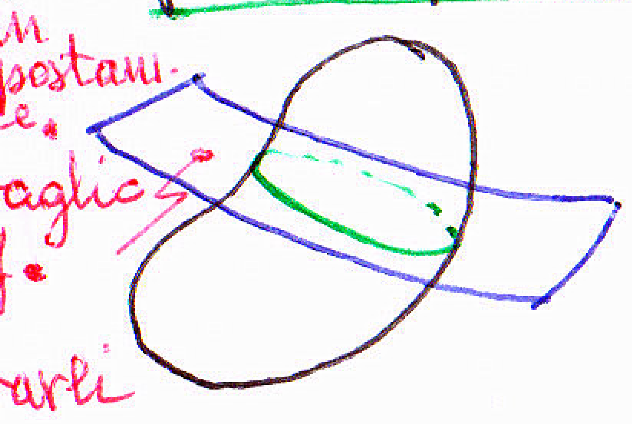
campo solenoidale

sempre verificate, anche se $\mathbb{R}\neq\mathbb{0}$, $\mathbb{U}\neq\mathbb{0}$ o $\mathbb{S}\neq\mathbb{0}$.

• Si potrebbe dimostrare che sono CS di compatib. solo per corpi monoconnessi

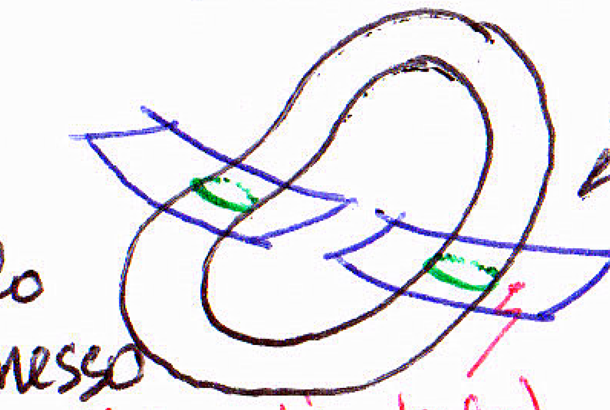
qui garantiscono che, integrati da le ε_{ij}, si può ottenere un campo di spostam. compatibile.

un taglio è suff. per separarli



• NON CS per corpi pluriconnessi

es. anello biconnesso (due tagli per dividerlo)



$\Delta s = 0$ da imporre su una delle due interfacce