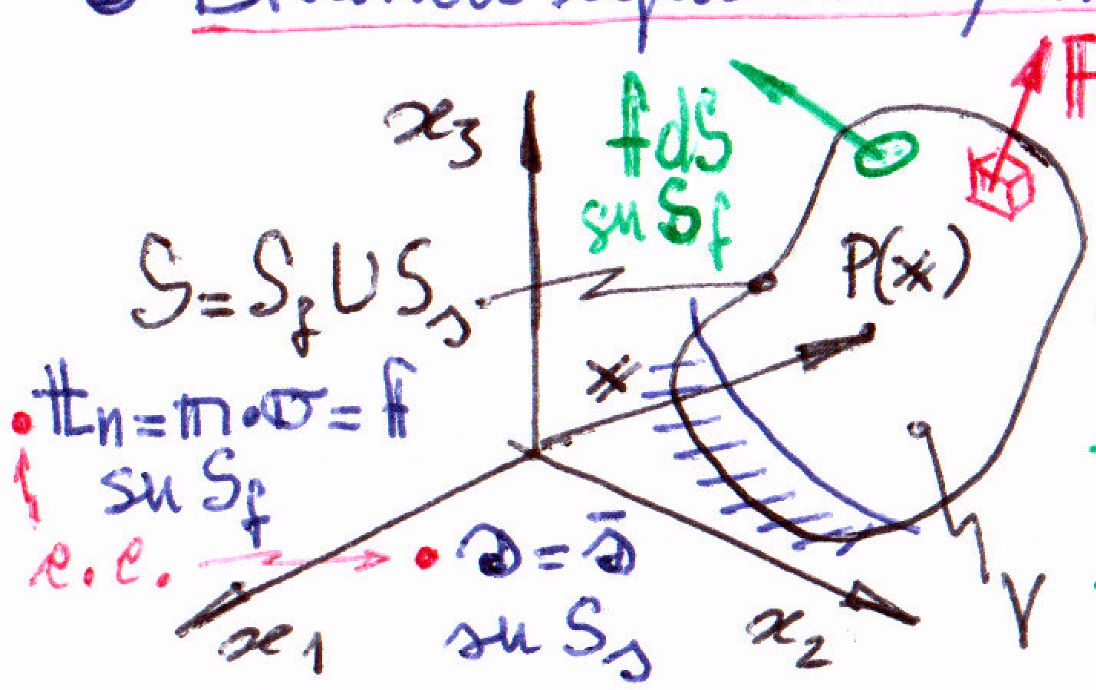
15a Lez. CdSdC – Problema elastico e legame costitutivo elastico

egidio.rizzi@unibg.it

- **Bilancio equazioni/incognite:**



Incognite in $P(x) \in V$:

- $\sigma(x)$ campo di sforzo — 6 comp. σ_{ij}
- $\varepsilon(x)$ campo di deformazione — 6 comp. ε_{ij}
- $s(x)$ campo di spostamento — 3 comp. s_i

15 comp. incognite

Equazioni in $P(x) \in V$:

- $\mathrm{div}\,\sigma + \mathbb{F} = \mathbb{0}$ eq.ni di equilibrio — 3 $\sigma_{ij,i} + F_j = 0$
- $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla s^T)$ eq.ni di congruenza — 6 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$ (legame deformazioni/spost. (per piccole deformazioni))
- $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ o $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ eq.ni costitutive — 6 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$ o $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$

legame sforzi/deformazioni: comportamento meccanico del materiale

15 equazioni

- Anche eliminando gli spostamenti tra le incognite (ad es. quando non è assegnato un contorno vincolato – vedi ad es. pb. di DSV):
  6 σ_{ij} + 6 ε_{ij} = 12 comp.ti incognite vs. 3 eq.ni di equil. + 3 eq.ni di congruenza (6 eq.ni $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$, di cui 3 indipendenti, per identità di Bianchi $S_{ij,i} = 0$) + 6 eq.ni costitutive = 12 eq.ni
- Bilancio raggiunto inserendo le 6 eq.ni del legame costitutivo – Esse esprimono il comportamento del materiale di cui è composto il corpo solido, indipendentemente dal fatto che gli sforzi siano equilibrati (statica dei continui) e che le deformazioni siano congruenti (cinematica dei continui).

- **Legame costitutivo iperelastico** – Supponiamo l'esistenza di un materiale a comportamento perfettamente reversibile (elastico, conservativo), dotato di energia di deformazione definita positiva, funzione dello stato di sforzo e deformazione:

$\omega(\varepsilon) + \gamma(\sigma) = \sigma : \varepsilon$ (lavoro specifico)

Visione duale:

Trasformata di Legendre di $\omega(\varepsilon)$

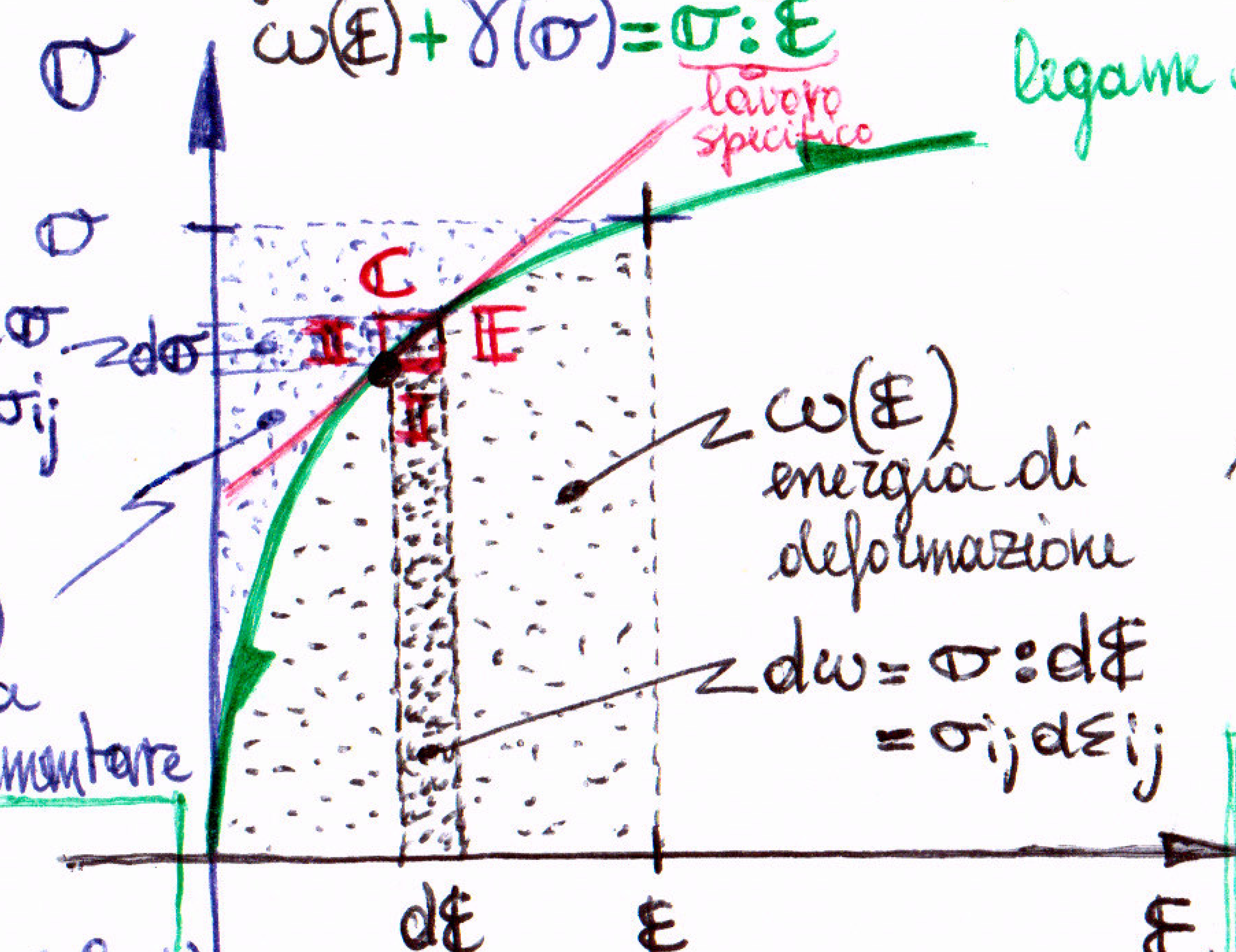
- $\gamma(\sigma) = \sigma : \varepsilon - \omega(\varepsilon)$

F.ne di stato (di sforzo) – F.ne potenziale di deformazione:
$$\gamma(\sigma) = \int_0^\sigma \underbrace{\varepsilon : d\sigma}_{} > 0 \quad \forall \sigma \neq \mathbb{0}$$

$d\gamma = \varepsilon : d\sigma = \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij}$

$d\gamma = \varepsilon : d\sigma = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma} : d\sigma$ differenz. esatto se $\varepsilon = \frac{\partial \gamma(\sigma)}{\partial \sigma}$

$\gamma(\sigma)$ energia complementare



legame olonomo (binario, percorso fisso) ⇒ in generale non lineare (v. ad es. gomme)

- $\omega(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \underbrace{\sigma : d\varepsilon}_{} > 0 \quad \forall \varepsilon \neq \mathbb{0}$

f.ne di stato, indipendente dal percorso (materiale conservativo) ⇒ F.ne potenziale di sforzo (George Green ~1839)

$d\omega$ è differenziale esatto se $\sigma = \frac{\partial \omega(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ (CNS: $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$)

$d\omega = \sigma : d\varepsilon = \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon} : d\varepsilon$ → verifica la CNS grazie a Th. di Schwarz

$\gamma(\sigma) \to \varepsilon(\sigma) = \frac{\partial \gamma(\sigma)}{\partial \sigma} \to \mathbb{C} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \gamma(\sigma)}{\partial \sigma \partial \sigma}$

energia compl. (scalare) — deformaz. (2° ord.) — tensore di cedevolezza (4° ord.)

$\gamma(\sigma_{ij}) \to \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma_{ij}} \to C_{ijkl} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}$ (cedevolezza tangente)

$\omega(\varepsilon) \to \sigma(\varepsilon) = \frac{\partial \omega(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \to \mathbb{E} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \omega(\varepsilon)}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon}$

en. def. (scalare) — sforzo (2° ord.) — tensore di rigidezza (4° ord.)

$\omega(\varepsilon_{ij}) \to \sigma_{ij} = \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon_{ij}} \to E_{ijkl} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$ (rigidezza tangente)

$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$; $\mathbb{E} = \mathbb{C}^{-1}$ (invertibilità garantita dalla definizione positiva supposta)

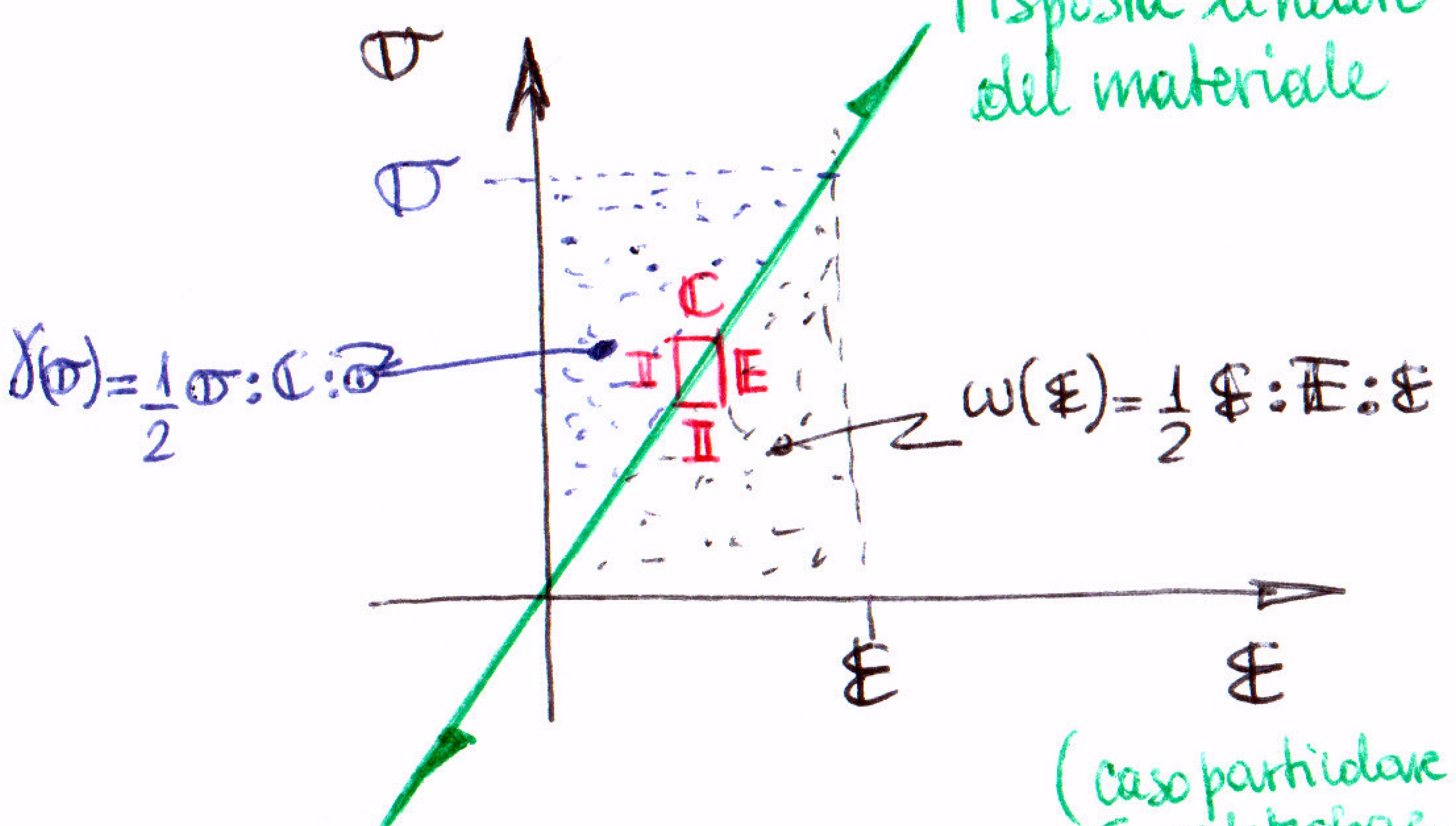
- simmetrie maggiori: $C_{ijkl} = C_{klij}$
- simmetrie minori: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$

→ 21 comp.ti indipendenti

- simmetrie maggiori: $E_{ijkl} = E_{klij}$ (da Th. Schwarz)
- simmetrie minori: $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}$ (da simmetria di ε e di σ)

$81 = 3^4$ componenti → simm. minori → 36 comp. → simm. maggiori → 21 comp.

Legame elastico lineare



- In questo caso $\omega(\varepsilon)$ e $\gamma(\sigma)$ risultano numericamente uguali e pari alla metà del lavoro di deformazione $\sigma:\varepsilon=\varepsilon:\sigma$

erizzi@unibg.it

$$\omega(\varepsilon)=\frac{1}{2}\,\varepsilon:\underbrace{\mathbb{E}:\varepsilon}_{\sigma} \qquad \text{forme quadratiche} \qquad \gamma(\sigma)=\frac{1}{2}\,\sigma:\underbrace{\mathbb{C}:\sigma}_{\varepsilon}$$

$$\boxed{\sigma=\frac{\partial\omega}{\partial\varepsilon}=\mathbb{E}:\varepsilon} \quad \text{lineari — LEGGE COSTITUTIVA —} \quad \boxed{\varepsilon=\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}=\mathbb{C}:\sigma}$$

$$\mathbb{E}=\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\varepsilon\,\partial\varepsilon}=\mathbb{E} \qquad \text{costanti} \qquad \mathbb{C}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma}=\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma\,\partial\sigma}=\mathbb{C}$$

21 parametri E_{ijkl} cost. — 21 parametri C_{ijkl} cost.

Similmente: $\{\sigma\}=[\mathbb{E}]\{\varepsilon\}$ $\qquad [\mathbb{E}]=[\mathbb{C}]^{-1}$

Rappresentazione matriciale della legge costitutiva: $\{\varepsilon\}=[\mathbb{C}]\{\sigma\}$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{12}=2\varepsilon_{12}\\ \gamma_{23}=2\varepsilon_{23}\\ \gamma_{31}=2\varepsilon_{31}\end{Bmatrix}=\Big[\;C_{ij}\;\Big]\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}=\tau_{12}\\ \sigma_{23}=\tau_{23}\\ \sigma_{31}=\tau_{31}\end{Bmatrix}$$

6x1 vettore delle comp.ti di deformazione; 6x6 matrice di cedevolezza simmetrica $\frac{6\times6-6}{2}+6=15+6=21$ coefficienti; 6x1 vettore delle comp.ti di sforzo

Materiale elastico lineare isotropo (caso particolare di ortotropo e di trasv. isotropo)

- Ha comportamento meccanico indipendente dalla direzione (ogni direzione è asse di simmetria rotazionale, ∞ piani di simm.)
- Descritto da 2 parametri indipendenti ($21\to2$ param.) simmetria di comp.
- Legge costitutiva (legge di Hooke generalizzata):

$$\sigma=\lambda\,\mathrm{tr}\,\varepsilon\,\mathbb{I}+2\mu\,\varepsilon \;, \qquad \varepsilon=-\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbb{I}+\boxed{\frac{1+\nu}{E}}\,\sigma \qquad \frac{1}{2\mu}=\frac{1}{2G}$$

λ: 1ª costante di Lamé (non di senso fisico); μ: 2ª costante di Lamé: $\mu=G$ modulo di taglio

E: modulo di Young; ν: coefficiente di Poisson

Def. Pos.: $E>0$, $-1<\nu<1/2$, $G>0$, $K>0$

- Relazioni tra i parametri:

$$\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\;,\qquad G=\frac{E}{2(1+\nu)}\;,\qquad K=\frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{modulo di volume}$$

$\lambda\to\infty$ sui limiti per ν; $G\to\infty$ per $\nu\to-1$; $K\to\infty$ per $\nu\to1/2$

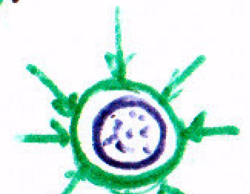
- Disaccoppiamento tra risposta volumetrica e deviatorica: isot. $[\mathbb{C}]=$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{E}&-\frac{\nu}{E}&-\frac{\nu}{E}&&&\\ -\frac{\nu}{E}&\frac{1}{E}&-\frac{\nu}{E}&&\mathbb{0}&\\ -\frac{\nu}{E}&-\frac{\nu}{E}&\frac{1}{E}&&&\\ &&&\frac{1}{G}&&\\ &\mathbb{0}&&&\frac{1}{G}&\\ &&&&&\frac{1}{G}\end{bmatrix}$$

e tra comp.ti normali e taglianti $\to\mathbb{0}$

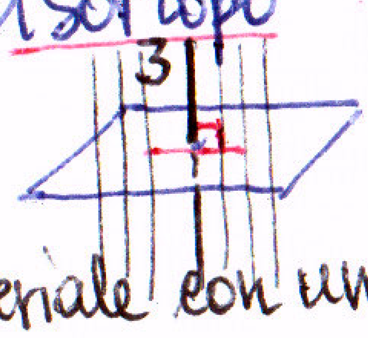
$$p=K\vartheta\;,\quad \vartheta=\frac{p}{K}\;;\qquad s=2G\,e\;,\quad e=\frac{s}{2G}$$

$p=\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}$; $\vartheta=\mathrm{tr}\,\varepsilon$; s: deviatore di sforzo; e: deviatore di deformazione




(caso part. di ortotr.) $\varepsilon_{ii}\Leftrightarrow\sigma_{ii}$ — $2\varepsilon_{ij}\Leftrightarrow\tau_{ij}$ — $21\to5$ param.

- **Materiale trasversalmente isotropo** (1 asse di simmetria rotazionale (isotropo nel piano $\perp$ del asse 3); $3\equiv T$ direz. trasversa)



es. materiale con una famiglia di fibre

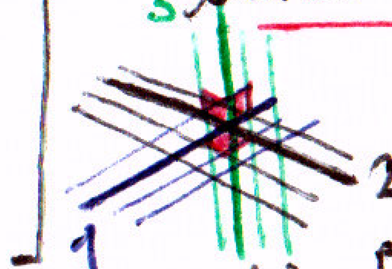
$$[\mathbb{C}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{E}&-\frac{\nu}{E}&-\frac{\nu_T}{E_T}\\ -\frac{\nu}{E}&\frac{1}{E}&-\frac{\nu_T}{E_T}\\ -\frac{\nu_T}{E_T}&-\frac{\nu_T}{E_T}&\frac{1}{E_T}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\frac{2(1+\nu)}{E}&&\\ &\frac{1}{G_T}&\\ &&\frac{1}{G_T}\end{bmatrix}$$

$E_1=E_2=E$, $E_T=E_3$; $G_T=G_{23}=G_{31}$; ν, $\nu_T=\nu_{31}=\nu_{32}$; $\nu=\nu_{12}$; $\left(G_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\right)$

Ortotropo: soli 3 piani di simmetria mutuam. $\perp$: $21\to9$ parametri: E_1, E_2, E_3; G_{12}, G_{23}, G_{31}; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$

es.: con $\frac{\nu_{21}}{E_1}=\frac{\nu_{12}}{E_2}$, $\frac{\nu_{31}}{E_1}=\frac{\nu_{13}}{E_3}$, $\frac{\nu_{32}}{E_2}=\frac{\nu_{23}}{E_3}$ $\left(\frac{\nu_{ji}}{E_i}=\frac{\nu_{ij}}{E_j}\right)$

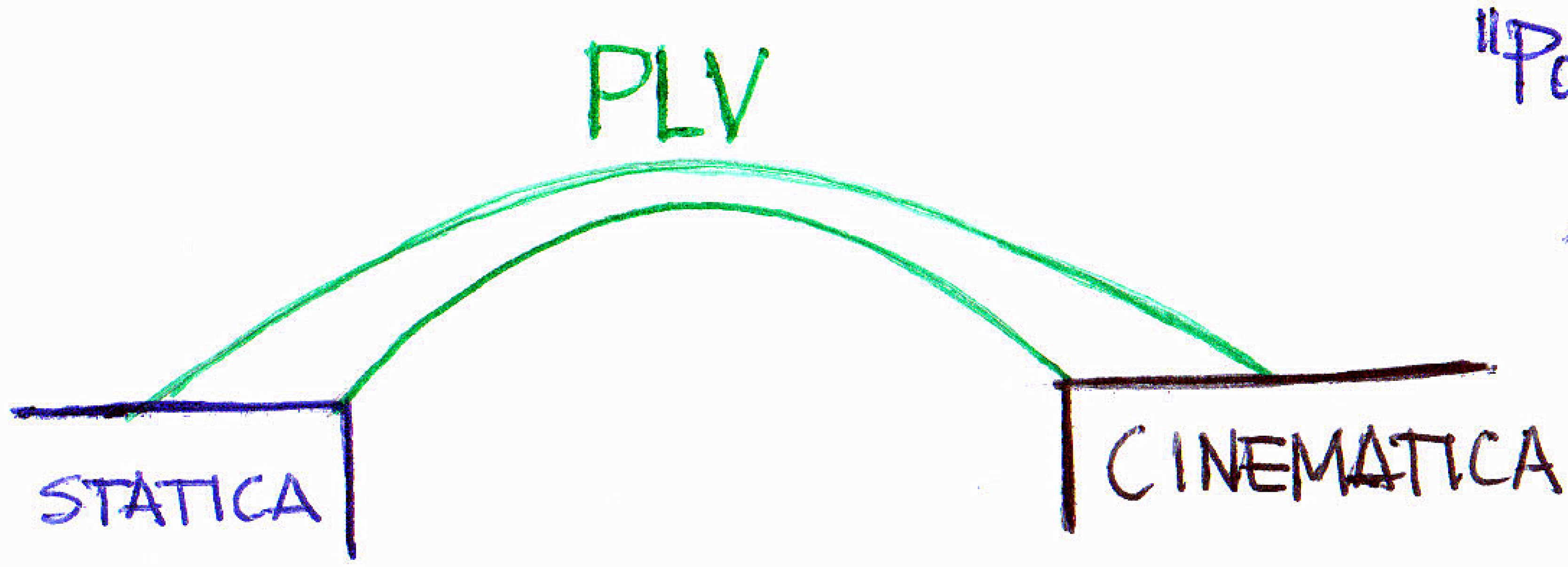
- **Materiale ortotropo**



3 direz. di ortotropia mutuam. $\perp$ (es. materiale con fibre mutuamente $\perp$, composito).

$$[\mathbb{C}]^{ort.}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_1}&-\frac{\nu_{12}}{E_2}&-\frac{\nu_{13}}{E_3}&&&\\ -\frac{\nu_{21}}{E_1}&\frac{1}{E_2}&-\frac{\nu_{23}}{E_3}&&&\\ -\frac{\nu_{31}}{E_1}&-\frac{\nu_{32}}{E_2}&\frac{1}{E_3}&&&\\ &&&\frac{1}{G_{12}}&&\\ &&&&\frac{1}{G_{23}}&\\ &&&&&\frac{1}{G_{31}}\end{bmatrix}$$

 egidio.rizzi@unibg.it



"Ponte" tra la Statica e la Cinematica (peraltro non aggiunge nuove eq.ni governanti)

Sistema A (staticamente ammiss.)
Famiglia di quantità statiche $\mathbb{F}^A, \mathbb{f}^A, \sigma^A$:
$$\operatorname{div}\sigma^A + \mathbb{F}^A = 0 \text{ in } V$$
$$n \cdot \sigma^A = \mathbb{f}^A \text{ su } S_f$$

Sistema B (cinematicamente ammissibile)
Famiglia di quantità cinematiche $s^B, \bar{s}^B, \varepsilon^B$:
$$\varepsilon^B = \frac{1}{2}\left(\nabla s^B + \nabla s^{B\,T}\right) \text{ in } V$$
$$s^B = \bar{s}^B \text{ su } S_s$$

N.B.: Sistemi in generale virtuali, non necessariam. reali, fittizi –

Enunciato del PLV (quale CN di equilibrio e di congruenza):

$$\forall \left.\begin{array}{l}\text{Sistema A static. amm.}\\ \text{Sistema B cinem. amm.}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}_e^{AB}}_{\text{Lavoro esterno}} = \underbrace{\mathcal{L}_i^{AB}}_{\text{Lavoro interno}}$$

con
$$\mathcal{L}_e^{AB} = \int_V \underbrace{\mathbb{F}^A \cdot s^B}_{F_i^A s_i^B} dV + \int_{S_f} \underbrace{\mathbb{f}^A \cdot s^B}_{f_i^A s_i^B} dS + \int_{S_s} \underbrace{n \cdot \sigma^A \cdot \bar{s}^B}_{n_i \sigma_{ij}^A \bar{s}_j^B} dS \,; \quad \mathcal{L}_i^{AB} = \int_V \underbrace{\sigma^A : \varepsilon^B}_{\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B} dV$$

Manifestazioni del PLV (CS):

Principio degli Spostamenti Virtuali (CS di equilibrio): PSV

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sistema B cinem. amm.}\\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Sistema A staticam. amm.}\\ \text{(cioè equilibrato)}\end{array}$$

Principio delle Forze Virtuali (CS di congruenza): PFV

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sistema A static. amm.}\\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Sistema B cinem. amm.}\\ \text{(cioè congruente)}\end{array}$$

Dimostrazione della CN, tramite Teorema della Divergenza (si potrebbe parlare di Teorema dei Lavori Virtuali – TLV)

Th. Div.: $\displaystyle \int_V \underbrace{\operatorname{div} g}_{g_{i,i}}\, dV = \int_S \underbrace{n \cdot g}_{n_i g_i}\, dS$ $\quad g$: campo tensoriale (es. vettore g_i)

ε parte simm. $(\varepsilon^T = \varepsilon)$ $\quad \nabla s = \varepsilon + \vartheta$

ϑ parte emisim. $(\vartheta^T = -\vartheta)$ $\quad \nabla s^T = \varepsilon^{(T)} + \vartheta^T$

$i=j: \vartheta_{i(i)} = 0;\ i \neq j\ \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$

Sia $g = \sigma \cdot s \Leftrightarrow g_i = \sigma_{ij} s_j$. Allora: $\operatorname{div} g = g_{i,i} = \sigma_{ij,i} s_j + \sigma_{ij} s_{j,i} = (\operatorname{div}\sigma) \cdot s + \sigma : \nabla s^T$

$= (\operatorname{div}\sigma) \cdot s + \sigma : \varepsilon^{(T)}$ $\quad$ poiché $\underset{\text{simm.}}{\sigma} : \underset{\text{emisim.}}{\vartheta^T} = 0$

Quindi: $\boxed{\operatorname{div}(\sigma \cdot s) = (\operatorname{div}\sigma) \cdot s + \sigma : \varepsilon^{(T)}} \Rightarrow \sigma : \varepsilon^{(T)} = \operatorname{div}(\sigma \cdot s) - (\operatorname{div}\sigma) \cdot s$

$\sigma_{ij} \vartheta_{ji} = \sigma_{11} \underset{0}{\vartheta_{11}} + \sigma_{12} \vartheta_{21} + \ldots + \sigma_{21} \vartheta_{12} + \ldots = -\sigma_{12} \vartheta_{12} + \ldots + \sigma_{12} \vartheta_{12} + \ldots = 0$

σ simm. e ϑ emisim. sono mutuamente ortogonali: $\sigma : \vartheta = \sigma : \vartheta^T = 0$

Pertanto:
$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_V \sigma^A : \varepsilon^B dV = \int_V \operatorname{div}(\sigma^A \cdot s^B)\, dV - \int_V (\operatorname{div}\sigma^A) \cdot s^B dV \overset{\text{Th. Div.}}{=} \int_S n \cdot \sigma^A \cdot s^B dS - \int_V (\operatorname{div}\sigma^A) \cdot s^B dV \underset{\text{B cin. am.}}{\overset{\text{A st. am.}}{=}}$$
$$= \int_{S_f} \mathbb{f}^A \cdot s^B dS + \int_{S_s} n \cdot \sigma^A \cdot \bar{s}^B dS + \int_V \mathbb{F}^A \cdot s^B dV = \mathcal{L}_e^{AB} \quad \text{c.v.d.}$$

Si deduce quindi che il TLV valga anche nell'ambito della Meccanica delle Strutture

• Proprietà del pb. elastico lineare

egidio.rizzi@unibg.it

- Principio di Sovrapposizione degli Effetti (PSE) (o sovrapponibilità): Una combinazione lineare dei dati di partenza origina, come soluzione, la corrispondente combinazione lineare delle soluzioni.

	DATI		SOLUZIONE
Sistema ① :	$\mathbb{F}^1, \mathbf{f}^1, \bar{\mathbf{s}}^1$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \mathbf{s}^1$
Sistema ② :	$\mathbb{F}^2, \mathbf{f}^2, \bar{\mathbf{s}}^2$	$\rightarrow$	$\boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \mathbf{s}^2$

$$\begin{array}{ccc} \alpha\mathbb{F}^1+\beta\mathbb{F}^2, & & \alpha\boldsymbol{\sigma}^1+\beta\boldsymbol{\sigma}^2 \\ \alpha\mathbf{f}^1+\beta\mathbf{f}^2, & \rightarrow & \alpha\boldsymbol{\varepsilon}^1+\beta\boldsymbol{\varepsilon}^2 \\ \alpha\bar{\mathbf{s}}^1+\beta\bar{\mathbf{s}}^2 & & \alpha\mathbf{s}^1+\beta\mathbf{s}^2 \end{array}$$

combinazione lineare dei dati — combinaz. lin. delle soluzioni

Infatti tutti gli operatori, algebrici e differenziali, coinvolti nelle eq.ni governanti risultano lineari.

Ad es.: $\mathrm{div}(\alpha\boldsymbol{\sigma}^1+\beta\boldsymbol{\sigma}^2)=\alpha\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^1+\beta\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^2$

- Buona posizione ($\exists$ un numero finito di soluzioni linearmente indipendenti con dipendenza continua dai dati)
  - $\exists$ la soluzione (può essere dimostrato - V. ad es. riferimenti in Sokolnikoff, 1956).
  - $\exists!$ soluzione (unicità della soluzione del pb. elastico lineare) $\Rightarrow$ Th. di Kirchhoff ~1859

Dimostrazione (per assurdo) • Hp: $\exists$ due soluzioni distinte per gli stessi dati $\mathbb{F}, \mathbf{f}, \bar{\mathbf{s}} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^1\neq\boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^1\neq\boldsymbol{\varepsilon}^2, \mathbf{s}^1\neq\mathbf{s}^2$

- Dal PSE, ponendo $\alpha=-\beta=1$, con $\mathbb{F}=\mathbb{F}^1=\mathbb{F}^2$, $\mathbf{f}=\mathbf{f}^1=\mathbf{f}^2$, $\bar{\mathbf{s}}=\bar{\mathbf{s}}^1=\bar{\mathbf{s}}^2$:

$$\Delta\mathbb{F}=\mathbf{0},\ \Delta\mathbf{f}=\mathbf{0},\ \Delta\bar{\mathbf{s}}=\mathbf{0} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^1-\boldsymbol{\sigma}^2\neq\mathbf{0},\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^1-\boldsymbol{\varepsilon}^2\neq\mathbf{0},\ \Delta\mathbf{s}=\mathbf{s}^1-\mathbf{s}^2\neq\mathbf{0}$$

(con $\Delta\boldsymbol{\sigma}=\mathbb{C}:\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbb{E}:\Delta\boldsymbol{\sigma}$ da legame costitut.)

- Utilizzando il PLV, con $A\equiv B\equiv$ sistema reale:

$$\underbrace{\mathcal{L}_e=0}_{\Delta\mathbb{F}=\mathbf{0},\,\Delta\mathbf{f}=\mathbf{0},\,\Delta\bar{\mathbf{s}}=\mathbf{0}}=\mathcal{L}_i=2\int_V\frac{1}{2}\,\Delta\boldsymbol{\sigma}:\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\,dV=2\int_V\underbrace{\omega(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})}_{>0\ \forall\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\neq\mathbf{0}\ (\text{def. pos.})}dV \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}\Rightarrow\Delta\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$$

, violando le ipotesi iniziali → assurdo

- Unicità della soluzione in termini di $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ (non di $\mathbf{s}$ - Infatti $\mathbf{s}$ può essere noto a meno di moti rigidi, ad es. quando non vi sono spostamenti imposti - V. pb. di DSV).
- Cruciali per l'unicità: la linearità (uso del PSE) e l'elasticità ($\exists$ di energie di def.ne $\omega(\boldsymbol{\varepsilon})$ def. pos.)
- Esempio tipico di non unicità: instabilità dell'equilibrio per non linearità geometrica (spostamenti grandi, cioè tali da influenzare l'equilibrio) (v. Instabilità delle Strutture.

v. Meccanica Computazionale dei Solidi e delle Strutture

• Metodi risolutivi

- Approccio analitico (spesso non proponibile in forma chiusa)
  - Diretto: Dati → Soluzione - Raramente percorribile in forma chiusa
  - Semi-inverso: Dati → Soluz. nota a meno di un certo numero di parametri - Si verif. le eq.ni governanti e la corrisp. coi dati fisse i param. inc.
  - Inverso: Soluzione → Dati - Si ricostruiscono i dati che possono originare una data soluz. Idem, diffic. soluz.

- Approccio numerico
  - Metodo degli Elementi Finiti (FEM)
  - " " Elementi di Contorno (BEM)
  - " delle Differenze Finite (FD)

Tramite DISCRETIZZAZIONE (∞ gdl → n° finito di gdl)