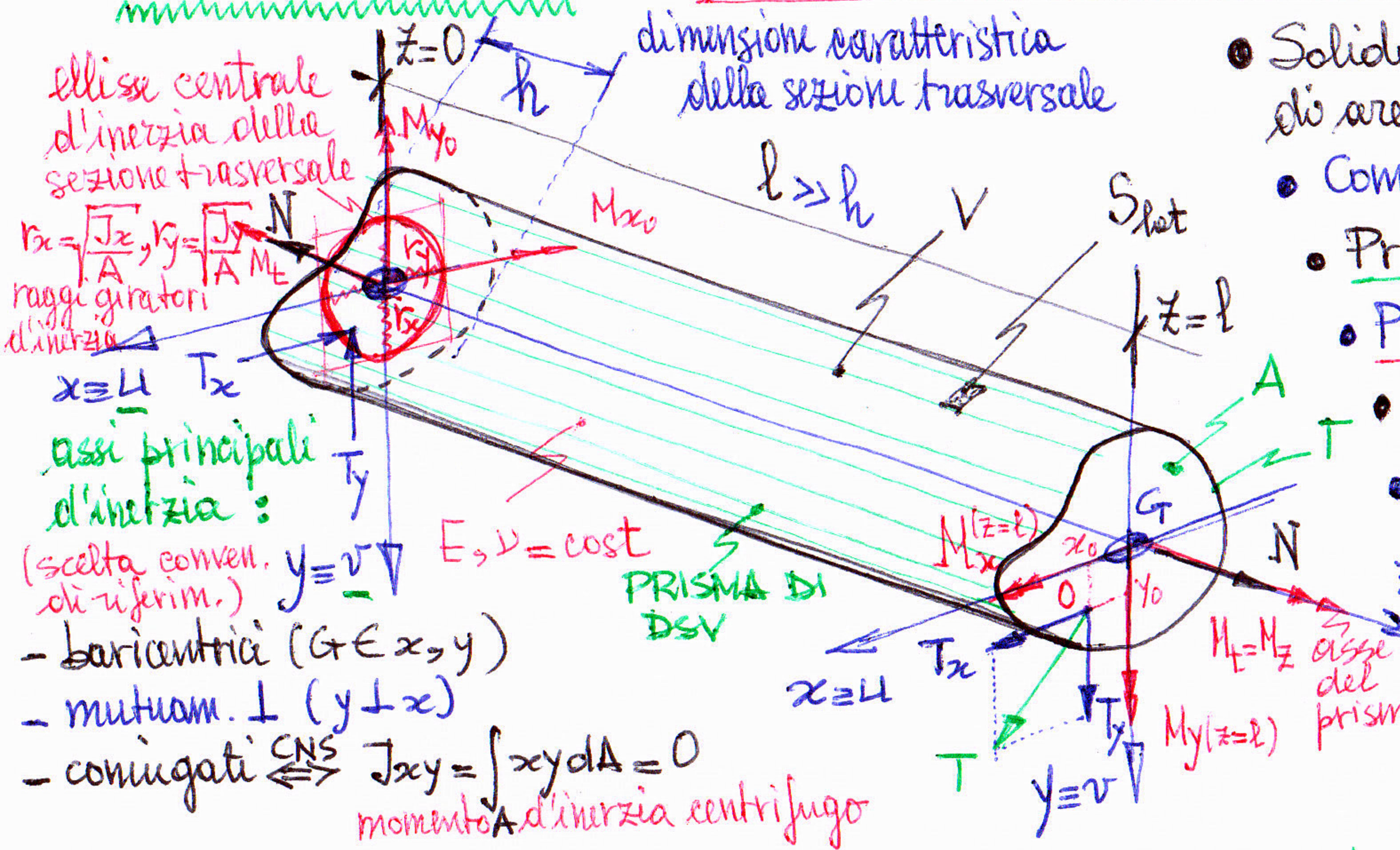




- Solido cilindrico di forma allungata ($l \gg h$, es. $l \approx 10h$), a sezione costante di area A ed asse rettilineo (luogo dei baricentri G delle sezioni trasversali).
- Composto da materiale omogeneo, elastico lineare isotropo ($E, \nu = \text{cost}$).
- Privo di vincoli esterni ($S_s = \emptyset$) $\rightarrow$ soluz. in s nota a meno di moti rigidi.
- Privo di forze di volume ($F = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie sulla superficie laterale ($f = 0$ su S_{lat}).
- Sollecitato solamente da forze di superficie agenti sulle basi $z=0$ e $z=l$, note solo in termini di risultanti (distribuzione non specificata) e tali da formare un sistema di forze autoequilibrato.

POSTULATO DI DSV: la reale distribuzione delle forze agenti, a parità di risultanti, non altera la soluzione, se non per effetti di bordo in prossimità delle basi (valido per sezioni piene, compatte).
Si può ipotizzare che le risultanti siano distribuite con la distribuzione di sforzo che corrisponde alla soluzione (incognita).

- Soluzione con approccio semi-inverso: (ricorda l'unicità della soluzione del pb. elastico) - Th. di Kirchhoff -
- Hp. fondamentale di DSV:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0, \text{ cioè incognite } \sigma_{ij} \text{ residue:}$$

- Eq. di equilibrio:

$$\text{div } \sigma + F = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ij,j} + F_i = 0:$$

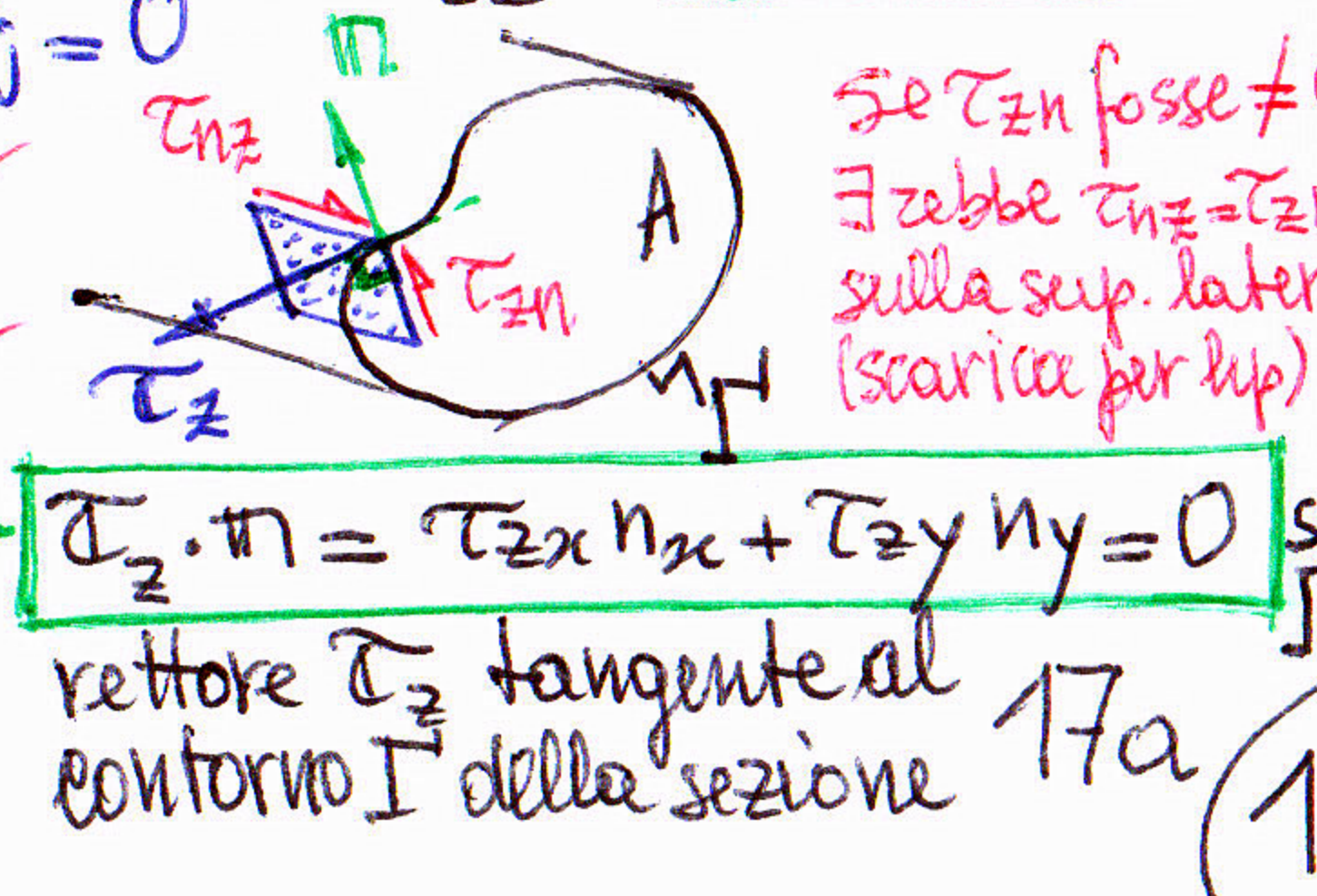
$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \tau_{yz,z} = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{cases} \rightarrow \tau_z \text{ indep. da } z: \begin{cases} \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y) \\ \tau_{zy} = \tau_{zy}(x, y) \end{cases}$$

Condizioni al contorno:

$$n \cdot \sigma = f = 0 \text{ su } S_{\text{lat}} \Leftrightarrow n_i \sigma_{ij} = f_j = 0$$

$$\begin{cases} n_x \sigma_{xx} + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = 0 \\ n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_{yy} + n_z \tau_{zy} = 0 \\ n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

$$n \in \text{piano della sez. } \perp \text{ a } z \rightarrow n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} n_z = 0$$



• Azioni presenti e risultanti agenti su ogni sezione (a quota z)

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = \text{cost} \quad \text{Azione assiale } \sigma \text{ normale}$$

$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA = \text{cost} \quad \text{Componenti azione tagliante } T$$

$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA = \text{cost} \quad \text{agente in } (x_0, y_0)$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = M_{x0} + T_y \cdot z \quad \text{Azioni flettenti (variabili in } z)$$

$$M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA = M_{y0} - T_x \cdot z$$

$$M_t + T_y x_0 - T_x y_0 = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = \text{cost} \quad M_t \text{ azione torcente}$$

- Legge costitutiva elastico lineare isotropo:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases} \rightarrow \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} \text{ lineari in } z, \text{ come lo } \sigma_{zz}$$

$$\tau_{ij} = 2\epsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{ij} \rightarrow \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{ij} \quad i \neq j: \delta = \frac{1}{G} \text{ non dipend. da } z$$

modulo di taglio $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ E modulo di Young ν coefficiente di Poisson

- Equazioni di congruenza interna:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy} \\ \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\varepsilon_{yz,yz} \\ \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} = 2\varepsilon_{zx,zx} \end{cases}$$

automaticamente verificata

ε_{zz} lineare in y
 ε_{zz} lineare in x

idem per ε_{xx} , ε_{yy} e σ_{zz} →

CAMPO $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, y, z)$

Quindi σ_{zz} lineare in x, y, z e indep. da xy :

$$\sigma_{zz} = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y)$$

$$= (a - bz) + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y$$

con cost. a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 da determ. in base alle risultanti presenti.

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} \\ \varepsilon_{yy,zx} + \varepsilon_{zx,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} \\ \varepsilon_{zz,xy} + \varepsilon_{xy,zz} = \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} \end{cases} (*)$$

- Dalle rimanenti (*):

$$\begin{cases} \varepsilon_{zx,xy} - \varepsilon_{zy,xx} = \varepsilon_{xx,zy} \\ \varepsilon_{zx,yy} - \varepsilon_{zy,yx} = -\varepsilon_{yy,zx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\varepsilon_{zx,y} - \varepsilon_{zy,x})_{,x} = \varepsilon_{xx,zy} \\ (\varepsilon_{zx,y} - \varepsilon_{zy,x})_{,y} = -\varepsilon_{yy,zx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})_{,x} = \bar{\nu} b_2 \\ (\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})_{,y} = -\bar{\nu} b_1 \end{cases}$$

con $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$

Integrando

$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}(b_2 x - b_1 y) - c$ con c costante di integrazione
Eq. ne di congruenza nelle $\tau_{zx}(x, y)$, $\tau_{zy}(x, y)$ in A (da porre evidentemente in relazione a M_z)

- Tornando a σ_{zz} , dall'equivalenza statica:

assi baricentrici $\Rightarrow$ momento statico nullo

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = (a - bz)A + (a_1 - b_1 z)S_y + (a_2 - b_2 z)S_x = aA - bAz = \text{cost in } z \Rightarrow b=0, a = \frac{N}{A}$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = (a - bz)S_x + (a_1 - b_1 z)J_{xy} + (a_2 - b_2 z)J_x = M_{x0} + T_y z \Rightarrow a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} \text{ e } a_2 = \frac{M_{x0}}{J_x}, b_2 = -\frac{T_y}{J_x}$$

$$M_y = -\int_A \sigma_{zz} x dA = -(a - bz)S_y - (a_1 - b_1 z)J_y - (a_2 - b_2 z)J_{xy} = M_{y0} - T_x z \Rightarrow a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y} \text{ e } a_1 = -\frac{M_{y0}}{J_y}, b_1 = -\frac{T_x}{J_y}$$

- Concludendo: CAMPO DI SFORZO NORMALE (analiticamente noto)

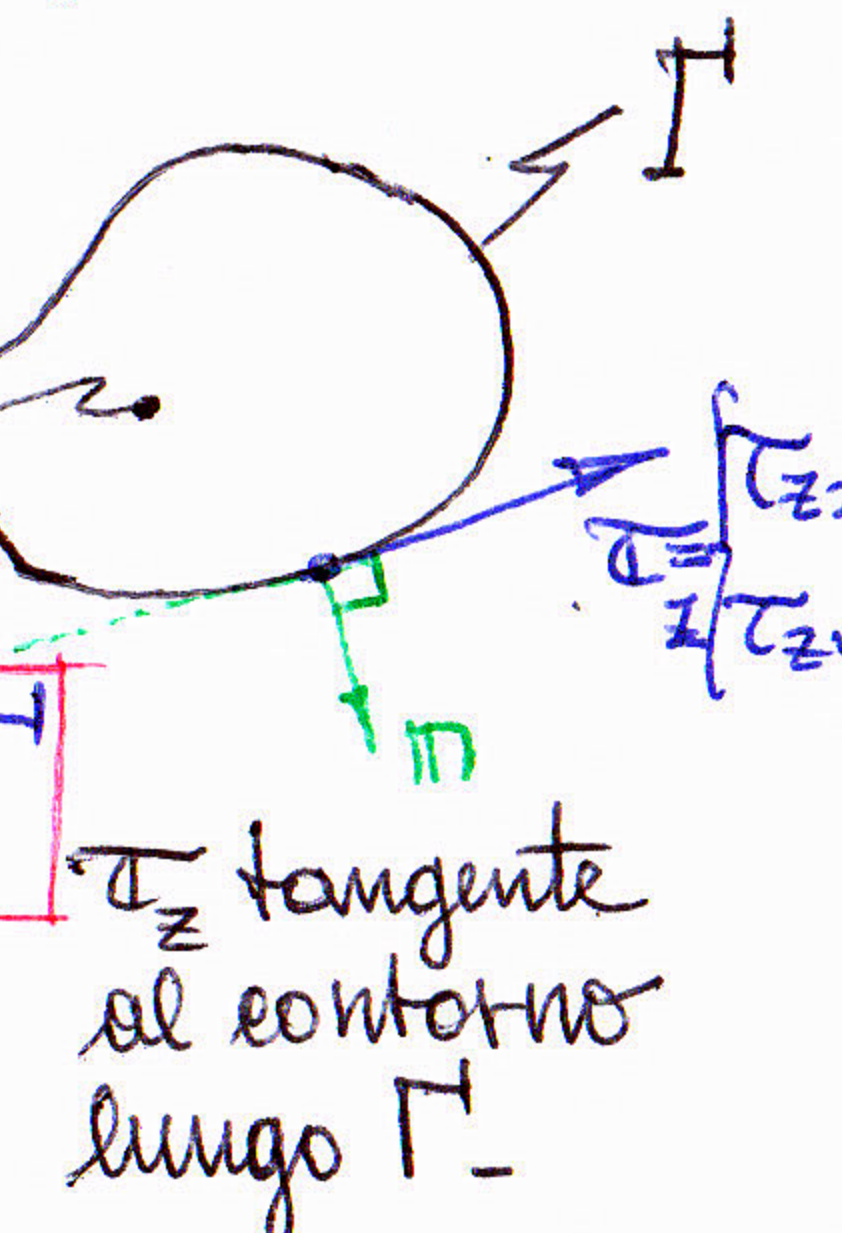
$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x$$

+ Problema nelle $\tau_z(x, y)$: $\text{div } \tau_z = -\sigma_{zz,z} = b + b_1 x + b_2 y = -\frac{T_x}{J_y} x - \frac{T_y}{J_x} y$

$$\begin{cases} \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\left(\frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y\right) \dots \dots \dots \text{eq. ne di equilibrio in } A \\ \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{T_x}{J_y} y\right) - c \dots \dots \dots \text{eq. ne di congruenza} \end{cases}$$

con c.c. $\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ

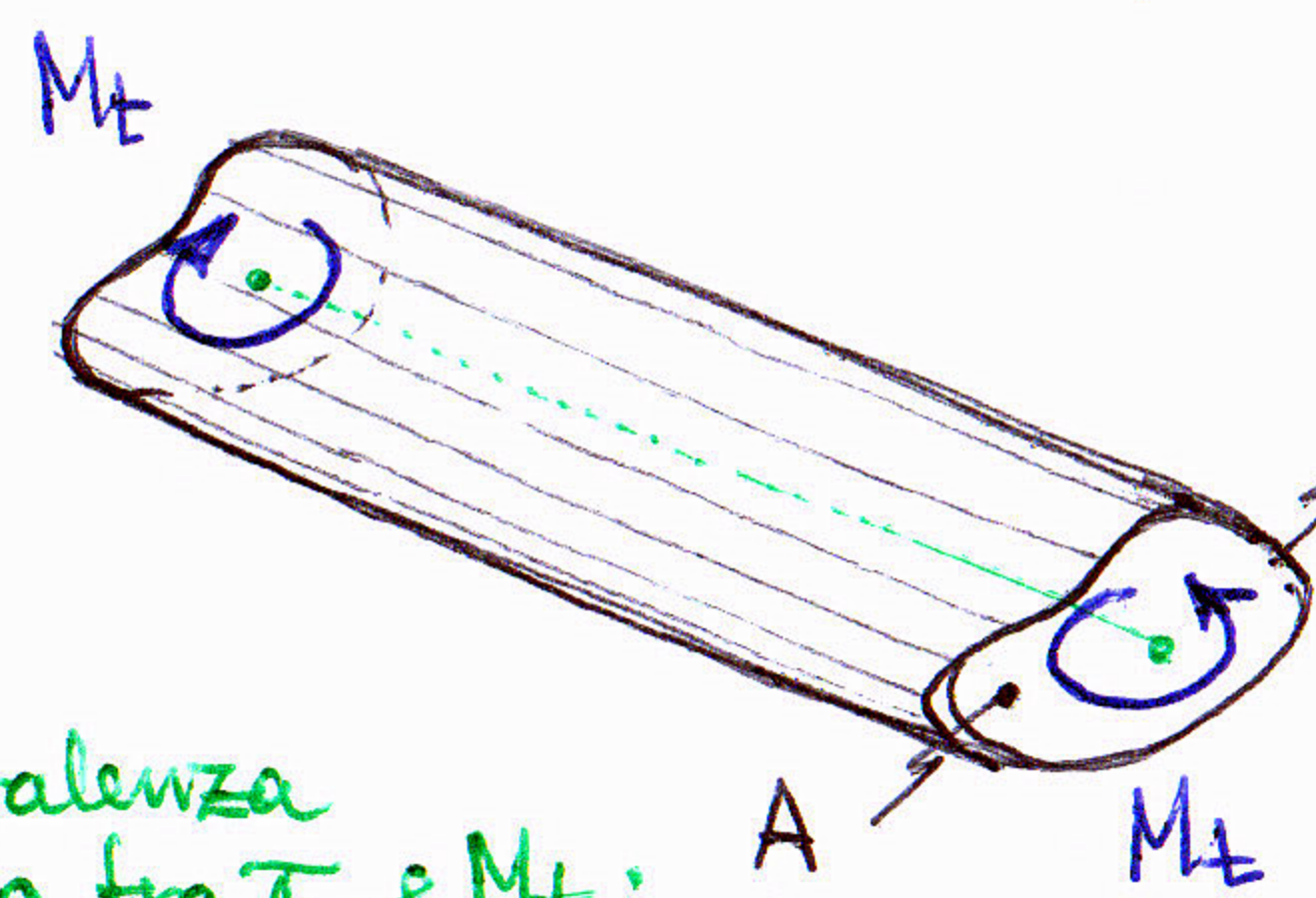
egidio.rizzi@unibg.it



Problema differenziale del 1° ordine che resta da essere risolto in A .
(in generale non di facile soluzione in forma chiusa)

18a Lez. CdSdC - Caso di DSV della TORSIONE - Prisma soggetto a sole coppie torcenti M_t ($N=T_x=T_y=0$; $M_x=M_y=0$).

erizzi@unibg.it



Equivaleza statica fra τ_z e M_t :
 $M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$

- Dalla soluzione generale per σ_{zz} evidentemente sia ha $\sigma_{zz} = 0$ -
 - Si ottengono quindi le seguenti eq. n. nelle τ_z :

$$\begin{cases} \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 & \text{equilibrio} \\ \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c & \text{congruenza} \end{cases}$$

in A, con r.l. $\tau_z \cdot \mathbf{n} = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0$ su Γ

Anche:

$$\begin{cases} \text{div } \tau_z = 0 \\ (\text{rot } \tau_z)_z = c \end{cases}$$

Infatti $\text{rot } \tau_z = \nabla \wedge \tau_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = (\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}) \mathbf{k} = -(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}) \mathbf{k}$

Approccio agli spostamenti (pago a priori la congruenza, impongo l'equilibrio).

Ipotesi sul campo di spostamenti (suffragata ad es. da osservazioni sperimentali): rotazione rigida (infinitesima) della sezione nel suo piano: $v = v(z) = \beta z$, con $\beta = \frac{dv}{dz} = \text{cost}$ "torsione" o angolo unitario di torsione (rotaz. per unita di lunghezza, es. rad/m)
 + spostamento fuori piano della sezione (ingobbamento), indep. da z -
Campo di spostamenti (rappresentazione analitica):

$$\begin{cases} \Delta x = \Delta x(y, z) = -\beta z y \\ \Delta y = \Delta y(x, z) = \beta z x \\ \Delta z = \Delta z(x, y) = \beta \psi_0(x, y) \end{cases}$$

$$\Delta = \omega \wedge x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -vy \mathbf{i} + vx \mathbf{j}$$

Funzione di ingobbamento (riferita a G) - Definita a meno di una costante (che rappresenterebbe una traslazione rigida in direzione z) -
 Definita a meno di una costante (che rappresenterebbe una traslazione rigida in direzione z) -

N.B.:
 - sezione indeformabile nel suo piano - Infatti, verifica immediata:
 - inoltre $\epsilon_{zz} = \Delta_{z,z} = 0$ (coerentemente con $\sigma_{zz} = 0$), avendo assunto ψ_0 indipendente da z .

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \Delta_{x,x} = 0 \\ \epsilon_{yy} = \Delta_{y,y} = 0 \\ 2\epsilon_{xy} = \Delta_{x,y} + \Delta_{y,x} = -\beta z + \beta z = 0 \end{cases}$$

Campo di deformazioni conseguente:

$$\begin{cases} \gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} = \Delta_{z,x} + \Delta_{x,z} = \beta(\psi_{0,x} - y) \\ \gamma_{zy} = 2\epsilon_{zy} = \Delta_{z,y} + \Delta_{y,z} = \beta(\psi_{0,y} + x) \end{cases}$$

Campo di tensioni tangenziali (da legame costitutivo $\delta_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$; $\tau_{ij} = G\delta_{ij}$)

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta(\psi_{0,x} - y) \\ \tau_{zy} = G\beta(\psi_{0,y} + x) \end{cases}$$

Dato in termini di $\psi_0(x, y)$; noto una volta nota ψ_0

Quindi τ_z legate a M_t tramite β

Equazione di congruenza: attesa identicamente verificata -

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \rightarrow G\beta(\psi_{0,xy} - 1 - \psi_{0,yx} - 1) = -2G\beta = -c \rightarrow \boxed{c = 2G\beta}$$

Significato fisico di c : proporz. a $\beta = \frac{c}{2G}$

- Equazione di equilibrio:

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \rightarrow \cancel{G\beta} (\psi_{G,xx} + \psi_{G,yy}) = 0 \rightarrow \boxed{\nabla^2 \psi_G = \psi_{G,xx} + \psi_{G,yy} = 0}$$

laplaciano

Elizzi@unibg.it

Eq.ne di Laplace in A

R.l.: $\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su $\Gamma \rightarrow \cancel{G\beta} (\psi_{G,x} n_x - y n_x + \psi_{G,y} n_y + x n_y) = 0$

derivata direzion.
nella direzione n^2

$$\psi_{G,n} = \psi_{G,x} n_x + \psi_{G,y} n_y = n_x y - n_y x \text{ su } \Gamma$$

flusso uscente
della f.ne $\psi_G(x,y)$
assegnato

$$\psi_{G,n} = x \cdot \frac{1}{2} \text{ scrittura compatta}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d r^2(s)}{ds} = r(s) r'(s)$$

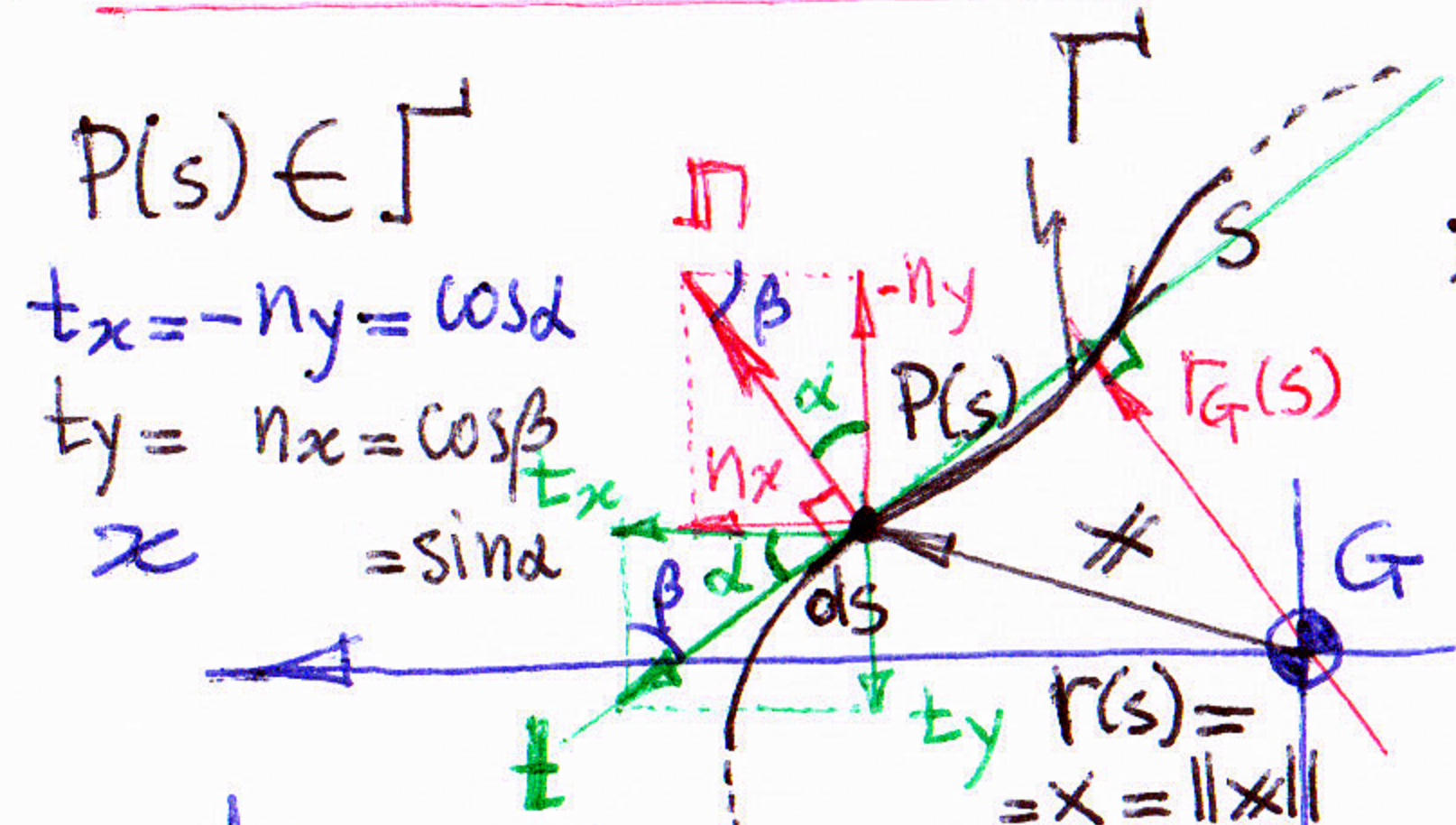
Condizione al contorno
di Neumann-Dini

(flusso assegnato - p.e.
sulla derivata della
f.ne incognita)

Si ottiene quindi un
problema di Neumann-Dini per
l'equazione di Laplace

(torsione - approccio agli spostamenti) $\rightarrow$ pb. differenziale del 2° ordine alle
derivate parziali

- Riscrittura della e.e.



$$x \in \Gamma: x = P(s) - O = P(s) - G = \begin{Bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{Bmatrix}$$

versore tangente:

$$t = \frac{dx}{ds} = \begin{Bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$$

versore normale:

$$n = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_y \\ -t_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{Bmatrix}$$

N.B. $n \cdot t = x''y' - x'y'' \equiv 0 \checkmark$



Risulta:

$$\psi_{G,n} = t_y y + t_x x = x \cdot \frac{1}{2}$$

$$= y' y + x' x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2(s) + y^2(s)) = \frac{1}{2} \frac{d r^2(s)}{ds} = r(s) r'(s)$$

$$r(s) = \sqrt{x^2(s) + y^2(s)}$$

$r(s)$ r: distanza di P(s) da G

r_G : distanza della tangente a Γ
in P(s) da G

N.B. Sezione circolare

$$r(s) = R = \cos t$$

$$\Rightarrow r'(s) = 0$$

$$\Rightarrow \psi_{G,n} = 0$$



Soluzioni di $\begin{cases} \nabla^2 \psi_G = 0 \text{ in } A \\ \psi_{G,n} = 0 \text{ su } \Gamma \end{cases} \Rightarrow \psi_G = 0$

ingobbamento NULLO
per la sezione circolare

- Equivalenza statica del campo τ_z a M_t :

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = G\beta \int_A (\psi_{G,y} \cdot x + x^2 - \psi_{G,x} \cdot y + y^2) dA$$

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \int_A \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2 (x \in A)} dA - \int_A (\psi_{G,x} \cdot y - \psi_{G,y} \cdot x) dA = J_G - J^*$$

momento
d'inertia torsionale

Si pone $J = \frac{J_G}{\eta} \leq J_G$ con $\eta \geq 1$ fattore di torsione

$$\eta = \frac{J_G}{J} \text{ pura proprietà geometrica della sezione trasversale}$$

$$= \frac{1}{1 - J^*/J_G}$$

momento d'inertia torsionale
da ingobbamento (si sottrae
a J_G) noto una volta
nota ψ_G .

$$J = J_G (1 - \frac{J^*}{J_G})$$

Quindi:

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \eta \frac{M_t}{GJ_G}$$

$$d\theta = \beta dz = \frac{M_t dz}{GJ} = \eta \frac{M_t dz}{GJ_G}$$

GJ : rigidità
torsionale

Relaz. dimostrabile:

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \frac{1}{G\beta} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA = \frac{2}{G\beta} \int_A \tau_z^2 dA > 0$$

Si può dimostrare (tramite doppia
applicazione di Th. Div.) che:

$$+ J^* \geq 0 \text{ (v. Corradi o pag. successiva)}$$

$$J^* = \int_A [(\psi_{G,x})^2 + (\psi_{G,y})^2] dA < J_G$$

non $\nabla^2 \psi_G = 0$ in A

$$18a/2$$

● Dimostrazione "spuria" (me sente Th. Div.) su J (tramite un'ale applicazione di Th. Div.) Altamente, vedi ad es. Corradi.

$\beta = \frac{M_t}{GJ}$ angolo unitario di torsione rigidezza torsionale

equivalenza statica

$$GJ\beta = M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= \int_A \left[\tau_{zy} \left(\frac{\tau_{zy}}{G\beta} - \psi_{,y} \right) - \tau_{zx} \left(-\frac{\tau_{zx}}{G\beta} + \psi_{,x} \right) \right] dA$$

$$= \frac{1}{G\beta} \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA - \underbrace{\int_A (\tau_{zx}\psi_{,x} + \tau_{zy}\psi_{,y}) dA}_0$$

$\tau_z^2 = \|\tau_z\|^2$

si può dim.

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{\tau_{zx}}{G\beta} + \psi_{,x} \\ x = \frac{\tau_{zy}}{G\beta} - \psi_{,y} \end{cases}$$

brizzi@unibg.it

- Infatti:

$$\int_A (\tau_{zx}\psi_{,x} + \tau_{zy}\psi_{,y}) dA = \int_A [(\tau_{zx}\psi_{,x})_{,x} + (\tau_{zy}\psi_{,y})_{,y}] dA - \int_A [(\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y})\psi] dA$$

Th. Div.

$$= \int_{\Gamma} (\tau_{zx}\psi_{,x} n_x + \tau_{zy}\psi_{,y} n_y) d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi (\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y) d\Gamma = 0$$

0 mi soluz. nel rispetto delle e.c. su Γ

caso particolare

$$\int_A \text{div } g_i dA = \int_{\Gamma} m \cdot g_i d\Gamma$$

$$g_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ g_i \end{Bmatrix} \rightarrow \int_A g_{(i),i} dA = \int_{\Gamma} n_{(i)} g_{(i)} d\Gamma$$

no sum on i

- Quindi: $(G\beta)^2 J = \int_A (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dA > 0$ - Risost. il campo di sforzo:

$$= (G\beta)^2 \int_A (\psi_{,x}^2 + y^2 - 2\psi_{,x}y + \psi_{,y}^2 + x^2 + 2\psi_{,y}x) dA$$

- Si ottiene:

$$J = \underbrace{J_G}_{\text{green}} - \int_A (\psi_{,x}y - \psi_{,y}x) dA + \int_A (\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2 - \psi_{,x}y + \psi_{,y}x) dA$$

quindi: $J = J_G - J^*$ e $J \leq J_G$

Inoltre:

$$J^* = \int_A \left[\psi_{,x} \left(\psi_{,x} - \frac{\tau_{zx}}{G\beta} \right) - \psi_{,y} \left(-\psi_{,y} + \frac{\tau_{zy}}{G\beta} \right) \right] dA$$

$$= \int_A (\psi_{,x}^2 + \psi_{,y}^2) dA - \underbrace{\int_A \frac{\tau_{zx}\psi_{,x} + \tau_{zy}\psi_{,y}}{G\beta} dA}_0$$

0 (v. sopra)

$$\int_A \left[\underbrace{\psi_{,x} \left(\psi_{,x} - \frac{\tau_{zx}}{G\beta} \right)}_{\frac{\tau_{zx}}{G\beta}} + \underbrace{\psi_{,y} \left(\psi_{,y} + \frac{\tau_{zy}}{G\beta} \right)}_{\frac{\tau_{zy}}{G\beta}} \right] dA = 0 \text{ come dimostrato sopra}$$