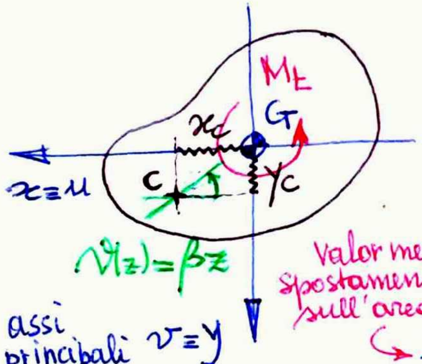
 – Centro di torsione – egidio.rizzi@unibg.it

- Si è ipotizzato sinora che la sezione ruoti rispetto al baricentro G, con ingobbamento fuori piano descritto dalla funzione $\psi_G(x,y)$
- Più in generale si considera ora la rotazione della sezione, nel suo piano, rispetto ad un punto C, detto centro di torsione, tale per cui le rotazioni medie fuori piano della sezione associate ad una funzione di ingobbamento $\psi_C(x,y)$ ad esso riferita risultino nulle –



– Campo di spostamenti riferito a C (rotazione βz rispetto a C)

$$\begin{cases} s_x = -\beta z(y-y_c) \\ s_y = \beta z(x-x_c) \\ s_z = \beta \psi_c(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = G\beta(\psi_{c,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta(\psi_{c,y} + x - x_c) \end{cases} \Rightarrow \nabla^2 \psi_c = 0 \text{ non cambia}$$

Campo di sforzo τ_z

Dall'eq.ne di equilibrio: $\nabla^2\psi_c = 0$ non cambia — eq.ne di Laplace per ψ_c in A

$\uparrow$ f.ne di ingobbamento riferita a C con:

Valor medio dello spostamento fuori piano sull'area A

$$\bar{s}_z = \frac{1}{A}\int_A s_z \, dA = \frac{\beta}{A}\int_A \psi_c \, dA = \beta \bar{\psi}_c = 0$$

Valor medio di ψ_c su A

$$\bar{\psi}_c = \frac{1}{A}\int_A \psi_c(x,y)\, dA = 0$$

Moto medio fuori piano nullo per la sezione $\Rightarrow$ pone a zero lo spostam. rigido nella direzione dell'asse z.

Idem per ψ_G, solitamente si assume $\int_A \psi_G(x,y)\, dA = 0$

– Condizione al contorno:

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = G\beta(\psi_{c,x} n_x - y n_x + y_c n_x + \psi_{c,y} n_y + x n_y - x_c n_y) = 0$$

$$\psi_{c,n} + y_c n_x - x_c n_y = n_x y - n_y x \quad \text{su } \Gamma$$

$$(\psi_c + y_c x - x_c y)_{,n} = n_x y - n_y x \quad \text{su } \Gamma$$

$n_x = \frac{dx}{dn}, \; n_y = \frac{dy}{dn}$

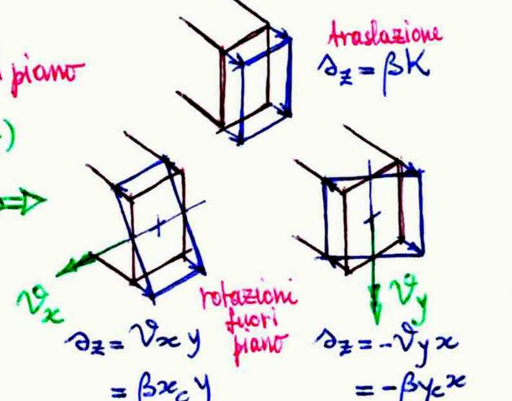
$$\psi^* = \psi_c + y_c x - x_c y \quad \text{con } \psi^*_{,n} = n_x y - n_y x \text{ su } \Gamma \Rightarrow \psi^* = \psi_G + K$$

(se $\nabla^2\psi_c = 0$, anche $\nabla^2\psi^* = 0$) ψ^* differisce da ψ_c per un termine lineare in x, y

stessa c.c. di N.-D. che per ψ_G (con stessa eq.ne di Laplace) $\rightarrow$ ψ^* e ψ_G differiscono al più per una costante

ψ_c e ψ_G differiscono per un moto rigido fuori piano

$$\boxed{\psi_c(x,y) = \psi_G(x,y) + \underbrace{K - y_c x + x_c y}_{\text{componente di moto rigido fuori piano della sez.}}} \quad (*)$$



– Si definisce centro di torsione il punto C tale per cui le rotazioni medie sotto definite si annullano:

$$\begin{cases} \bar{\vartheta}_x = \frac{1}{J_x}\int_A \frac{s_z}{y} y^2 \, dA = \frac{1}{J_x}\int_A \frac{s_z}{y}\, dJ_x = 0 \\ \bar{\vartheta}_y = -\frac{1}{J_y}\int_A \frac{s_z}{x} x^2 \, dA = -\frac{1}{J_y}\int_A \frac{s_z}{x}\, dJ_y = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\int_A \psi_c \, dA = 0, \; \int_A \psi_c x \, dA = 0, \; \int_A \psi_c y \, dA = 0} \rightarrow \begin{cases} x_c = -\frac{1}{J_x}\int_A \psi_G y \, dA \\ y_c = \frac{1}{J_y}\int_A \psi_G x \, dA \end{cases}$$

$\downarrow K=0 \quad \downarrow y_c \quad \downarrow x_c$

Coordinate del centro di torsione (note una volta nota ψ_G) – In pratica si determ. la sola ψ_G – Note x_c, y_c, ψ_c può essere det. con la (*)

N.B.:
- se ∃ asse di simm., $C \in$ a tale asse
- se sezione doppiam. simmetrica, $C \equiv G$

- Rotazioni medie valutate dal campo s_z tramite il PLV $\longrightarrow$ (v. ad es. calcolo di rotaz. nei sistemi di travi)

$$M_x \cdot \bar{\vartheta}_x = \int_A \underbrace{\sigma_{zz}}_{\text{da } M_x} dA \cdot s_z = \int_A \frac{M_x}{J_x} y\, s_z \, dA = \frac{1}{J_x}\int_A s_z y \, dA$$

$$M_y \cdot \bar{\vartheta}_y = \int_A \underbrace{\sigma_{zz}}_{\text{da } M_y} dA \cdot \underbrace{s_z}_{\text{da tors.}} = \int_A -\frac{M_y}{J_y} x\, s_z \, dA = -\frac{1}{J_y}\int_A s_z x \, dA$$

• **Torsione** – Approccio agli sforzi (pago a priori l'equilibrio, impongo la congruenza)

ERizzi@UniBG.it

- Hp. $\exists$ f.ne $\varphi=\varphi(x,y)$ funzione potenziale di sforzo o funzione di AIRY (definita a meno di una costante):

$$\tau_{zx}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi_{,y}\ ;\quad \tau_{zy}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\varphi_{,x}$$ (le derivate della funzione φ forniscono le tensioni tangenziali).

- Con tali posizioni l'eq.ne di equilibrio risulta identicamente soddisfatta. Infatti:

$$\tau_{zx,x}+\tau_{zy,y}=\varphi_{,yx}+(-\varphi_{,xy})\equiv 0 \quad \checkmark \text{ OK}$$
$\llcorner$ Th. di Schwarz

- Eq.ne di congruenza:

$$\tau_{zx,y}-\tau_{zy,x}=-c \;\rightarrow\; \varphi_{,yy}+\varphi_{,xx}=-c \;\rightarrow\; \boxed{\overset{\text{laplaciano}}{\nabla^2}\varphi(x,y)=-c} \text{ in } A.$$ Eq.ne di Poisson (con termine noto costante)

- Condizione al contorno su Γ:

$$\tau_{zx}n_x+\tau_{zy}n_y=0 \;\rightarrow\; \varphi_{,y}n_x-\varphi_{,x}n_y=\varphi_{,x}t_x+\varphi_{,y}t_y=\overset{\text{derivata di }\varphi\text{ lungo }\Gamma}{\varphi_{,t}\overset{!}{=}\varphi_{,s}}=0 \;\rightarrow\; \boxed{\varphi=\text{cost}\overset{\text{scelta conveniente}}{=}0} \text{ su } \Gamma$$
c.c. di Dirichlet (valore assegnato della f.ne incognita su Γ)

- Si ottiene quindi un pb. di Dirichlet per l'eq.ne di Poisson.

- Il legame $c \leftrightarrow M_t$ si evince dall'equivalenza statica:

$$M_t=\int_A(\tau_{zy}x-\tau_{zx}y)\,dA=\int_A(-\varphi_{,x}\cdot x-\varphi_{,y}\cdot y)\,dA=-\int_A\left[(\varphi\cdot x)_{,x}+(\varphi\cdot y)_{,y}\right]dA+2\int_A\varphi\,dA\overset{\text{Th. Div.}}{=}-\int_\Gamma \cancel{\overset{0 \text{ da c.c.}}{\varphi}(x n_x+y n_y)\,d\Gamma}^{\,0}+\boxed{2\int_A\varphi\,dA=M_t}$$

• **SINOSSI – TORSIONE**

(formulazione di approcci risolutivi al caso di DSV della torsione)

Approccio agli spostamenti (cinematico)	Approccio agli sforzi (statico)
incognite $\psi_G(x,y)$; β	incognite $\varphi(x,y)$; c
Pb. di N.-D. per l'eq.ne di L. $\begin{cases}\nabla^2\psi_G=0 \text{ in } A\\ \psi_{G,n}=\underbrace{n_x y-n_y x}_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}} \text{ su } \Gamma\end{cases}$	Pb. di D. per l'eq.ne di P. $\begin{cases}\nabla^2\varphi=-c \text{ in } A\\ \varphi=0 \text{ su } \Gamma\end{cases}$
relaz. $\beta=\frac{M_t}{GJ}$; $J=J(\psi_G)=\frac{J_G}{\eta}$, $\eta\geq 1$	relaz. $M_t=2\int_A\varphi\,dA$

Relazioni mutue
$c=2G\beta$

$$\begin{cases}\varphi_{,y}=G\beta\,(\psi_{G,x}-y)=\tau_{zx}\\ -\varphi_{,x}=G\beta\,(\psi_{G,y}+x)=\tau_{zy}\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\psi_{G,x}=\frac{1}{G\beta}\varphi_{,y}+y\\ \psi_{G,y}=-\frac{1}{G\beta}\varphi_{,x}-x\end{cases}$$

I due approcci, statico e cinematico devono condurre alla stessa soluzione (unica) del pb. di DSV (caso della torsione).

Ancora una volta si noti come, in SdC, siano possibili due approcci risolutivi complementari, l'uno cinematico, l'altro statico, tali da fornire la stessa soluzione.

• **Soluzione**

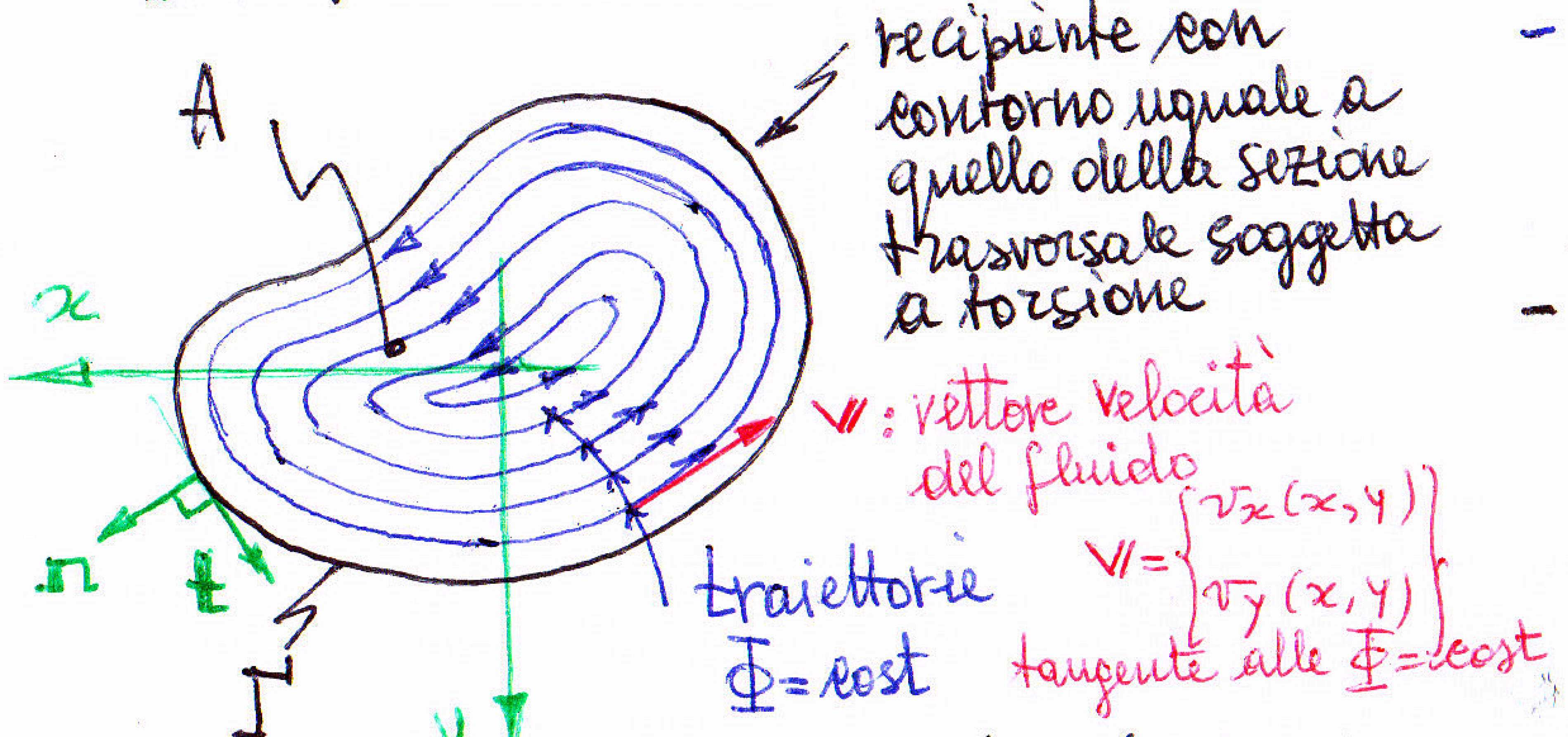
- Analitica esatta: possibile solo in casi particolari (es. sezione ellittica).
- Analitica approssimata:
  - per sviluppi in serie troncati (es. sez. rettangolare)
  - in forma chiusa (es. profili sottili)
- Numerica:
  - Finite Differences (FD) → metodo delle differenze finite (v. Calcolo Numerico)
  - Finite Element Method (FEM) → metodo degli elementi finiti (v. Meccanica Computazionale dei Solidi e delle Strutture)

20a Lez. CdSdC – Analogie fisiche (del pb. della torsione con altri fenomeni fisici retti da eq.ni governanti simili)

- Il pb. della torsione, come precedentemente formulato, presenta analogia formale con altri fenomeni fisici molto studiati.
- Tale analogia risulta utile a vari scopi, ad es.:
  - utilizzare le soluzioni, se presenti, del pb. analogo, tramite reinterpretazione delle variabili in gioco.
  - visualizzare ed interpretare le caratteristiche della risposta.
  - realizzare degli esperimenti utili a descrivere e quantificare la risposta torsionale.

egidio.rizzi@unibg.it

• **Analogia idrodinamica** (Lord Kelvin, 1869)



$v = \begin{Bmatrix} v_x(x,y) \\ v_y(x,y) \end{Bmatrix}$

- Moto piano di un fluido perfetto (non viscoso) incomprimibile ($K \to \infty$) all'interno di un recipiente rigido avente contorno uguale a quello della sezione del prisma di DSV soggetto a torsione, con vorticità (velocità angolare) costante.
- Eq.ni governanti analoghe a quelle della torsione:
  - Eq.ne di continuità (eq.ne scalare): $\cancel{\frac{d\rho}{dt}}^{0} + \rho \, \mathrm{div}\, v = 0$ (ρ: densità costante, poiché incompr.)

$v_{i,i} = \boxed{v_{x,x} + v_{y,y} = 0} \Leftrightarrow \Rightarrow \nabla \cdot v = \boxed{\mathrm{div}\, v = 0} \Rightarrow v$ campo di velocità solenoidale in A

  - Vorticità costante:

$2\omega = \boxed{\mathrm{rot}\, v = \nabla \wedge v = \mathrm{cost}}$ in A

$\nabla \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = i(\cancel{v_{z,y}} - \cancel{v_{y,z}}) + j(\cancel{v_{x,z}} - \cancel{v_{z,x}}) + k(v_{y,x} - v_{x,y})$

f.ni di x e y (no z); qui 0 (moto piano); ⊥ al piano (x, y)

$\Downarrow$

$2\omega_z k = (v_{y,x} - v_{x,y}) k = \mathrm{cost} = c\, k$

$\Downarrow$

$2\omega_z = (\mathrm{rot}\, v)_z = v_{y,x} - v_{x,y} = c$

$\boxed{v_{x,y} - v_{y,x} = -c} \Leftrightarrow$

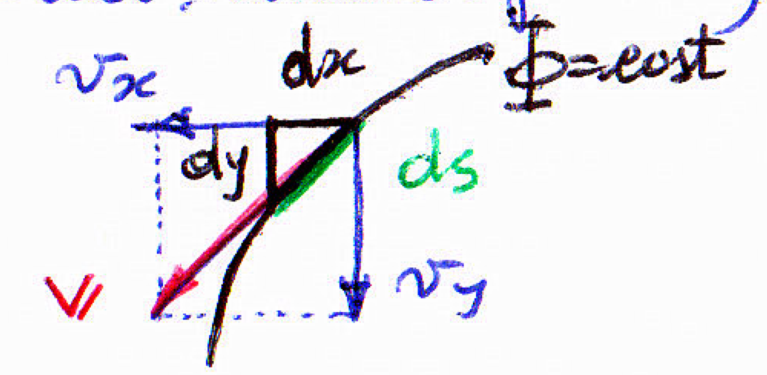
- condizioni al contorno: $v \perp n$ (il fluido non può uscire dal serbatoio)

$v \cdot n = v_x n_x + v_y n_y = 0$ su Γ

- Si evince pertanto analogia formale tra:
  - $\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow v = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$, cioè $\begin{cases} \tau_{zx} \Leftrightarrow v_x \\ \tau_{zy} \Leftrightarrow v_y \end{cases}$ Il vettore velocità rappresenta il campo delle tensioni tangenz.
  - $\varphi = \varphi(x,y) \Leftrightarrow \Phi = \Phi(x,y)$ f.ne di flusso ("stream function"): $\begin{cases} v_x = \Phi_{,y} \\ v_y = -\Phi_{,x} \end{cases}$ ($\Phi = \mathrm{cost}$: linee di flusso)

f.ne di sforzo (AIRY)

La f.ne di flusso è utile a rappresentare la f.ne di sforzo, con $\varphi = \mathrm{cost}$, linee tangenti al vettore τ_z (curve di livello di φ)



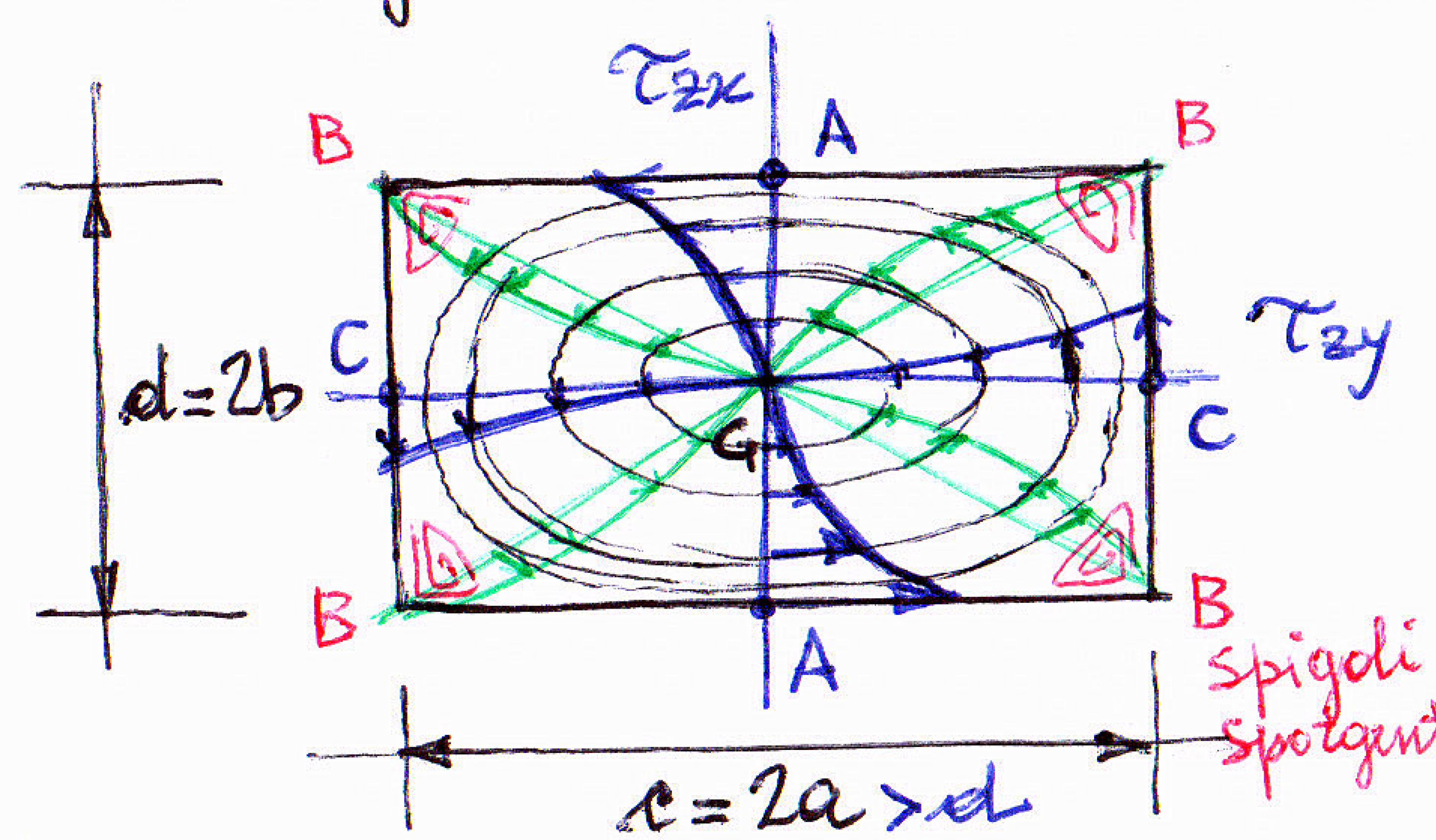
• su $\Phi = \mathrm{cost}$

$d\Phi = \Phi_{,x}\, dx + \Phi_{,y}\, dy = 0$

$= -v_y\, dx + v_x\, dy = 0$

$\Rightarrow \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx} \to v$ tg. a $\Phi = \mathrm{cost}$

- L'analogia è utile a visualizzare il campo di sforzo (es.: sezione rettangolare):



- A: τ^{max} nei p.ti medi dei lati maggiori (nonostante $\overline{GA} < \overline{GC}$)
- C: $\tau < \tau^{max}$ (pensare all'analogia con la portata $Q = VA = \mathrm{cost} \Rightarrow$ fluido più veloce ove la sezione di passaggio si restringe)
- spigoli sporgenti – B: $\tau \simeq 0$ ($v \simeq 0$: zone di ristagno di fluido) (Sorprendentemente $\tau \simeq 0$ nei p.ti più lontani da G)

- Da soluzione con sviluppo in serie (troncato ⇒ approx)

$\tau^{max} = k \frac{M_t}{c\, d^2}$

$c > d$

mom. d'inerzia torsionale $J = \alpha\, c\, d^3$

con coeff. k, α tabellati

c/d	k	α
1	4.80	0.141
2	4.06	0.229
5	3.44	0.291
∞	3.00	0.333 = 1/3

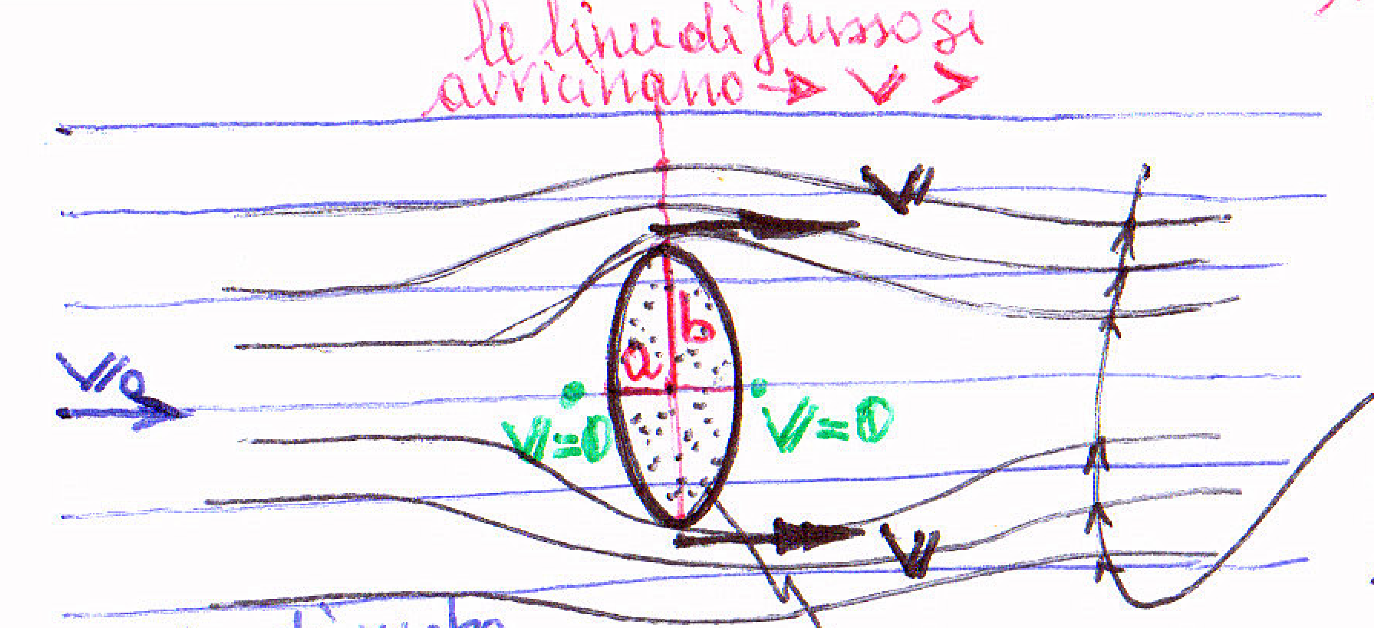
[sez. rettangolare sottile]

Concentrazione di tensioni

fattore di amplificazione della velocità

$V = \left(1+\frac{b}{a}\right) V_0$

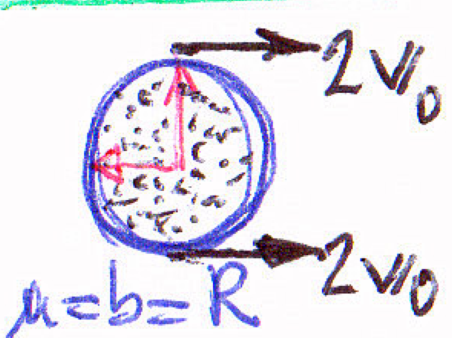
$\Rightarrow$ per $\frac{b}{a} \to \infty$, $\frac{a}{b} \to 0 \Rightarrow V \to \infty$



linee di flusso alterate dall'ostacolo

campo di moto uniforme, perturbato da ostacolo ellittico ~~in esso~~ inserito (semiassi a, b)

ostacolo es. circolare

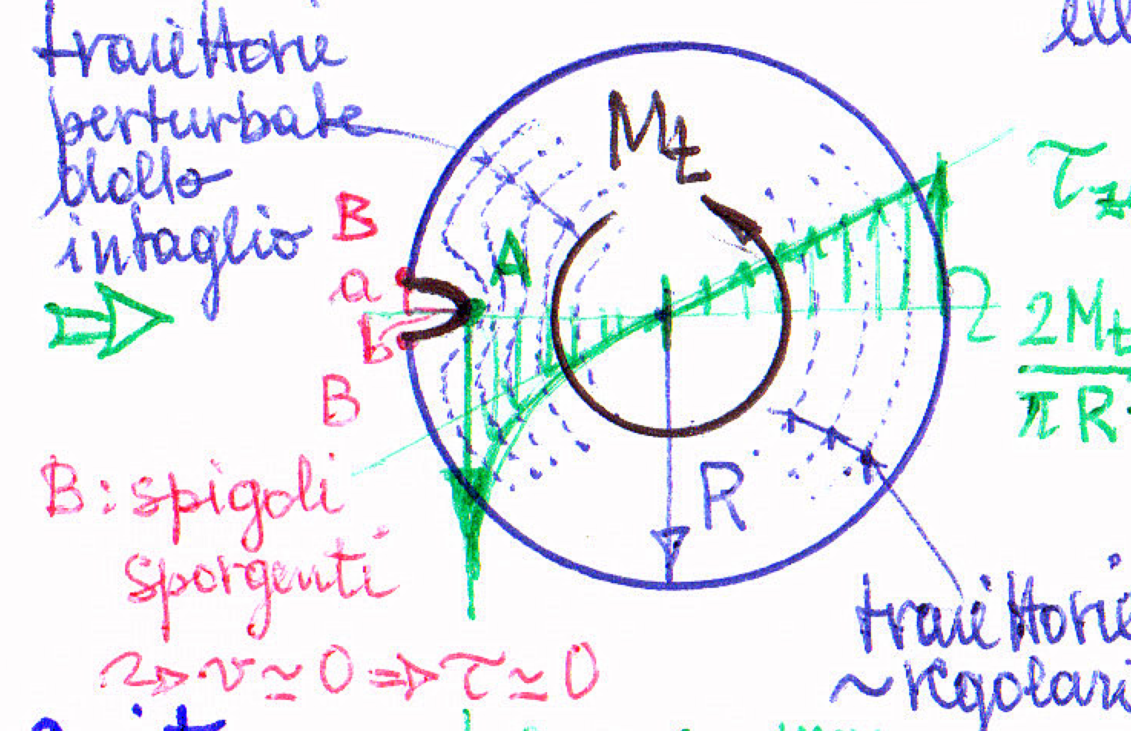


ostacolo con bordo tendente a rappresentare uno spigolo vivo.

erizzi@unibg.it

Sezione circolare soggetta a torsione con intaglio ellittico (es. accidentale)

$a, b \ll R$



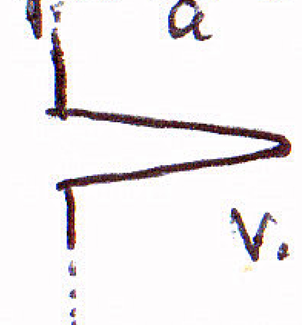
A: spigoli rientranti. Incremento di v. $\Rightarrow$ Concentrazione di tensioni

$\frac{2M_t}{\pi R^3} = \tau_{zt}^{max}$

B: spigoli sporgenti $\Rightarrow v \simeq 0 \Rightarrow \tau \simeq 0$

$\sim \left(1+\frac{b}{a}\right)\tau_{zt}^{max}$ es $b=a=r \ll R \to 2\tau_{zt}^{max}$

fattore di concentrazione delle tensioni; per $\frac{b}{a} \to \infty$, $\frac{a}{b} \to 0 \Rightarrow \tau \to \infty$ secondo la teoria della elasticità.



"sharp notch".

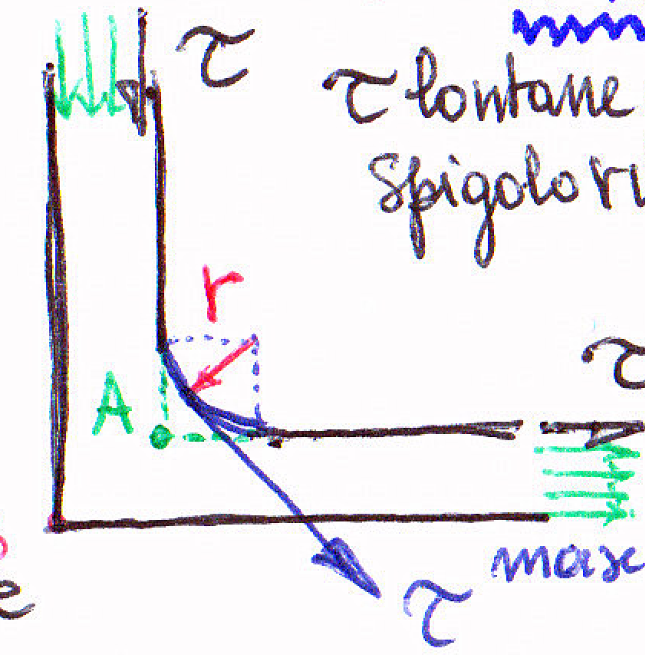
v. MECCANICA DELLA FRATTURA

Formula di TREFFTZ (1922) – Sperimentale

Concentrazione di tensione in spigolo smussato con raccordo circolare di raggio $r \Rightarrow$ es. profilo sottile soggetto a torsione (o a taglio)

smussare gli spigoli rientranti!

$\Rightarrow$ possibili condizioni di innesco di cricche e fratture

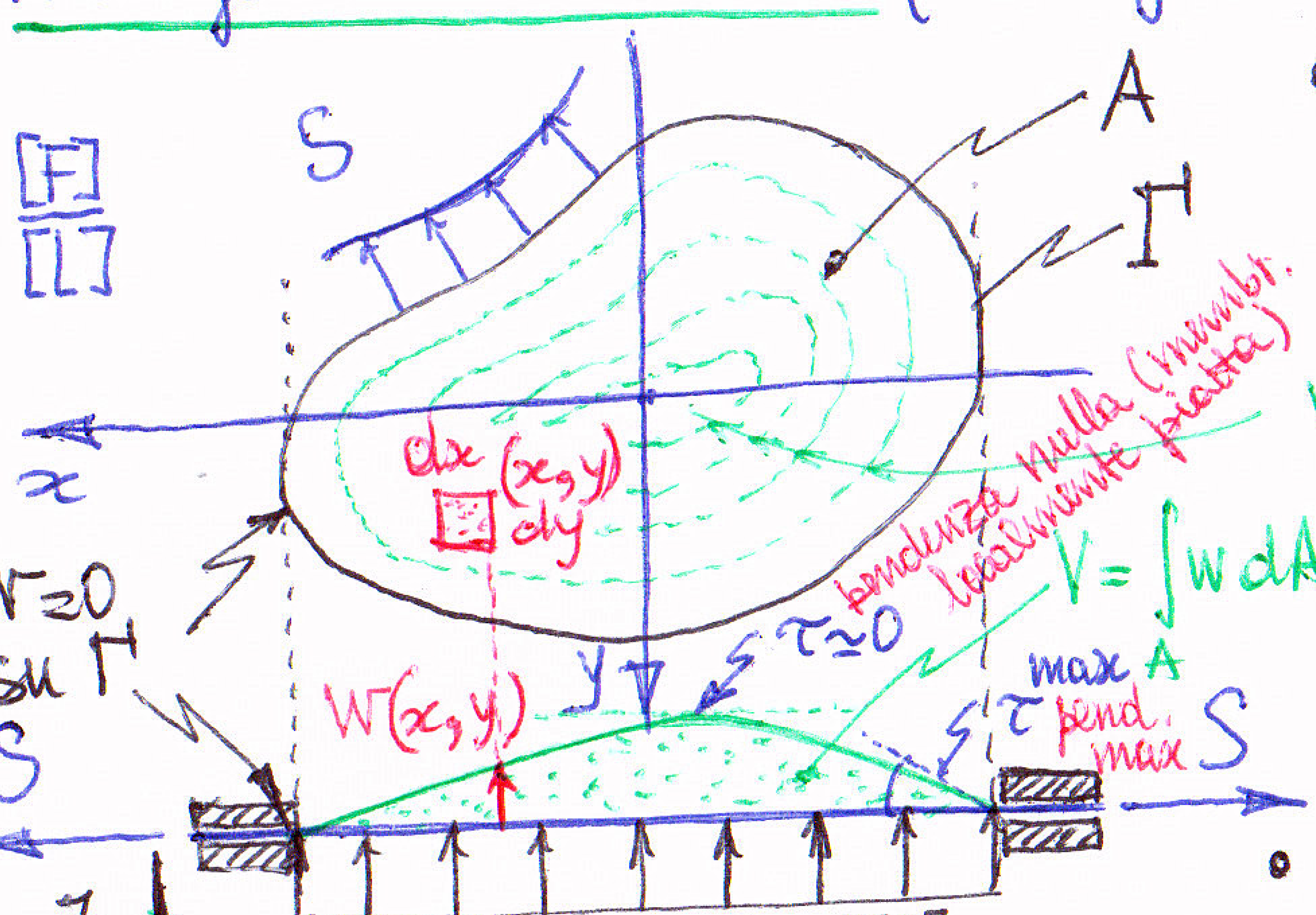


$\frac{\tau^{max}}{\tau} = 1.74 \sqrt[3]{\frac{t}{r}}$

se $\frac{r}{t} \to 0$, $\frac{\tau^{max}}{\tau} \to \infty$

◦ Analogia della MEMBRANA (Ludwig PRANDTL ~ 1903)

(es. pellicola trasparente per alimenti; bolle di sapone) PRANDTL $\to$ esperimenti con bolle di sapone e misure di w.



$w = cost$ curve di livello della membrana

$V = \int w\,dA$ volume sotteso dalla membrana $\Rightarrow$ fornisce stima del momento torcente sopportabile dalla sezione corrispondente

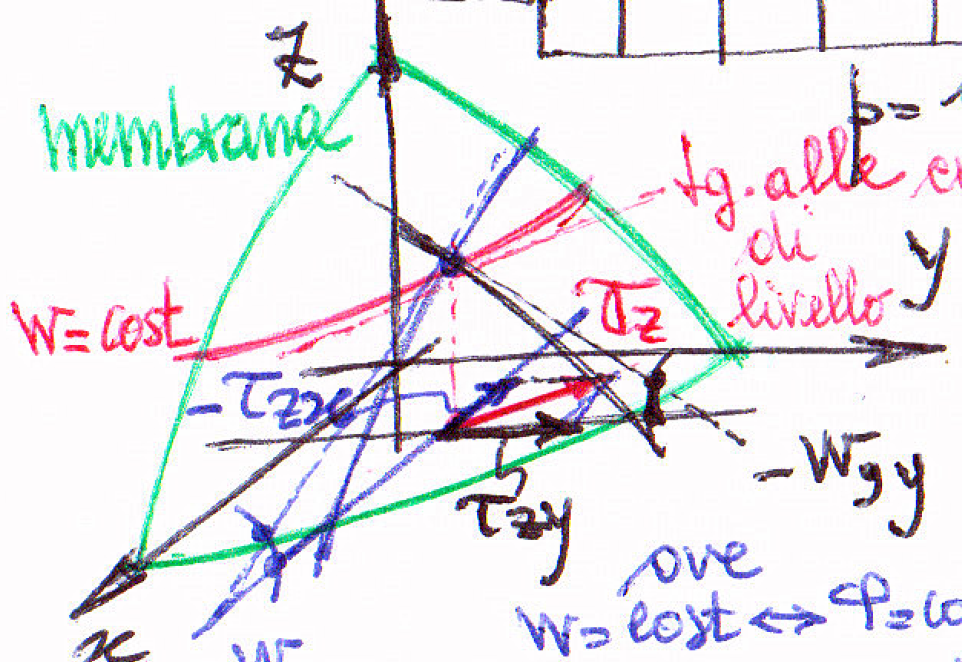
- Si consideri una membrana sottile tesa (con trazione per unità di lunghezza costante S) appoggiata su di un analogo contorno Γ (lo stesso di quello della sezione trasversale soggetta a torsione), soggetta a pressione uniforme p. $\to$ Consente di visualizzare la fine di sforzo di Airy
- La membrana subisce uno spostamento fuori piano $w(x,y)$ dipendente da p e S, secondo l'eq. ne indefinite di equil. alla traslazione nelle direzione z:

$$\boxed{\nabla^2 w(x,y) = -\frac{p}{S} \text{ in } A \qquad \text{c.c. } w(x,y)=0 \text{ su } \Gamma}$$

membrana appoggiata sul bordo $\Rightarrow$ con

è pb. di Dirichlet per l'eq. ne di Poisson (con termine noto costante).

- Infatti, supponendo per un istante la membrana cilindrica in direzione y (curvatura solo in x, vista lungo x in sezione ad $y = cost$):



ove $w = cost \Leftrightarrow \varphi = cost$

$d\varphi = \varphi_{,x}dx + \varphi_{,y}dy = 0$

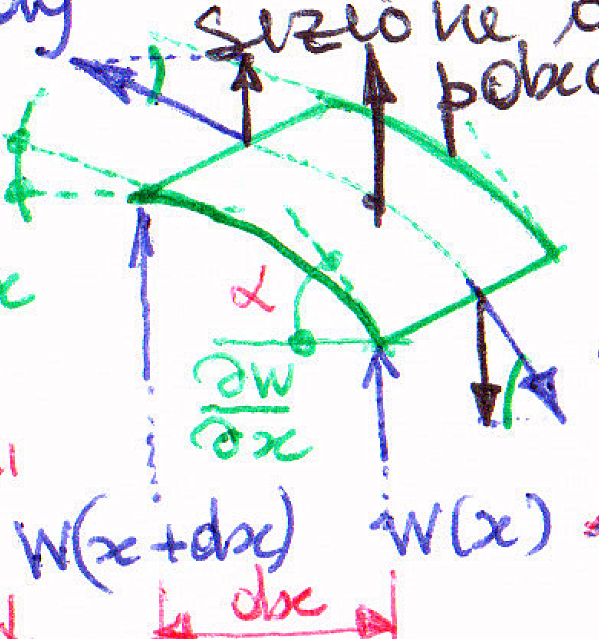
$-\tau_{zy}dx + \tau_{zx}dy = 0$

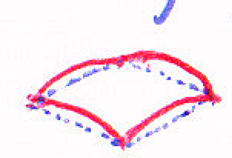
$\frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \tau_z$ tangente alle curve di livello

$\frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right) = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$

$|\alpha| \ll 1$ $w_{,i}$ "piccoli gradienti"

$\alpha \simeq \sin\alpha \simeq \tan\alpha$





$dR_v = S\,dy\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right) - \cancel{S\,dy\frac{\partial w}{\partial x}} + p\,dx\,dy$

risult. vert.

$= S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx\,dy + p\,dx\,dy$

Equil. con curvatura anche in y:

$S\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cancel{dx\,dy} + p\,\cancel{dx\,dy} = 0$

$$\boxed{\nabla^2 w = w_{,xx} + w_{,yy} = -\frac{p}{S}}$$

$\frac{wS}{p} = \frac{\varphi}{c}$ $\boxed{\varphi = \frac{cS}{p}w}$

Pb. del tutto analogo a quello formulato per la funzione di Airy $\varphi(x,y)$:

ANALOGIA: $\varphi \leftrightarrow w$

$\nabla^2\varphi(x,y) = -c$ in A

$\underbrace{\varphi_{,y}}_{\tau_{zx}}; \underbrace{-\varphi_{,x}}_{\tau_{zy}} \leftrightarrow \underbrace{w_{,y}; -w_{,x}}_{\text{pendenze della membrana}}$

c.c. $\varphi(x,y) = 0$ su Γ

$2\int_A \varphi\,dA = M_t \leftrightarrow V = \int_A w\,dA \to \boxed{M_t = \frac{2cS}{p}V}$