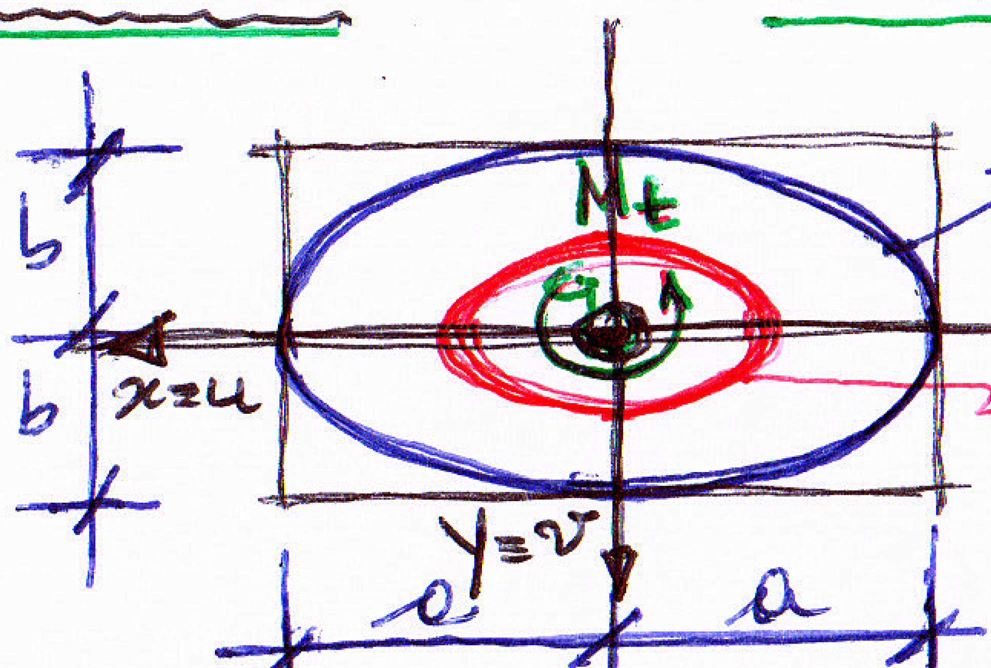
21ª Lez. CdScdC — Soluzioni analitiche del pb. della torsione — egidio.rizzi@unibg.it

Sezione ellittica soggetta a momento torcente M_t



Γ: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ eq.ne del contorno della sezione

ellisse centrale d'inerzia della sezione (semiassi $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$)

Caratt. geometriche (della sezione ellittica di semiassi a, b)

(Sez. circolare $a=b=R$: $A=\pi R^2$; $J_x=J_y=\frac{\pi}{4}R^2$; $J_G=\frac{\pi}{2}R^2$)

- $A=\int_A dA=\pi ab$ area
- $J_x=\int_A y^2 dA=\frac{\pi}{4}ab^3=A\left(\frac{b}{2}\right)^2$, $r_x=\frac{b}{2}$
- $J_y=\int_A x^2 dA=\frac{\pi}{4}a^3b=A\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $r_y=\frac{a}{2}$ raggio giratore d'inerzia

momenti principali d'inerzia

momento d'inerzia polare rispetto a G

- $J_G=J_x+J_y=\int_A r^2 dA=\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)=A\,r_G^2$, $\frac{a^2+b^2}{4}=r_G^2$

- **Funzione potenziale di sforzo** (tale che $\varphi=0$ su Γ):

f.ne di AIRY $\varphi=K\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$, $K=$ cost da porre in relazione ad M_t.

$\downarrow\ \nabla^2\varphi=-2K\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=-2K\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=-c$ ok $\rightarrow K=\frac{c}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=G\beta\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{M_t}{J}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

eq.ne di Poisson verificata ✓

$c=2G\beta$; $\frac{c}{2}=G\beta=\frac{M_t}{J}$

angolo unitario di torsione $\beta=\frac{M_t}{GJ}$ rigidezza torsionale

$J=\frac{J_G}{\eta}$; $\eta=\frac{J_G}{J}$ fattore η di torsione

- **Equivalenza statica**

$M_t=2\int_A\varphi\,dA=2K\left(A-\frac{J_y}{a^2}-\frac{J_x}{b^2}\right)=2KA\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=KA=K\pi ab\rightarrow K=\frac{M_t}{A}=\frac{M_t}{\pi ab}$

momento d'inerzia torsionale $\boxed{J=\pi\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}}=A\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (*) $-2ab+2ab$

da (*) $\eta=\left(1+\frac{(a-b)^2}{2ab}\right)$ quindi ≥ 1 compattezza

$\eta=\frac{J_G}{J}=\frac{a^2+b^2}{4}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}=\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2\geq 1$ per sez. circolare $a=b=R\rightarrow\eta=1$

- **Espressione alternativa di J**:

$J=\frac{\pi}{4}\frac{a^3b^3}{\frac{a^2+b^2}{4}}\frac{\pi ab}{\pi ab}\frac{\pi^2}{\pi^2}=\boxed{\frac{A^4}{4\pi^2J_G}=J}$

DSV ha mostrato che J di sez. generica può essere stimato attraverso questa formula, come mezzo di sez. ellittica equivalente di pari A e J_G. Ancora meglio secondo l'approx. $\pi^2\simeq 10$ $J=\frac{A^4}{40J_G}$

- **Finale**:

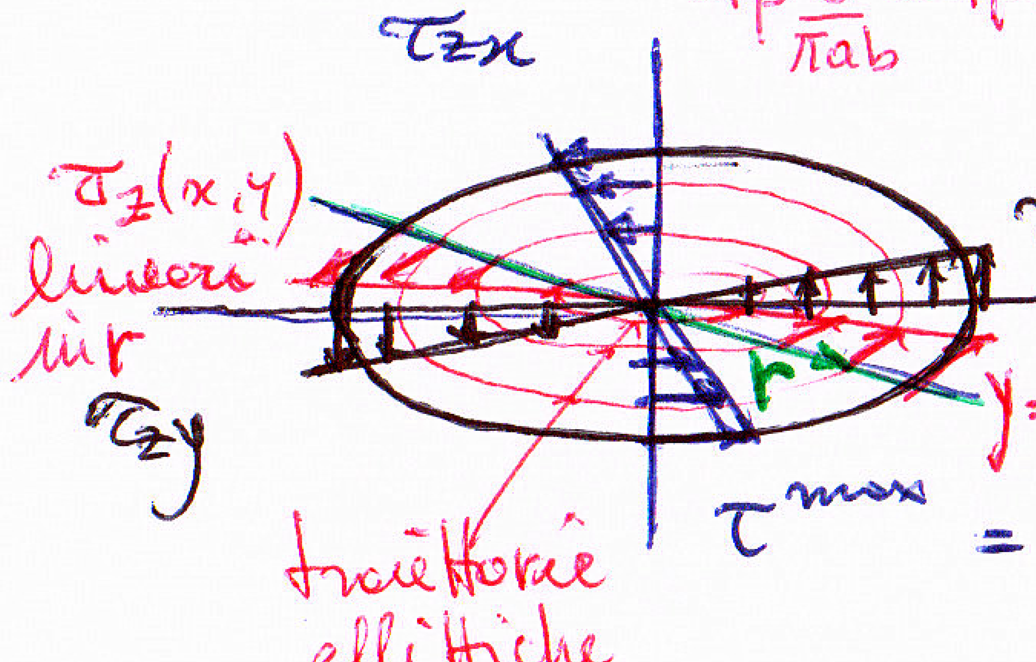
$\varphi=\frac{M_t}{\pi ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$, $G\beta\frac{J}{\pi ab}=G\beta\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

Campo delle tensioni tangenz.

$$\begin{cases}\tau_{zx}=\varphi_{,y}=-\frac{2M_t}{\pi ab^3}y\\ \tau_{zy}=-\varphi_{,x}=+\frac{2M_t}{\pi a^3b}x\end{cases}$$

$\Rightarrow\frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}}=-\frac{x}{a^2}\frac{b^2}{y}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{m}=$ cost lungo $y=mx$ $\Rightarrow\tau_z=\|\tau_z\|=\sqrt{\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2}=\frac{2M_t}{\pi ab}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}$

lineare in $r=\sqrt{x^2+y^2}$ coord. radiale lungo $y=mx$ diametro, $r^2=(1+m^2)x^2$



$\tau^{min}=\frac{2M_t}{\pi a^2b}=\frac{1}{a}\frac{2M_t}{\pi ab}$

$\tau^{max}=\frac{2M_t}{\pi ab^2}=\frac{1}{b}\frac{2M_t}{\pi ab}$

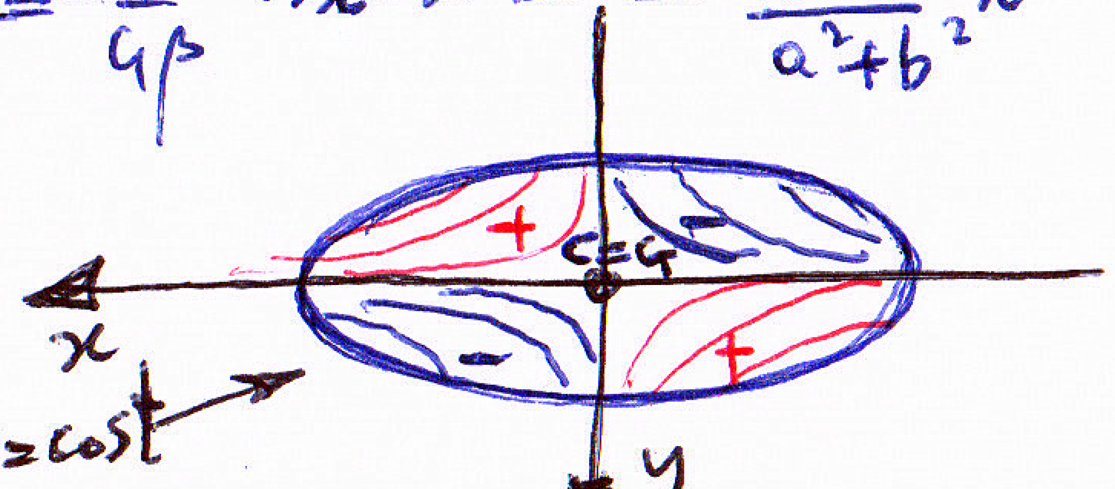
$\tau^{min}=\tau^{max}=\frac{2M_t}{\pi R^3}$ ← Per $a=b=R$ (caso particolare) $\Rightarrow$ sez. circolare!

- **Funzione di ingobbamento**:

$$\begin{cases}\psi_{G,x}=\frac{1}{G\beta}\varphi_{,y}+y=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}y\\ \psi_{G,y}=-\frac{1}{G\beta}\varphi_{,x}-x=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x\end{cases}$$

$d\psi_G=\psi_{G,x}dx+\psi_{G,y}dy=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\underbrace{(y\,dx+x\,dy)}_{d(xy)}$

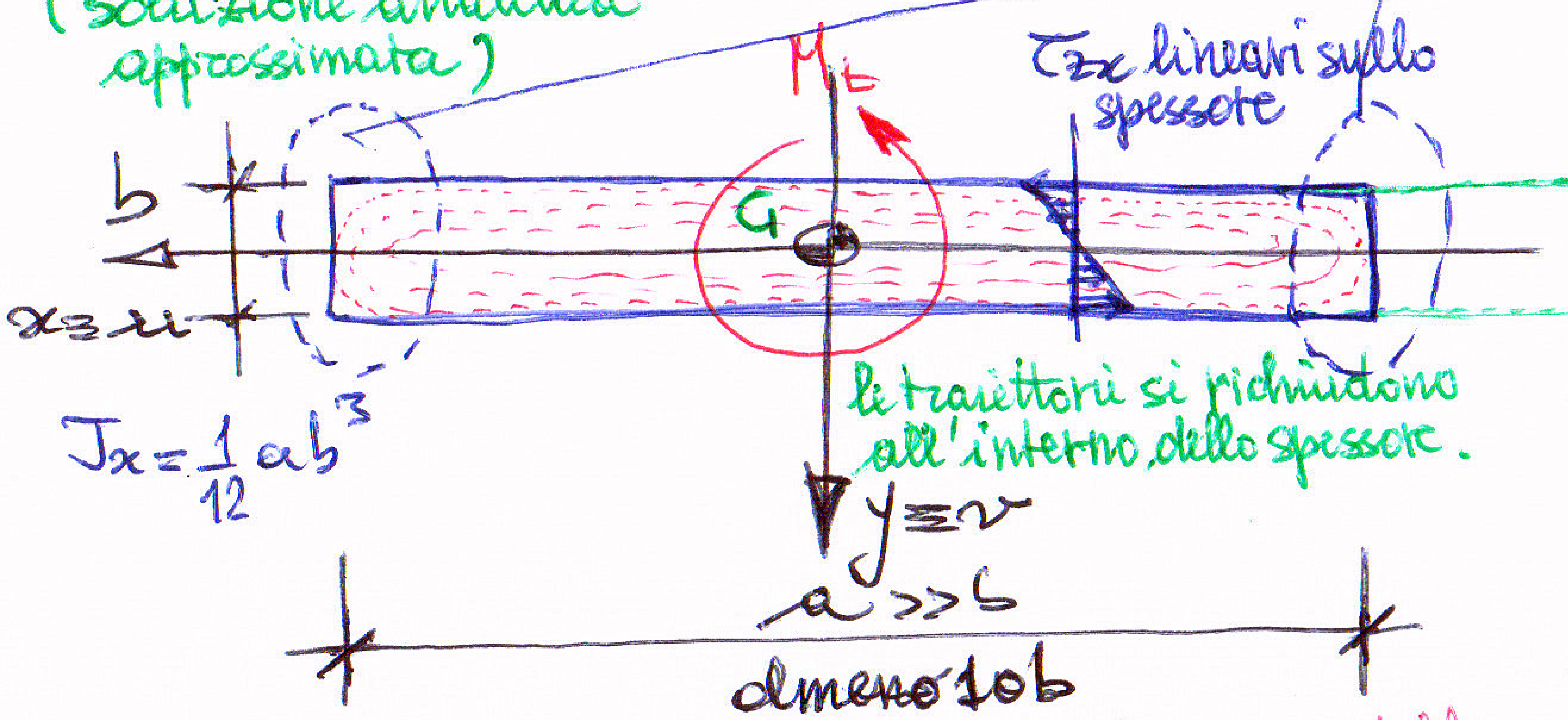
$\boxed{\psi_G=-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy}+\cancel{\text{cost}}$ (0) $\leftarrow\int_A\psi_G\,dA=0$ ingobb.to medio nullo della sezione



ingobb. descritto da paraboloide iperbolico

- Profili rettangolari sottili

(soluzione analitica approssimata)



$J_x = \frac{1}{12} a b^3$

- Soluz. approx. (in quasi tutta $A - A^*$)

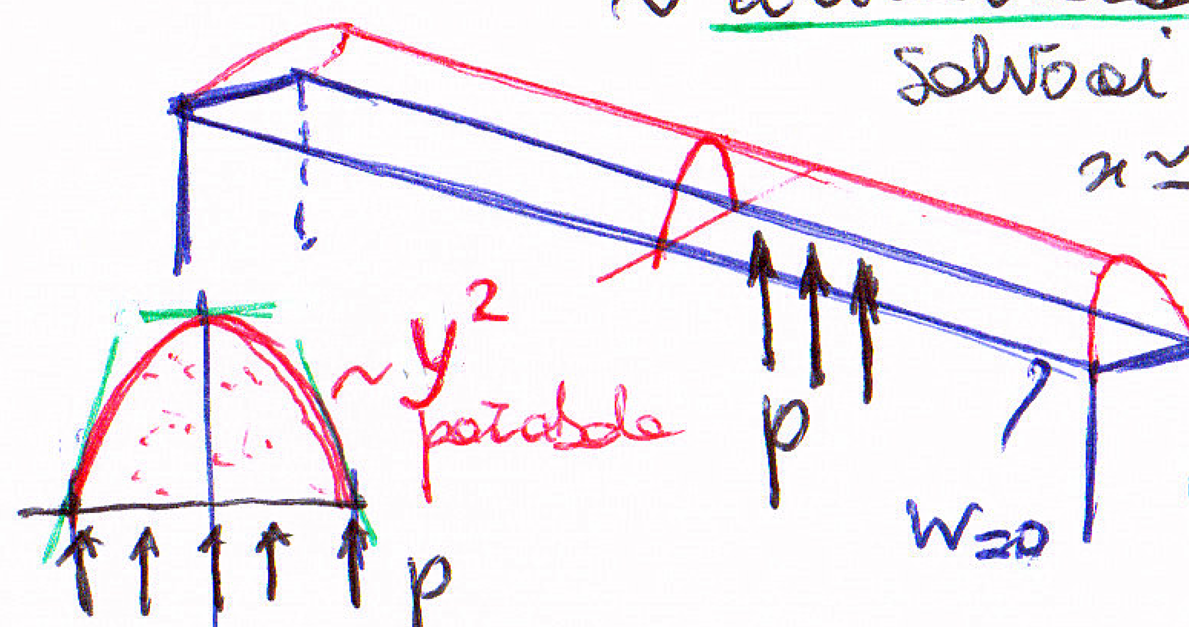
- Analogia idrodinamica:

$$\tau_{zx} = -c y \,, \quad \tau_{zy} = 0 \quad \text{in } A$$

- Analogia della membrana:

~ stesso profilo in y ∀x

membrana ~ cilindrica salvo ai bordi $x \simeq \pm a$



Equil. $\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0$ ✓

Congr. $\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c$ ✓

c.c. $\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ ✓ (lati lunghi)

- Funzione di sforzo:

dalle eq.ni delle rette $y + \frac{b}{2} = 0$, $y - \frac{b}{2} = 0$

$$\varphi = k \left(\frac{b}{2} + y\right)\left(\frac{b}{2} - y\right) = k \left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) \qquad k = \frac{M_t}{J}$$

tale da pagare automaticamente la c.c. di Dirichlet su quasi tutto il contorno Γ. ($\to \varphi \equiv 0$ su $\Gamma - \Gamma^*$)

$$\nabla^2 \varphi = -2k = -c \rightarrow k = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J} \Rightarrow \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -2ky = \boxed{-\frac{2M_t}{J} y = \tau_{zx}}$$

(con J ancora da det.)

momento d'inerzia torsionale

- Equiv. statica (tra il campo di sforzo conseguente a φ ed il momento torcente M_t applicato):

$$M_t = 2 \int_A \varphi \, dA = 2k \left(\frac{b^2}{4} ab - J_x\right) = 2k \left(\frac{ab^3}{4} - \frac{1}{12} ab^3\right) = 2k \frac{1}{6} ab^3 = k \frac{1}{3} ab^3 = G\beta J \Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{3} a b^3 = 4 J_x}$$

lato lungo $a > b$ lato corto (al cubo)

comunque piccolo

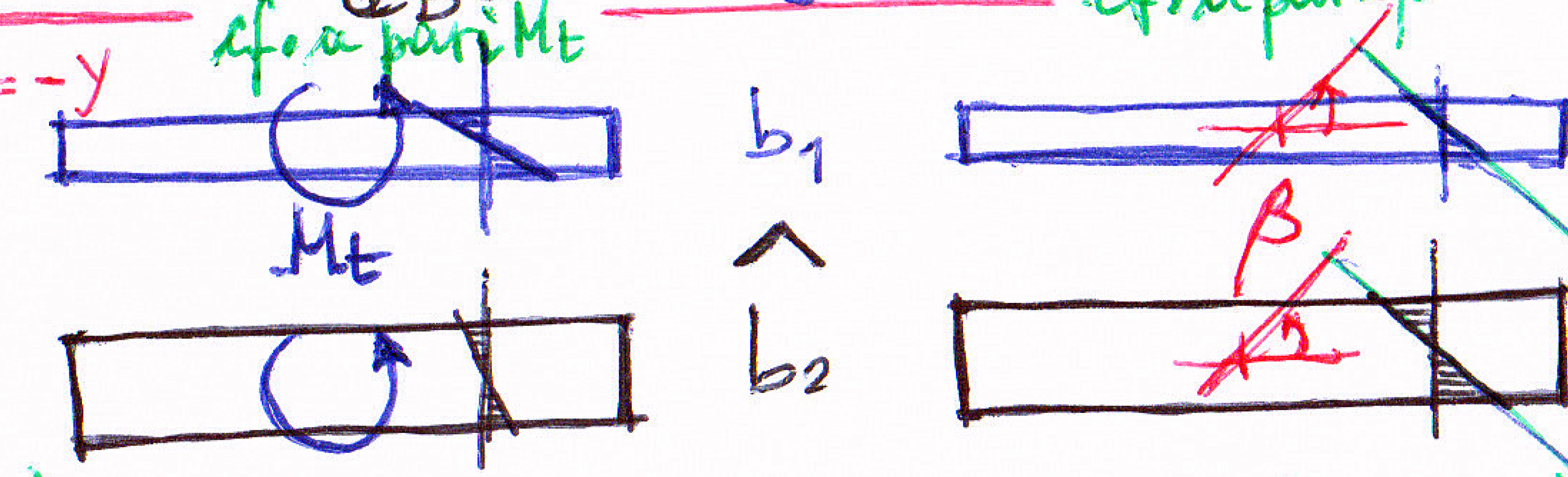
- Quindi, campo di sforzo finale:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\dfrac{2M_t}{\frac{1}{3} ab^3} y = -\dfrac{6M_t}{ab^3} y \\ \tau_{zy} = -\varphi_{,x} = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\tau_{zx}^{max} = \frac{3M_t}{ab^2} = \frac{M_t b}{J} = G\beta b}$$

f.a pari M_t f.a pari β

$$\begin{cases} \psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta} \varphi_{,y} + y = -\frac{1}{G\beta} 2G\beta y + y = -y \\ \psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta} \overset{0}{\varphi_{,x}} - x = -x \end{cases}$$

erizzi@unibg.it



profili di uguale a e spessore b_1, b_2 diff.te

$\tau_1 > \tau_2$ $\tau_2 > \tau_1$

stesse pendenze Gβ

- Funz.ne di ingobbamento $\psi_G(x,y)$

$$2 \rightarrow d\psi_G = \psi_{G,x} dx + \psi_{G,y} dy = -y\,dx - x\,dy = -d(xy)$$

ingobbamento ritenuto praticam. nullo nei profili rettangolari sottili

$$\psi_G = -xy + \overset{\to 0}{cost} \quad \text{nullo su } y = 0 \rightarrow \text{trascurabile}$$

$$= \lim_{\frac{b}{a} \to 0} \psi_G^{ell} \text{ (sezione ellittica)}$$

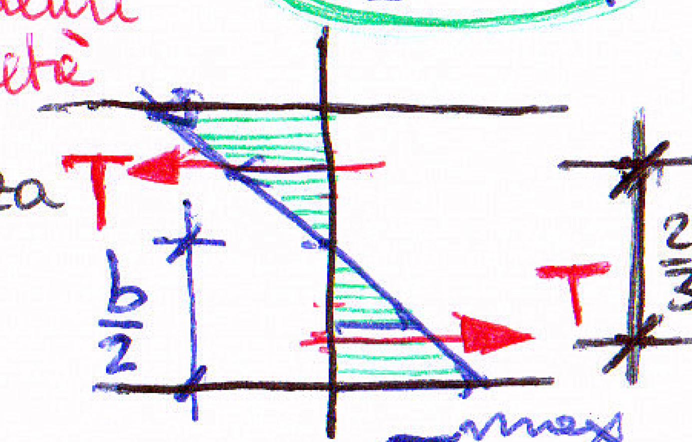
N.B. $\displaystyle \int_A -\tau_{zx} y \, dA = \frac{M_t}{2} = \frac{2M_t}{J} J_x = \frac{2M_t \cancel{J_x}}{4 \cancel{J_x}}$

τ_{zx} trovate equivalenti a solo metà di M_t

A* piccola ma bracci grandi

τ_z in A^* sono equiv. a $M_t/2$ (braccio ~ a), dell'ordine di grandezza di τ_{zx} (V. Corradi → τ_{zt} lineari in r)

τ_z^* equivalenti all'altra metà di M_t



Noto che $\tau_{zx} \xleftrightarrow{equiv} M_t/2$, la τ^{max} è presto determinata:

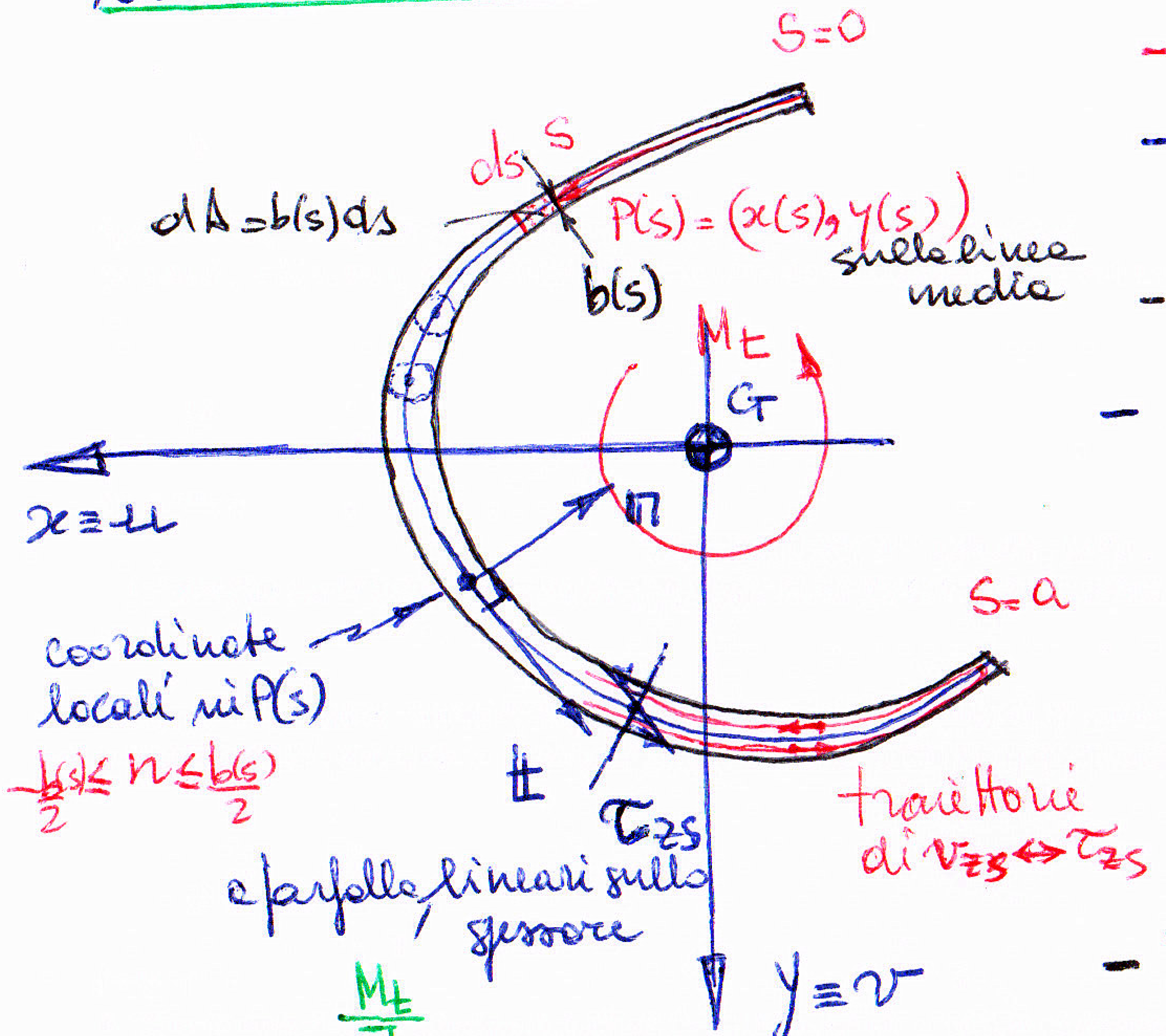
$$T = \frac{1}{2} \frac{b}{2} \tau^{max} a = \frac{ab}{4} \tau^{max}$$

$$\frac{M_t}{2} = T \frac{2b}{3} = \frac{ab}{4} \tau^{max} \frac{2}{3} b$$

$$\tau^{max} = \frac{3M_t}{ab^2}$$

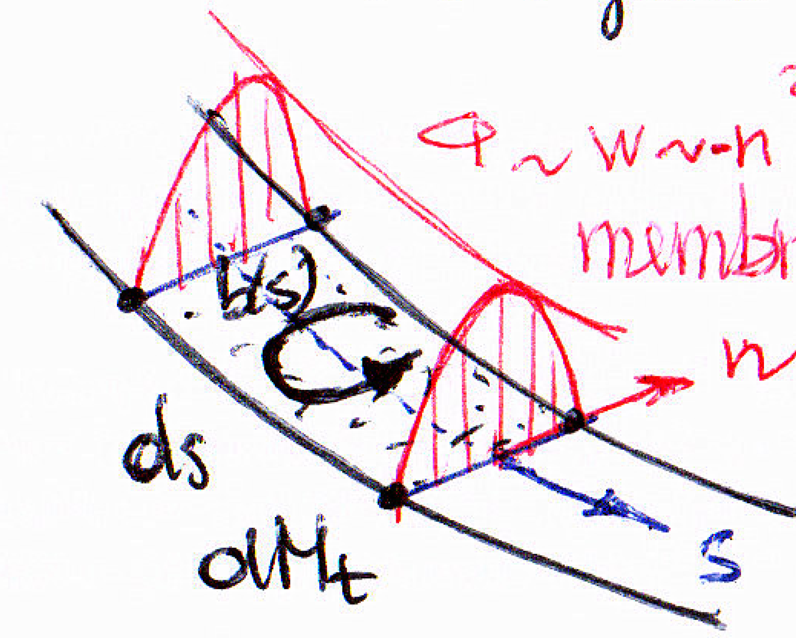
— Torsione nei profili sottili aperti

egidio.rizzi@unibg.it



- s: ascissa curvilinea ($0 \le s \le a$)
- a: sviluppo della linea media del profilo
  - luogo dei centri di circonferenze inscritte nello spessore del profilo
- b(s): spessore, in generale variabile, piccolo rispetto allo sviluppo della linea media: $b(s) \ll a$ (in gen. variabile ma con continuità e con variaz. comunque piccole)
- Caratteristiche geometriche: (riferite alla linea media → integrali di linea),
  - $A = \int_A dA = \int_0^a b(s)\, ds$
  - $J_x = \int_A y^2 dA \cong \int_0^a y^2(s)\, b(s)\, ds$
  - $J_y = \int_A x^2 dA \cong \int_0^a x^2(s)\, b(s)\, ds$

  x(s), y(s) sulla linea media



$\left| \frac{db(s)}{ds} = b'(s) \right| \ll 1$

- In base all'analogia della membrana si considera che ogni rettangolino b(s)ds si comporti secondo la soluzione vista per un rettangolo sottile:

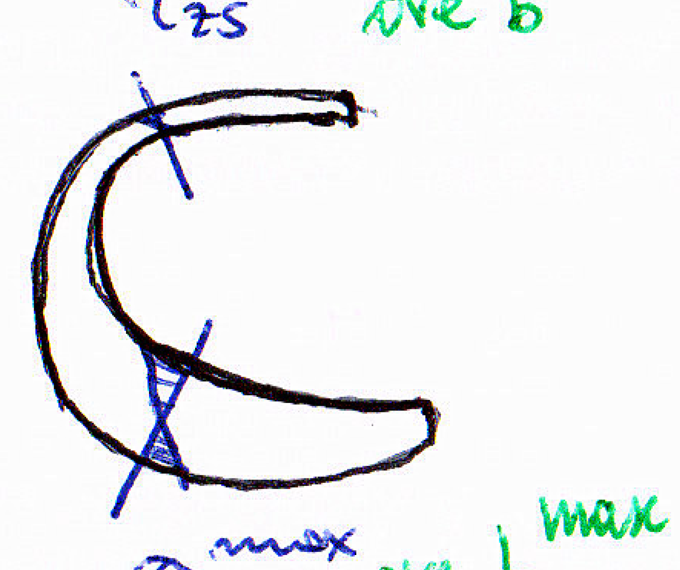
$$\varphi(s,n) = \underbrace{G\beta}_{\frac{M_t}{J}} \left(\frac{b^2(s)}{4} - n^2 \right) \rightarrow \begin{cases} \tau_{zs} = \varphi_{,n} = -2G\beta\, n = -e\, n & \text{lineari a farfalla sullo spessore} \\ \tau_{zn} = -\varphi_{,s} = -G\beta \frac{b(s)}{2} b'(s) \simeq 0 & \text{per piccole variazioni di spessore (dovendo } b(s) \text{ rimanere piccolo)} \end{cases}$$

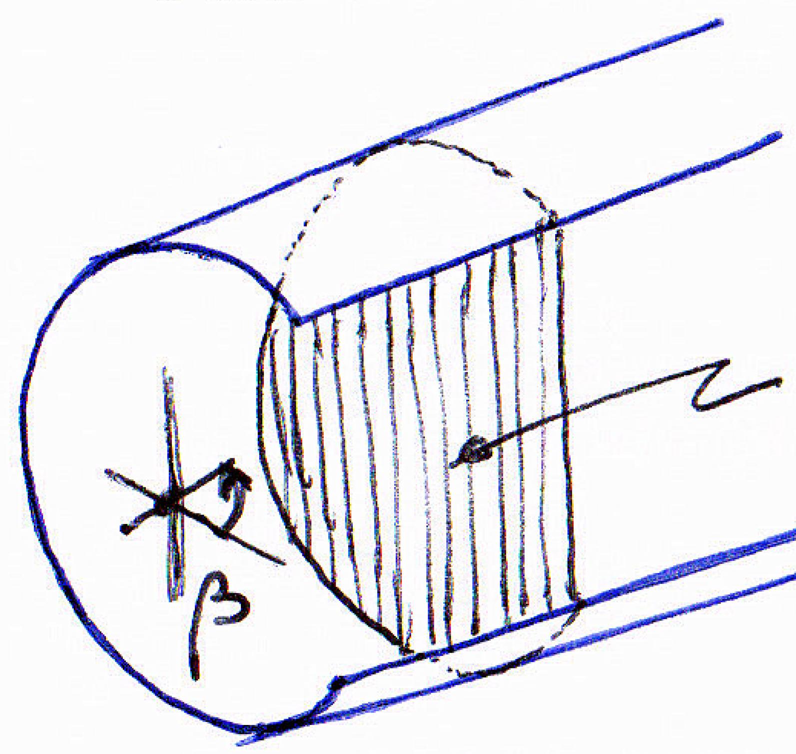
Airy locale

Quindi, localmente:

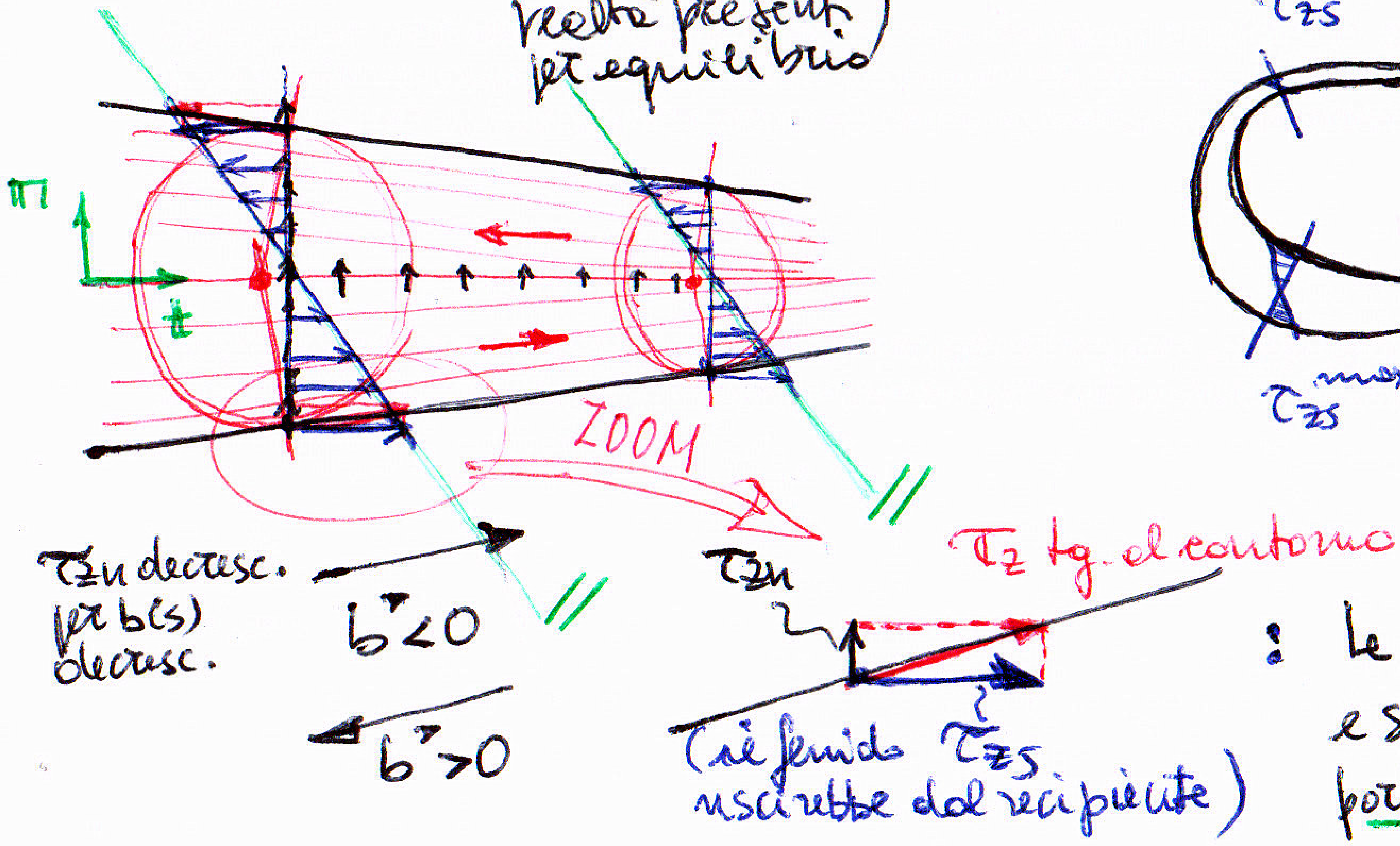
- $\tau_{zs}(s,n) = -2 \frac{M_t}{J} n \rightarrow \tau_{zs}^{max}(s) = \underbrace{\frac{M_t}{J}}_{G\beta} b(s)$ sullo spessore
- $\tau_{zn} = 0$ (anche se in realtà presenti per equilibrio)

— Poiché i vari rettangolini b(s)ds si ritengono sottoposti alla stessa rotazione unitaria β dell'intera sez., le τ_{zs}^{max} al variare di s si registrano ove lo spessore è max (ciò perché il cf. è a pari β, non a pari M_t).





setti trasversali di irrigidimento — Volti a garantire che la sez. resti rigida nel suo piano, con unica rotazione β per tutta la sezione (altrimenti il postulato di DSV potrebbe perdere di validità per i profili sottili)

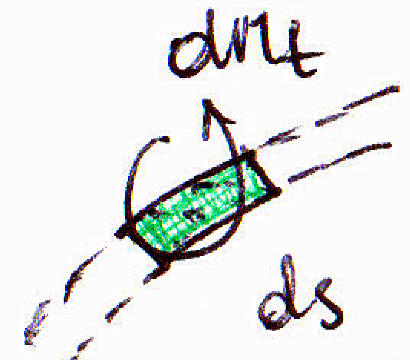


: Le τ_{zn}, trascurabili, sono peraltro tali da imporre il rispetto dell'equil. al contorno e spiegano come le corrisp. γ_{zn} garantiscano la costanza della portata (c'è parte di portata trasversale alla linea media)

- Resta da determinare J: Per equivalenza statica:

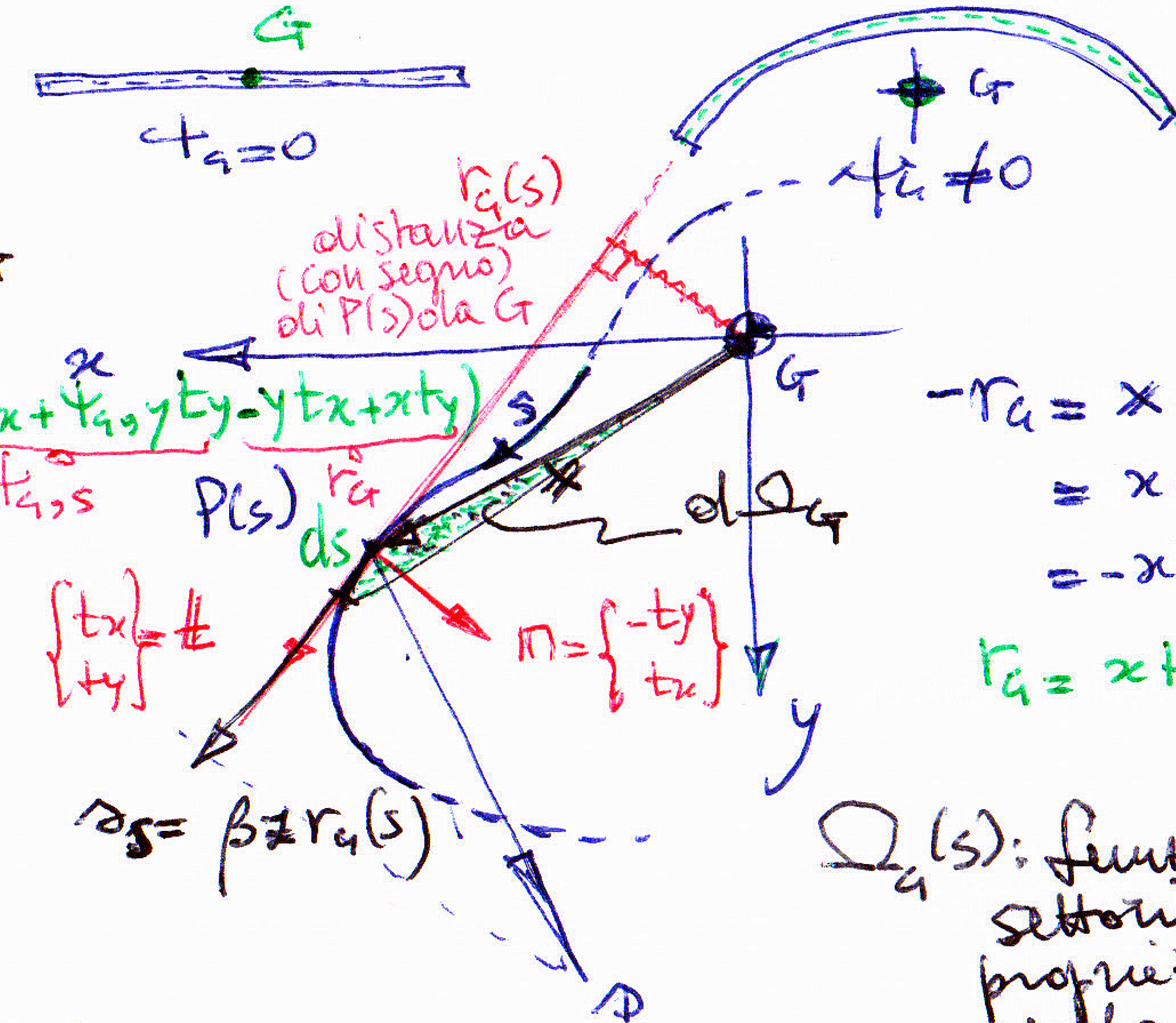
$$M_t = 2\int_A \varphi \, dA = 2G\beta \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\frac{b^2(s)}{4} - n^2\right) ds\, dn = 2G\beta \int_0^a \left(\frac{b^2(s)}{4} - \frac{n^3}{3}\Big|_{-b/2}^{b/2}\right) ds = 2G\beta \int_0^a b^3(s)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{4}\right) ds = \cancel{2}G\beta \int_0^a \frac{1}{4}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} b^3(s)\, ds = G\beta J$$

con $J = \int_0^a dJ = \int_0^a \frac{1}{3} ds\, b^3(s)$ → somma dei momenti d'inerzia torsionali di ogni rettangolino $b(s)ds$.



$$G\beta = \frac{M_t}{J} = \frac{dM_t}{dJ} \rightarrow dM_t = \frac{dJ}{J} M_t \text{ quota parte che interessa } b(s)ds \rightarrow \tau^{max}(s) = \frac{dM_t}{dJ} b = \frac{M_t}{J} b(s)$$

- Funzione di ingobbamento (riferita alla linea media): $\psi_G = \psi_G(s)$



campo di spostam.
$$\begin{cases} s_x = -\beta z y \\ s_y = \beta z x \\ s_z = \beta \psi_G(x,y) \end{cases} \Bigg\} \; s_s = s_x t_x + s_y t_y = \beta z\left(-y t_x + x t_y\right) = \beta z r_G$$

$$-r_G = \underline{x}\cdot\underline{n} = x n_x + y n_y = -x t_y + y t_x$$

$$r_G = x t_y - y t_x$$

Infatti:
$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta(\psi_{G,x} - y) \\ \tau_{zy} = G\beta(\psi_{G,y} + x) \end{cases} \rightarrow \tau_{zs} = \underline{\tau}_z \cdot \underline{t} = \tau_{zx} t_x + \tau_{zy} t_y = G\beta(\underbrace{\psi_{G,x} t_x + \psi_{G,y} t_y}_{\psi_{G,s}} \underbrace{- y t_x + x t_y}_{r_G})$$

$$\frac{\tau_{zs}}{G} = \gamma_{zs} = s_{z,s} + s_{s,z} = \beta\left(\psi_{G,s} + r_G\right) \rightarrow \boxed{\psi_{G,s} = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta} - r_G(s)}$$

o anche $d\psi_G = \frac{\tau_{zs}}{G\beta} ds - \underbrace{2\cdot\frac{1}{2} r_G(s) ds}_{d\Omega_G}$ Ω_G: area settoriale

$$= \boxed{\frac{\tau_{zs}}{G\beta} ds - 2 d\Omega_G = d\psi_G}$$

profili APERTI

$\Omega_G(s)$: funzione area settoriale: pura proprietà geometrica della sezione

- Poichè qui $\tau_{zs}(s) = 0$ lungo la linea media (τ_{zs} a farfalla in n):

$$d\psi_G = -2 d\Omega_G \rightarrow \psi_G(s) = -2\left(\Omega_G(s) - \bar{\Omega}_G\right) = 2\left(\bar{\Omega}_G - \Omega_G(s)\right) \quad \text{con } \bar{\Omega}_G = \frac{1}{A}\int_0^a \Omega_G(s) b(s) ds,$$

valor medio di $\Omega_G(s)$ in A

(con $\bar{\psi}_G = 0$)

ingobbamento medio fuori piano nullo

La f.ne area settoriale definisce l'ingobbamento del profilo aperto

- Nota $\psi_G(s)$, possono essere calcolate le coord. del centro di torsione:

CENTRO DI TORSIONE
$$\begin{cases} x_c = -\frac{1}{J_x}\int_0^a \psi_G(s)\, y(s)\, b(s)\, ds \\ y_c = \frac{1}{J_y}\int_0^a \psi_G(s)\, x(s)\, b(s)\, ds \end{cases}$$

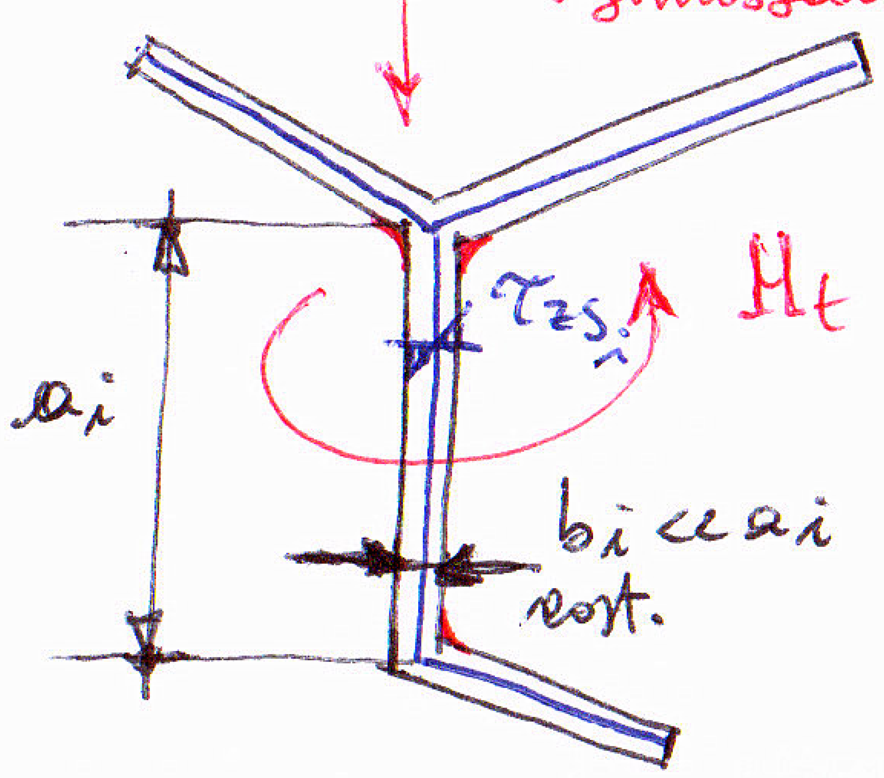
Tale per cui: $\int_A \psi_c \, dA = 0$ ← ingobbamento medio fuori piano nullo

$\int_A \psi_c \, x \, dA = 0$, $\int_A \psi_c \, y \, dA = 0$ ← rotazioni medie fuori piano nulle

ψ_c: f.ne di ingobbamento riferita al centro di torsione

erizzi@unibg.it

- Profili sottili aperti formati da rettangoli allungati (molto usati in pratica)

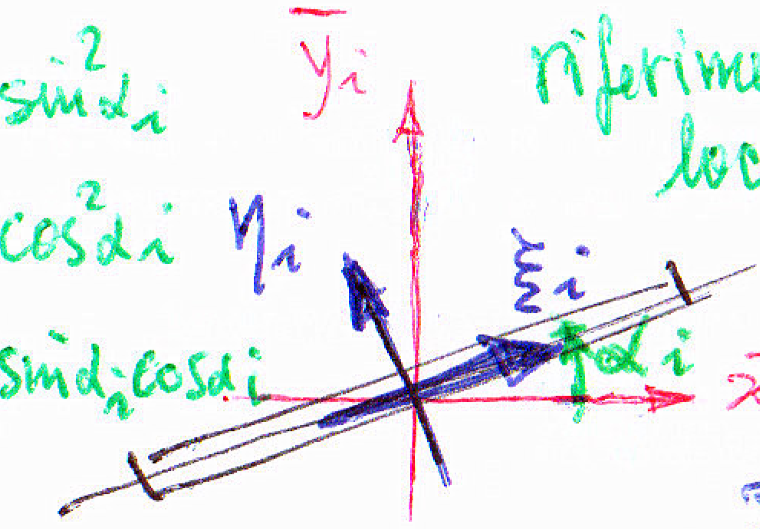


- $A = \sum_i a_i b_i$
- $J_x = \sum_i J_{x_i}$
- $J_y = \sum_i J_{y_i}$

ove J_{x_i}, J_{y_i} sono calcolati a partire da $(J_{\xi_i}), J_{\eta_i}$ ove

$J_{\xi_i} \sim 0$ si ritiene trascurabile

$$\begin{cases} J_{\bar{x}_i} = J_{\eta_i} \sin^2\alpha_i \\ J_{\bar{y}_i} = J_{\eta_i} \cos^2\alpha_i \\ J_{\bar{x}_i\bar{y}_i} = J_{\eta_i} \sin\alpha_i \cos\alpha_i \end{cases}$$



riferimento locale al tratto i-esimo

spessore piccolo al cubo

$$\begin{cases} J_{\xi_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3 \simeq 0 \to 0 \\ J_{\eta_i} = \frac{1}{12} a_i^3 b_i \end{cases}$$

in genere si trascura

- momento d'inerzia torsionale $J = \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3 = \sum_i J_i$

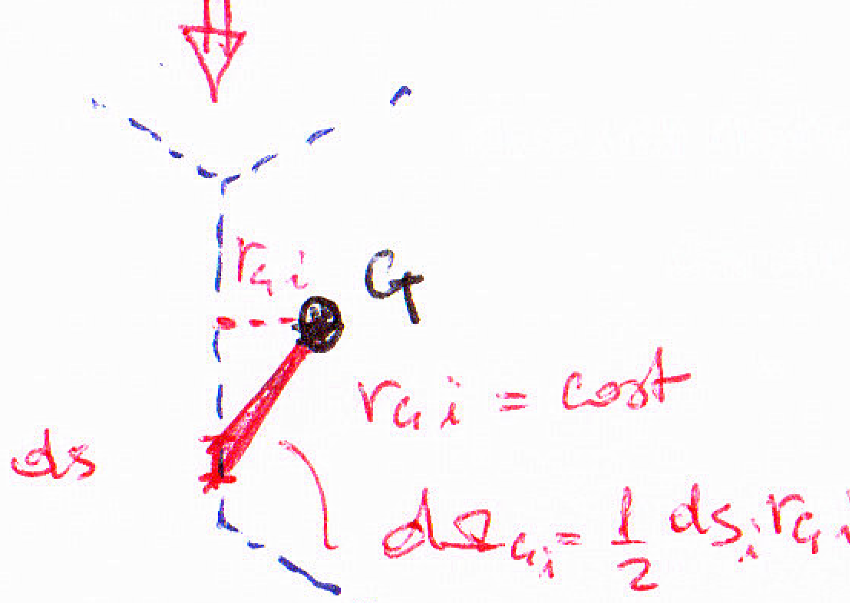
  $\Rightarrow$ se $b_i = \text{cost} = b$, $J = \frac{1}{3} a b^3$ ($a = \sum_i a_i$, sviluppo della linea media)

- $\tau_{zs_i} = \frac{M_{t_i}}{J_i} b_i = \frac{M_t}{J} b_i$ è max ove b_i è max

  $\left(\beta = \frac{M_t}{GJ} = \frac{M_{t_i}}{GJ_i} = \beta_i\right)$ stessa rotazione per tutti i rettangoli sottili componenti la sezione

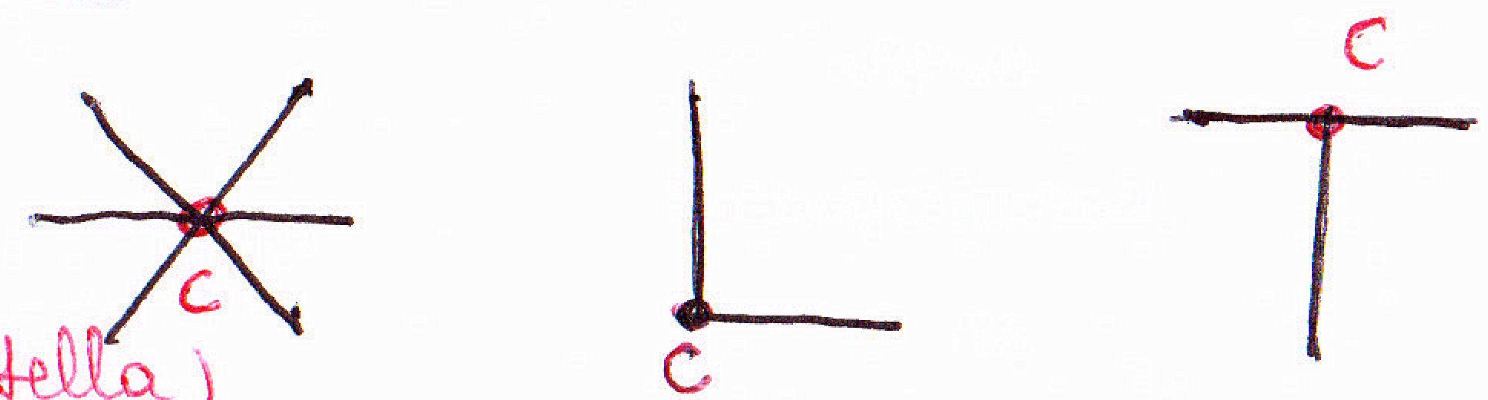
- Funz.ne di ingobbamento: $\psi_G(s_i) = 2\left(\bar{\Omega}_G - \Omega_G(s_i)\right)$ è lineare in s_i (essendo $r_{G_i} = \text{cost}$ lungo il rett. i-esimo)

  funz.ne lineare a tratti



- Nei profili a stella:

  linee medie che si intersecano tutte in un p.to (centro della stella)



$\Omega_C \equiv 0$ ($r_{C_i} \equiv 0$)

poiché tutte le r_{C_i} sono identicam. nulle

è quindi chiaro che, riferendosi al centro della stella, risulta $\psi_C \equiv 0$,

p.to ove convergono tutte le linee medie dei rettangoli componenti $\equiv C$

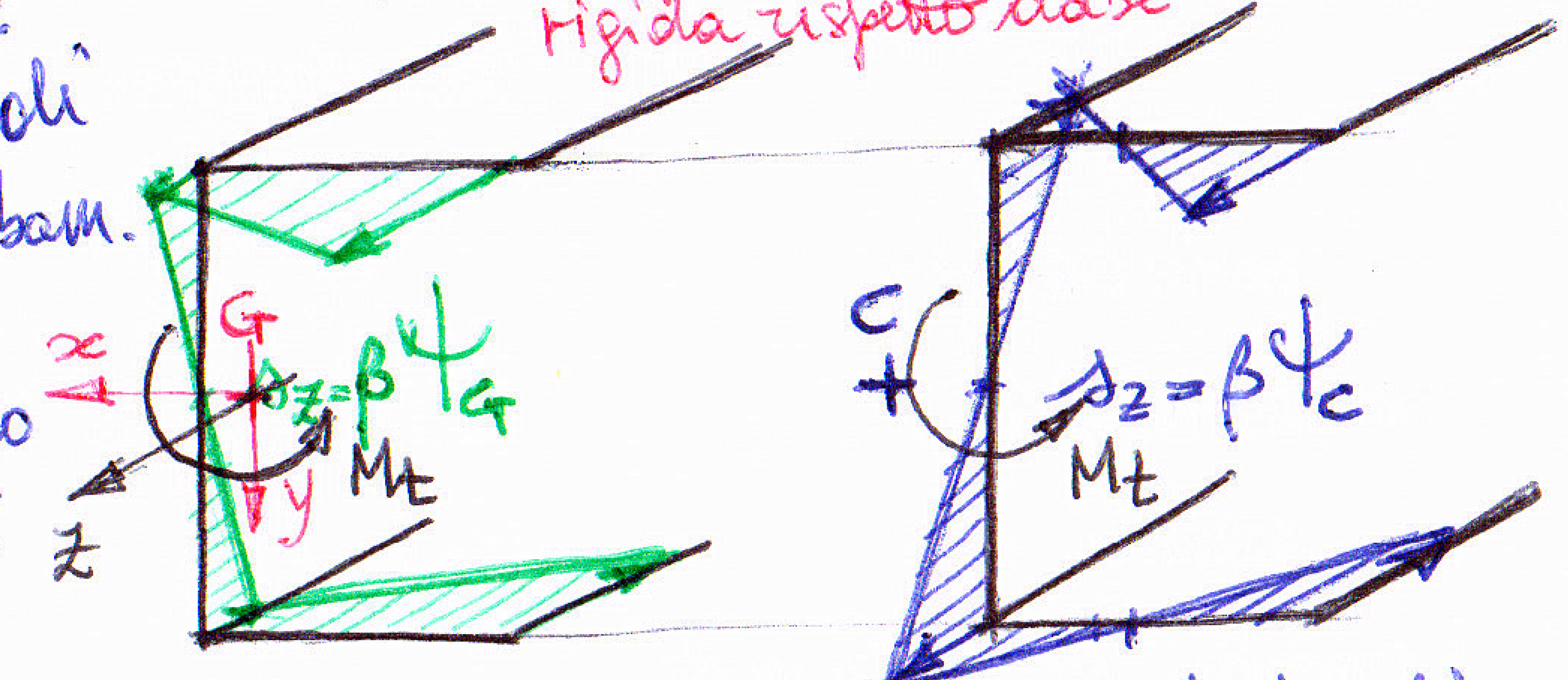
quindi tale punto è il centro di torsione — centro di torsione

(poiché automaticamente $\int_A \psi_C \, dA = 0$, $\int_A \psi_C x \, dA = 0$, $\int_A \psi_C y \, dA = 0$)

- Pertanto, i profili a stella hanno ingobbamento nullo riferito a C, $\psi_C = 0$.
  Non possiedono ulteriori capacità portanti torsionali secondarie da event. ingobbamento impedito da vincoli esterni $\Rightarrow$ tra i profili aperti, che si comportano male a torsione (vedi successivamente cf. coi profili chiusi, molto più efficaci), sono particolarmente inefficaci in quanto non possono beneficiare delle ulteriori risorse secondarie da ingobbamento ev. impedito.

Es.: f.ne di ingobbam. di profilo a C

ψ_G e ψ_C differiscono per una rotazione rigida rispetto ad z



v. testo di L. Corradi

egidio.rizzi@unibg.it