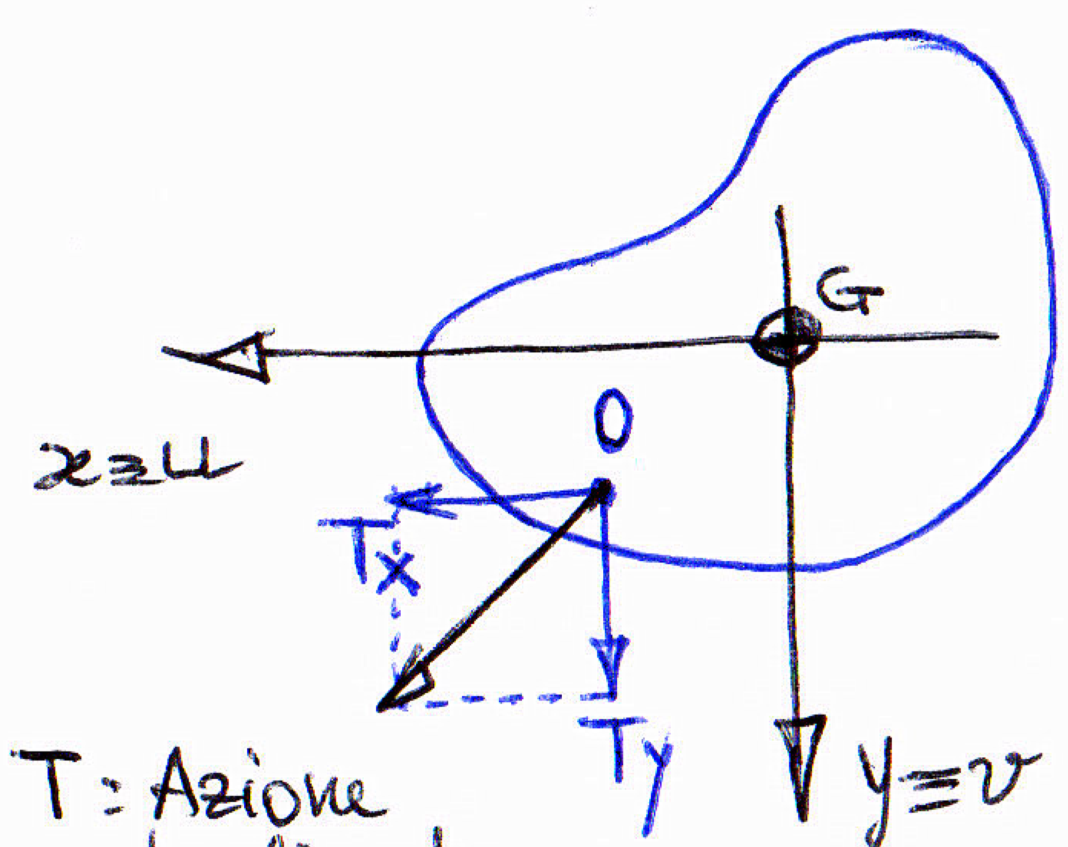
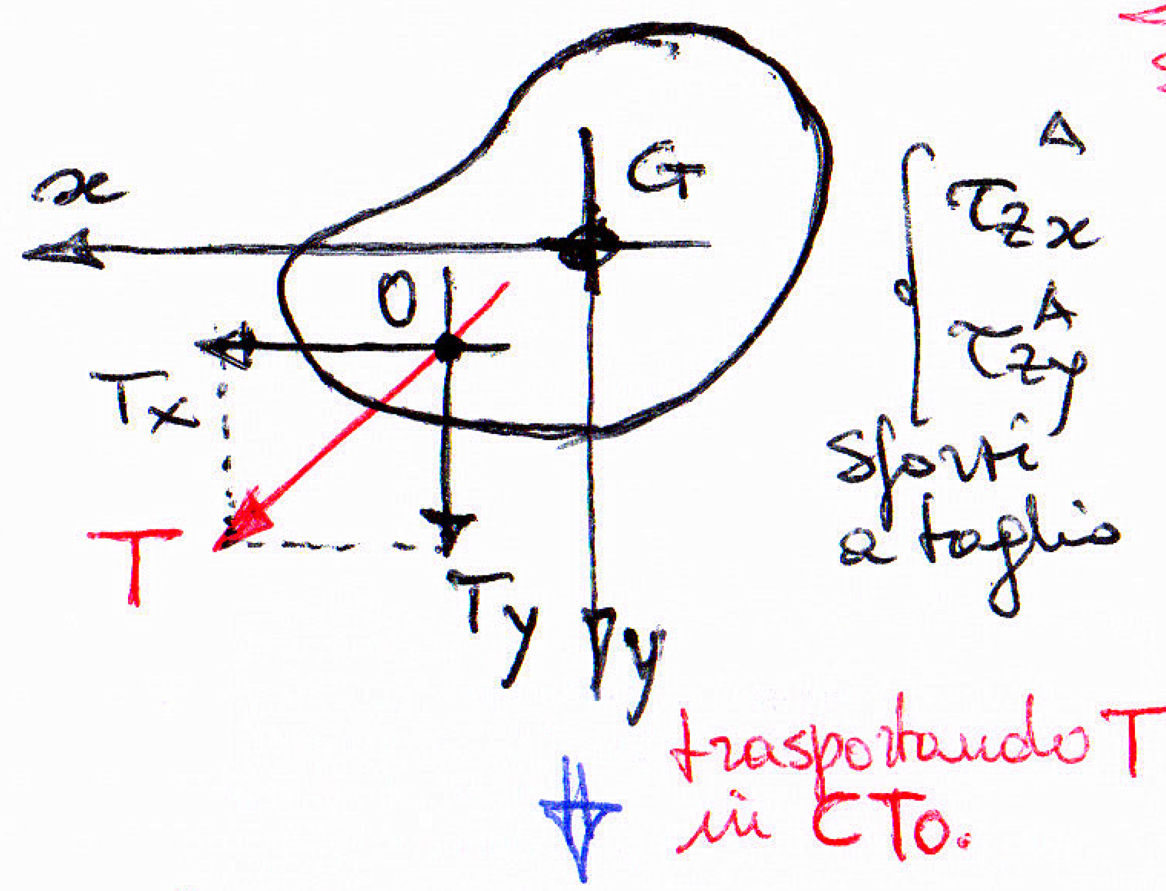
24ª Lez. CdSdC — Taglio e centro di taglio

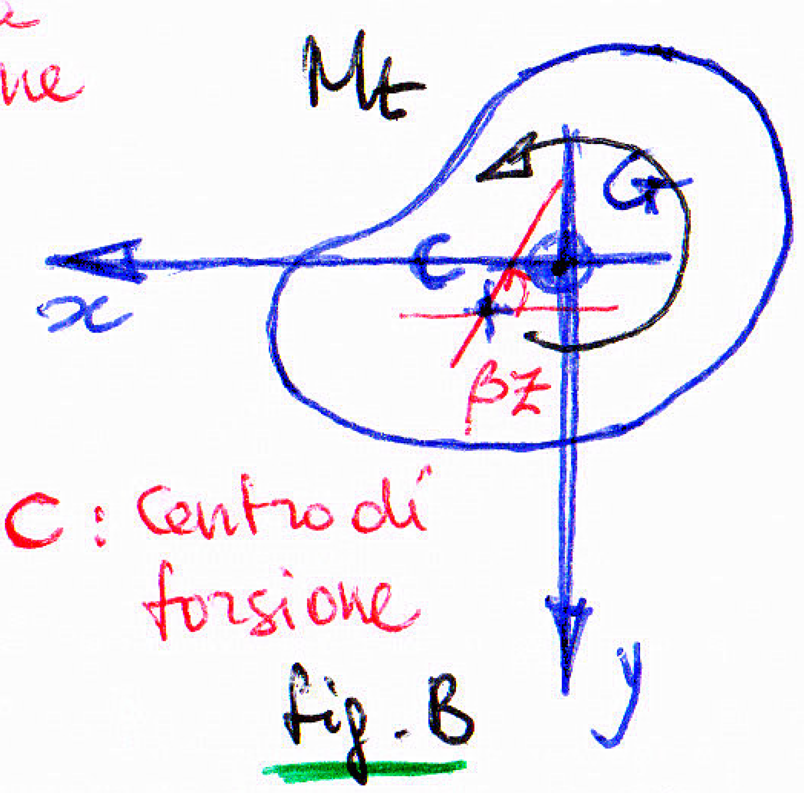


T: Azione tagliante applicata in $O(x_o, y_o)$

- **Centro di taglio**: p.to di applicazione di T tale per cui la sezione si deforma, con inflessione del prisma (se c'è taglio c'è momento) senza ruotare nel piano.
- Se $O \equiv CT_a$ la sollecitazione è di puro taglio (e flessione), senza effetti torcenti (no rotazione)
- Infatti è evidente che trasportando le forze T nel piano della sezione si origina un momento torcente di trasporto che induce una risposta torsionale.
- Rotazione nulla: in senso energetico (via PLV). Sforzi a taglio e deformazioni torcenti risultino energeticamente ortogonali, cioè tali da produrre lavoro interno nullo (e quindi lavoro esterno nullo).

Sistema Ⓐ static. amm. — Stessa sezione — Sistema Ⓑ cinem. amm.





C: Centro di torsione

fig. B

$$\begin{cases} s_x^B = -\beta z (y - y_c) \\ s_y^B = \beta z (x - x_c) \\ s_z^B = \beta \psi_c(x,y) \end{cases}$$

$\Downarrow$

γ_{zx}^B, γ_{zy}^B deformazioni a torsione

PLV: $\mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} = 0 \leftarrow$ Se $O \equiv CT_a$.

$\frac{d\mathcal{L}_e^{AB}}{dz} = \frac{d\mathcal{L}_i^{AB}}{dz} = 0$ per concio dz di prisma

Da Fig. A e Fig. B:

$$\frac{d\mathcal{L}_e^{AB}}{dz} = T_x^A \underbrace{u_c^B}_{0} + T_y^A \underbrace{v_c^B}_{0} + \left[T_y^A(x_o - x_c) - T_x^A(y_o - y_c)\right]\beta^B$$

essendo centro di torsione

$$= \underbrace{\int_A \left(\tau_{zx}^A \gamma_{zx}^B + \tau_{zy}^A \gamma_{zy}^B\right) dA}_{=0 \text{ se } O \equiv CT} = \frac{d\mathcal{L}_i^{AB}}{dz}$$

Ciò implica:

$$\left[T_y^A(x_o - x_c) - T_x^A(y_o - y_c)\right]\beta^B = 0 \quad \forall T_x^A, T_y^A, \beta^B$$

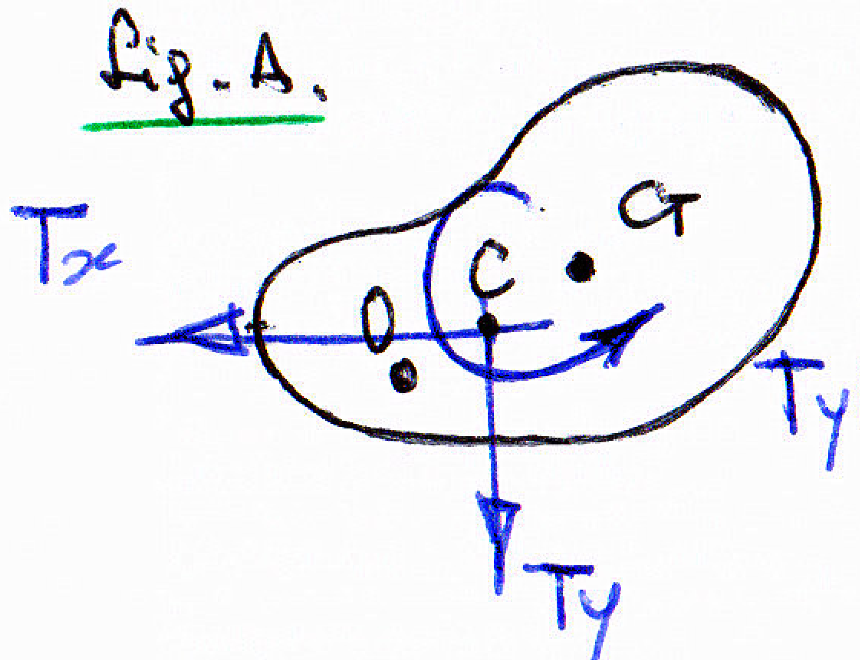
$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{cases} x_o = x_c \\ y_o = y_c \end{cases}}$$

Quindi il centro di taglio, così definito, coincide col centro di torsione:

$C \equiv CT_o \equiv CT_a$

fig. A



momento di trasporto da O a C (torcente)

$T_y(x_o - x_c) - T_x(y_o - y_c)$

- Analogamente, invertendo i sistemi A e B:

$$M_t^{To.} \cdot \beta^{Ta.} = \int_A \tau_z^{To.} \cdot \gamma_z^{Ta.}\, dA = \int_A \tau_z^{To.} \cdot \frac{\tau_z^{Ta.}}{G}\, dA = \int_A \frac{\tau_z^{To.}}{G} \cdot \tau_z^{Ta.}\, dA = \int_A \gamma_z^{To.} \cdot \tau_z^{Ta.}\, dA = 0$$

$\mathcal{L}_i^{AB}$ come sopra se $O \equiv C$

$\hookrightarrow$ allora $\beta^{Ta.} = 0$ (rotaz. nulla della sez. soggetta a taglio)

- L'accoppiamento taglio/torsione passa attraverso la determinazione del CT:
  - se CT_o è noto dalla soluzione del pb. della torsione, è noto anche CT_a.
  - se CT_a è noto dalla soluzione del pb. del taglio, è noto anche CT_o.

egidio.rizzi@unibg.it

- Nota la soluz. del pb. del taglio (peraltro in generale non di agevole determinazione in forma chiusa o analitica), il CT_a può essere determinato mediante le condizione di equivalenza statica:

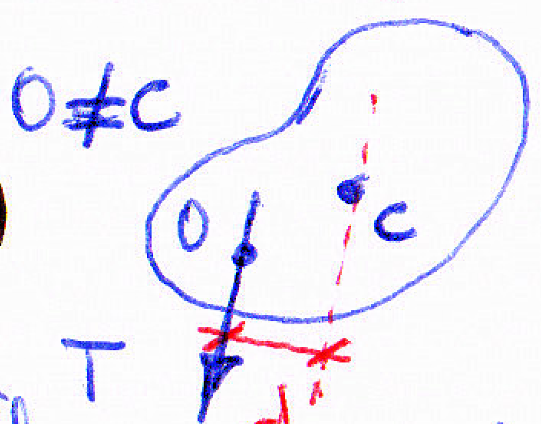
$$\int_A \left(\tau_{zy}^{Ta}\, x - \tau_{zx}^{Ta}\, y\right) dA = T_y\, x_c - T_x\, y_c \Rightarrow (x_c, y_c)$$ –

Es. $T_x = 1,\ T_y = 0 \rightarrow y_c$

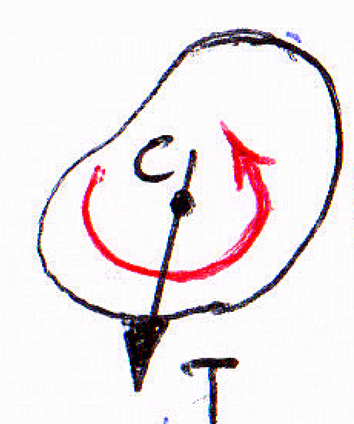
$T_x = 0,\ T_y = 1 \rightarrow x_c$

lrizzi@unibo.it

- Soluzioni approssimate dei pb. delle torsione e del taglio che prevedano τ_z e γ_z energeticamente ortogonali ($d_i^{\,mutuo} = 0$) risultano utili alla determinazione del CT, come CT_o o come CT_a (il CT trovato risulterà approssimato, ma vicino a quello reale, se le soluzioni approssimate risultano vicine a quelle reali).
- Se ∃ asse di simmetria, il CT ∈ a tale asse –
- Qualora la risultante T non risulti applicata in C, cioè sia applicata in $O \neq C$, essa può essere trasportata in C, generando un momento torcente di trasporto, in genere detto momento torcente parassita (att. a tenerlo in debito conto, specie nel caso di scarsa resistenza torsionale, come per i profili sottili aperti):

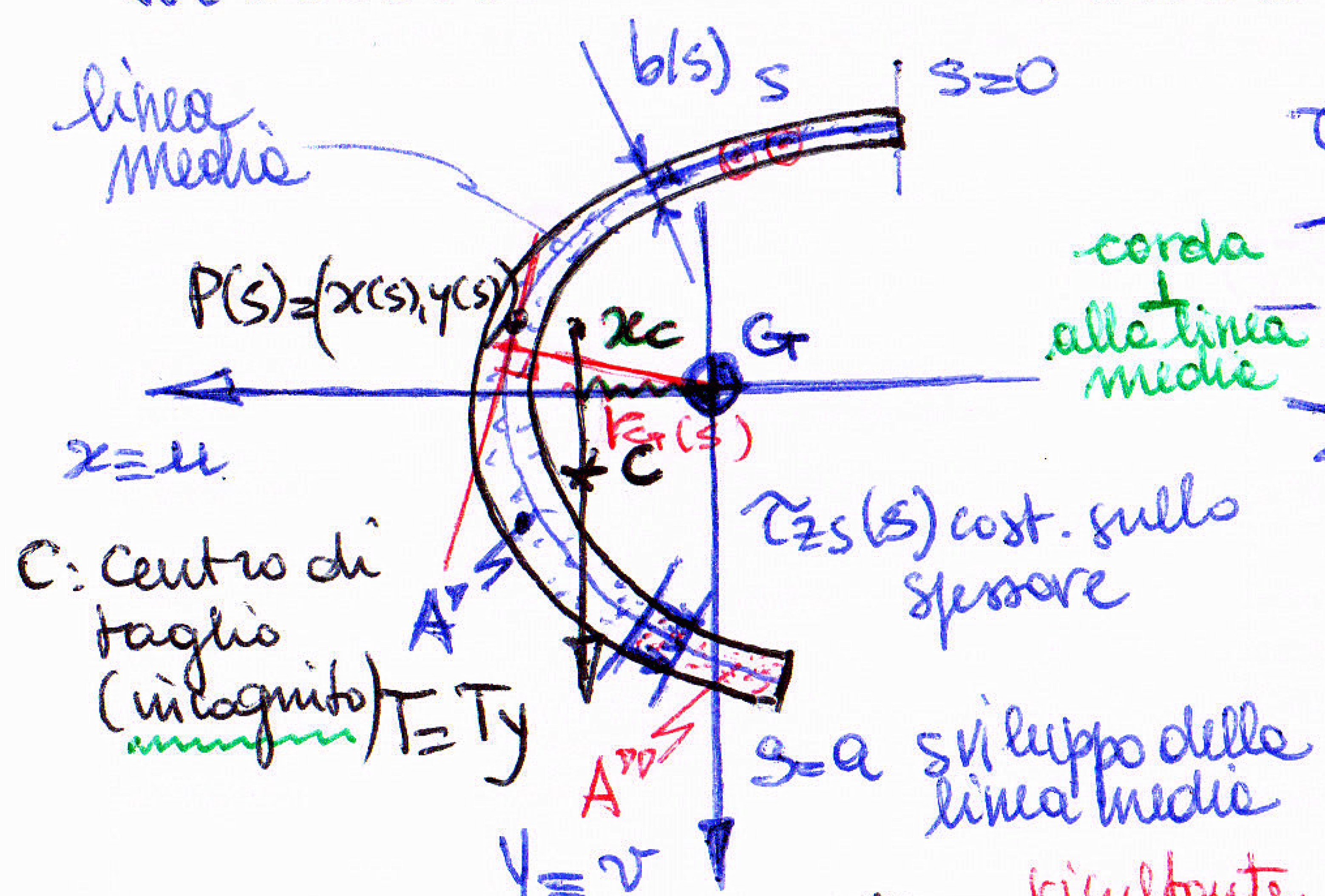


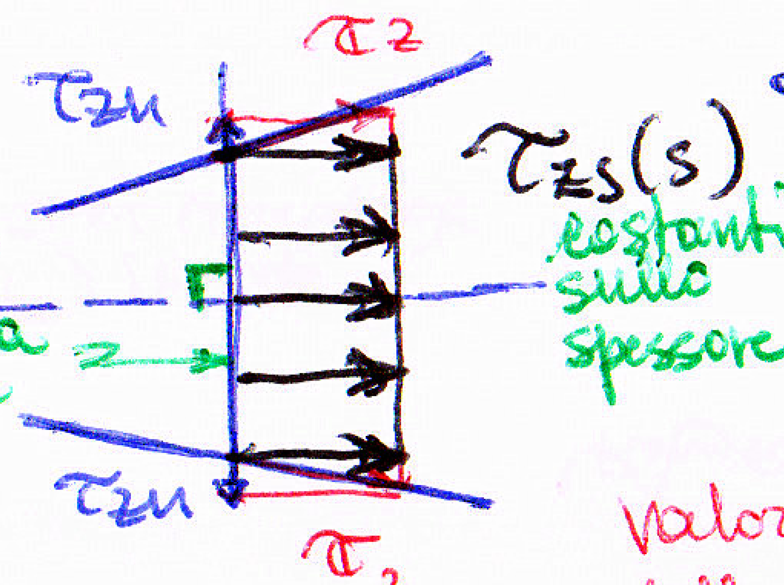
$\Rightarrow$



$M_{tp} = T \cdot d$

TAGLIO NEI PROFILI SOTTILI APERTI (soluz. approx secondo D.J. Jourawsky ~1856)





- τ_{zn} presenti per l'equil. al contorno ma trascurabili ai fini ingegneristici $\rightarrow \tau_{zn} \simeq 0$

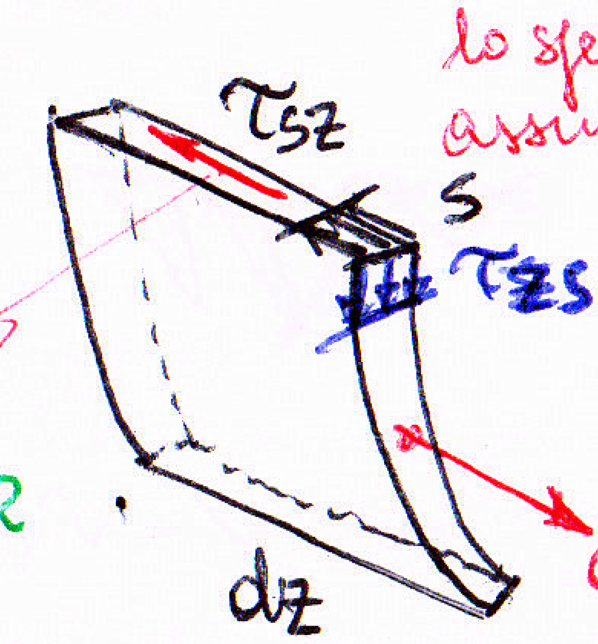
formule di J.
$$\tau_{zs} = \frac{T_y\, S_x''(s)}{J_x\, b(s)} = -\frac{T_y\, S_x'(s)}{J_x\, b(s)}$$

valor medio delle τ_{zs} lungo lo spessore – Può essere assunto $\equiv$ τ_{zs} = cost in b(s))

S uscente dalla corda

poichè lo spessore è sottile:
$$S_x''(s) = \int_s^a y(s)\, b(s)\, ds \ :\ y(s) \text{ riferita alla linea media}$$

- T_y: Taglio applicato secondo asse princ.
- J_x: Mom. d'inerzia rispetto all'altro asse princ.
- $S_x(s)$: Mom. statico delle porzioni A' o A'' risp. ad x.
- $b(s)$: spessore corrente all'ascissa s (larghezza della corda)



$$dM_x = T_y\, dz$$
$$d\sigma_{zz} = \frac{T_y\, dz}{J_x}\, y \quad \text{(formula di Navier) per la flessione}$$

dovuto a dM_x

$$dR = \int_{A''} d\sigma_{zz}\, dA = \frac{T_y\, dz}{J_x}\, S_x''$$

risultante delle τ_{sz}:

- Equilibrio alla traslazione in direz. z:

$$\tau_{zs}\, b(s)\, \cancel{dz} = \frac{T_y\, S_x''}{J_x}\, \cancel{dz} \rightarrow \text{formula di J.}$$

Ragionamento che può essere sempre fatto per capire il verso reale delle $\tau_{zs}(s)$ $\Rightarrow$

$$\tau_{zs}\, b(s)\, dz = \tau_{sz}\, b(s)\, dz = dR$$

$\tau_{sz} = \tau_{zs}$ (sforzo simm. $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$)

N.B. Le $\tau_{zs}(s)$ determinate con le formule di Jourawsky non dip. dal p.to di applicazione di $T = T_y$. Esse si ritiene applicata in C – Tale punto può essere determinato per equivalenza statica: (rispetto a G o altro punto comodo)

$$\int_0^a \underbrace{\tau_{zs}(s)\, b(s)\, ds}_{\text{forze}} \cdot \underbrace{r_G(s)}_{\text{braccio}} = T_y \cdot x_c \Rightarrow \int_0^a \frac{\cancel{T_y}\, S_x''(s)}{J_x}\, r_G(s)\, ds = \cancel{T_y}\, x_c \Rightarrow \boxed{x_c = \frac{1}{J_x} \int_0^a S_x''(s)\, r_G(s)\, ds}$$

coordinate del CT

Idem per $T_x \Rightarrow \boxed{y_c = -\frac{1}{J_y} \int_0^a S_y''(s)\, r_G(s)\, ds}$

È buona approx del CT in quanto τ_{zs}^{Ta} e $\gamma_{zs}^{To} = \frac{\tau_{zs}^{To}}{G}$ sono energ. ortogonali

cost in b(s)

lineari in b(s)

$$\frac{dL_i}{dz} = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs}^{Ta}\, \gamma_{zs}^{To}\, dn\, ds \equiv 0$$

PROFILI APERTI FORMATI DA RETTANGOLI SOTTILI

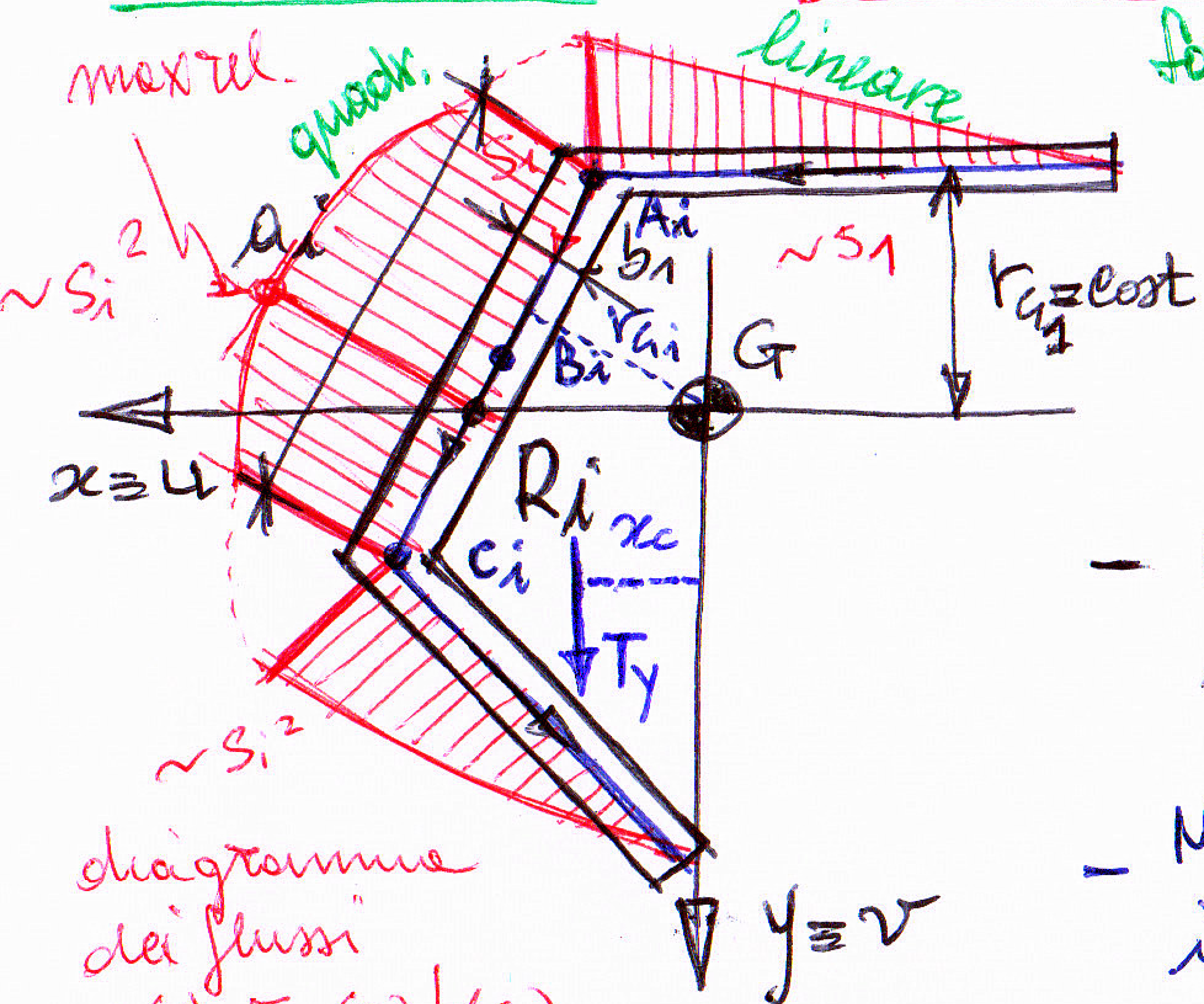


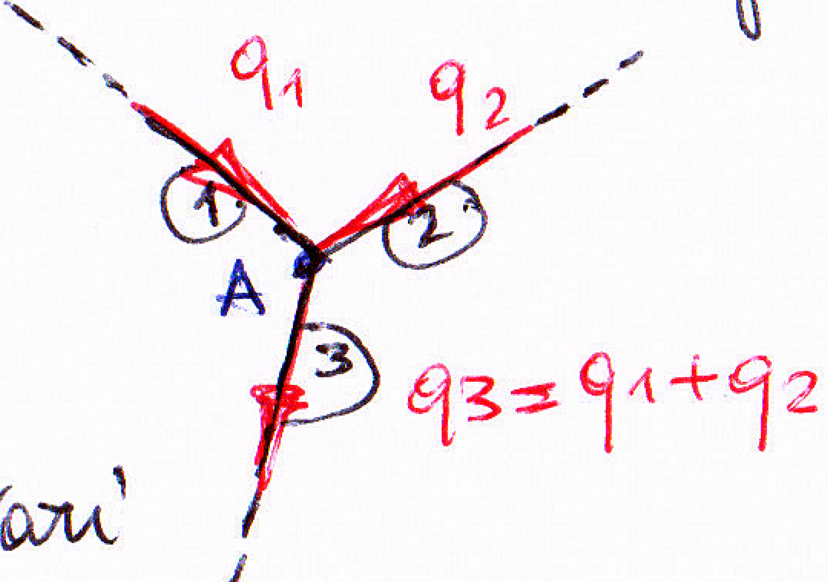
diagramma dei flussi $q(s) = \tau_{zs}(s)\, b(s)$ (andamento del momento statico, a meno del fattore cost. $\frac{T_y}{J_x}$)

Formula di Jourawsky:

- $\tau_{zs} = \dfrac{T_y\, S_x^{**}(s)}{J_x\, b(s)} \rightarrow \tau_{zs}(s_i) = \dfrac{T_y\, S_x^{**}(s_i)}{J_x\, b_i}$ lungo il tratto i-esimo
- $\tau_{zs}^{max} = \dfrac{T_y}{J_x}\left(\dfrac{S_x^{**}(s_i)}{b_i}\right)^{max}$

Si ha:
- b_i = cost su ogni tratto descritto da s_i.
- $S_x^{**}(s_i)$ al più parabolico in s_i (infatti, sul tratto s_i l'area cresce linearmente con s_i e la distanza del suo baricentro da x è altrettanto lin. in s_i)

- Nei tratti ove $s_i \,//\, x$, $S_x^{**}(s_i)$ è lineare in s_i in quanto la distanza del baricentro dell'area componente è costante rispetto ad x. (tale distanza è r_{G_i}).
- Nei p.ti ove la linea media tocca l'asse x c'è punto di stazionarietà di $S_x^{**}(s_i)$, il che segnala un potenziale valore massimo di τ_{zs} (è valore di max. relativo).
- Nei nodi ove convergono più tratti vi è bilancio di flussi: (flussi di tensioni tangenziali a taglio $q(s_i) = \tau_{zs_i}(s_i)\, b_i$)



(poiché $S_{x_3}^{**} = S_{x_1}^{**} + S_{x_2}^{**}$ in A).

- Per determinare il CTa mediante equivalenza statica è utile det. le risultanti R_i delle τ_{zs_i} nei vari tratti:

$$R_i = \int_{s_i} \underbrace{\tau_{zs_i}(s_i)\, b_i}_{q_i(s_i)}\, ds_i = \frac{T_y}{J_x}\int_{s_i} S_{x_i}^{**}(s_i)\, ds_i$$

con $S_{x_i}^{**}(s_i)$ parabolico in s_i

si tratta di integrare $S_{x_i}^{**}(s_i)$ in s_i – l'integrale può essere calcolato:
- in forma analitica
- mediante le formule di Simpson (integra esattamente una parabola)

Formula di SIMPSON:

$$\int_{s_i} S_{x_i}^{**}(s_i)\, ds_i = \frac{\ell_i}{6}\left(S_{x_{A_i}}^{**} + 4 S_{x_{B_i}}^{**} + S_{x_{C_i}}^{**}\right)$$

B_i: p.to medio del tratto i

estremi del tratto i

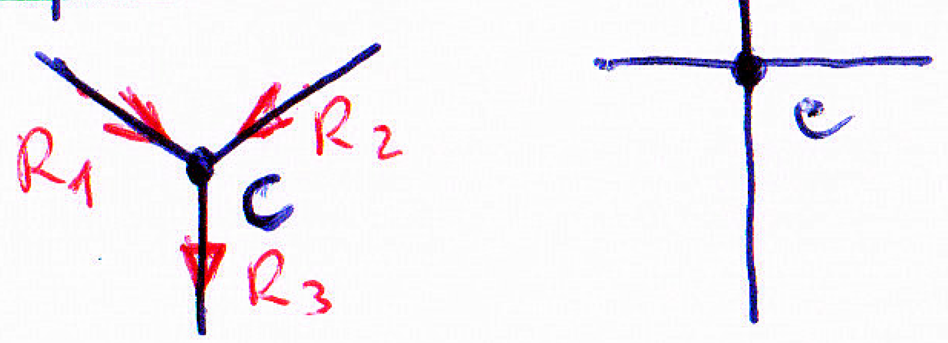
è suff. det. i momenti statici in questi tre punti, ∀ tratto i

- Trovate le risultanti R_i si valuta l'equivalenza statica rispetto a G (o altro punto comodo):

$$T_y \cdot x_c = \sum_i R_i\, r_{G_i} \rightarrow x_c = \sum_i \frac{R_i}{T_y}\, r_{G_i}$$

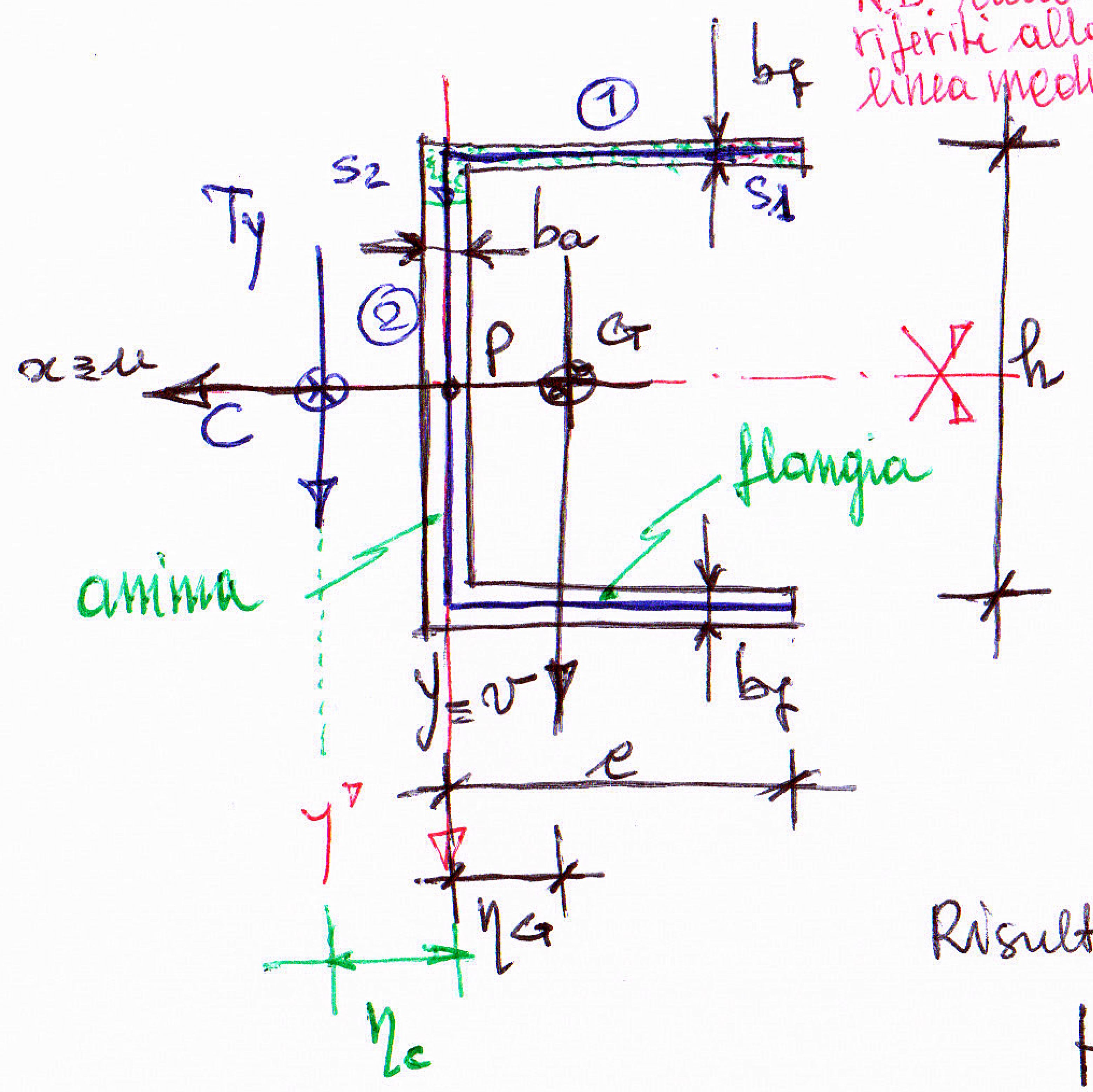
– Ciò det. la coord. x_c del CTa – analogamente, procedendo con T_x – (ad es. $T_x = 1$ – si determina y_c)

- Profili a stella: evidentemente le risultanti R_i convergono tutte nel centro della stella, quindi tale punto è il p.to di applicazione del risultante (T_y) delle R_i e tale punto è quindi il CTa (come si era concluso per il CTo).



egidio.rizzi@unibg.it

Profilo a C e suo centro di taglio. (esempio significativo di andamento delle τ_{zs} dovute a T e di posizione del CTa)



N.B. calcoli riferiti alla linea media

• $A = 2e\,b_f + h\,b_a = b_a h + 2 b_f e$

• $\eta_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{2\, b_f\, e^2/2}{A} = \frac{b_f e^2}{b_a h + 2 b_f e} = \boxed{\frac{e}{2+\frac{b_a}{b_f}\frac{h}{e}} = \eta_G}$

posizione del baricentro rispetto alla costola vertic. (a ds. di essa)

• $J_x = \frac{1}{12} b_a h^3 + 2\left(\underbrace{\frac{1}{12} e\, b_f^3}_{\text{trasc.} \sim 0} + b_f e \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{12} b_a h^3 + b_f e \frac{h^2}{2} = \frac{h^2}{12}(b_a h + 6 b_f e)$

$= \frac{b_f e h^2}{12}\left(6 + \frac{b_a}{b_f}\frac{h}{e}\right)$

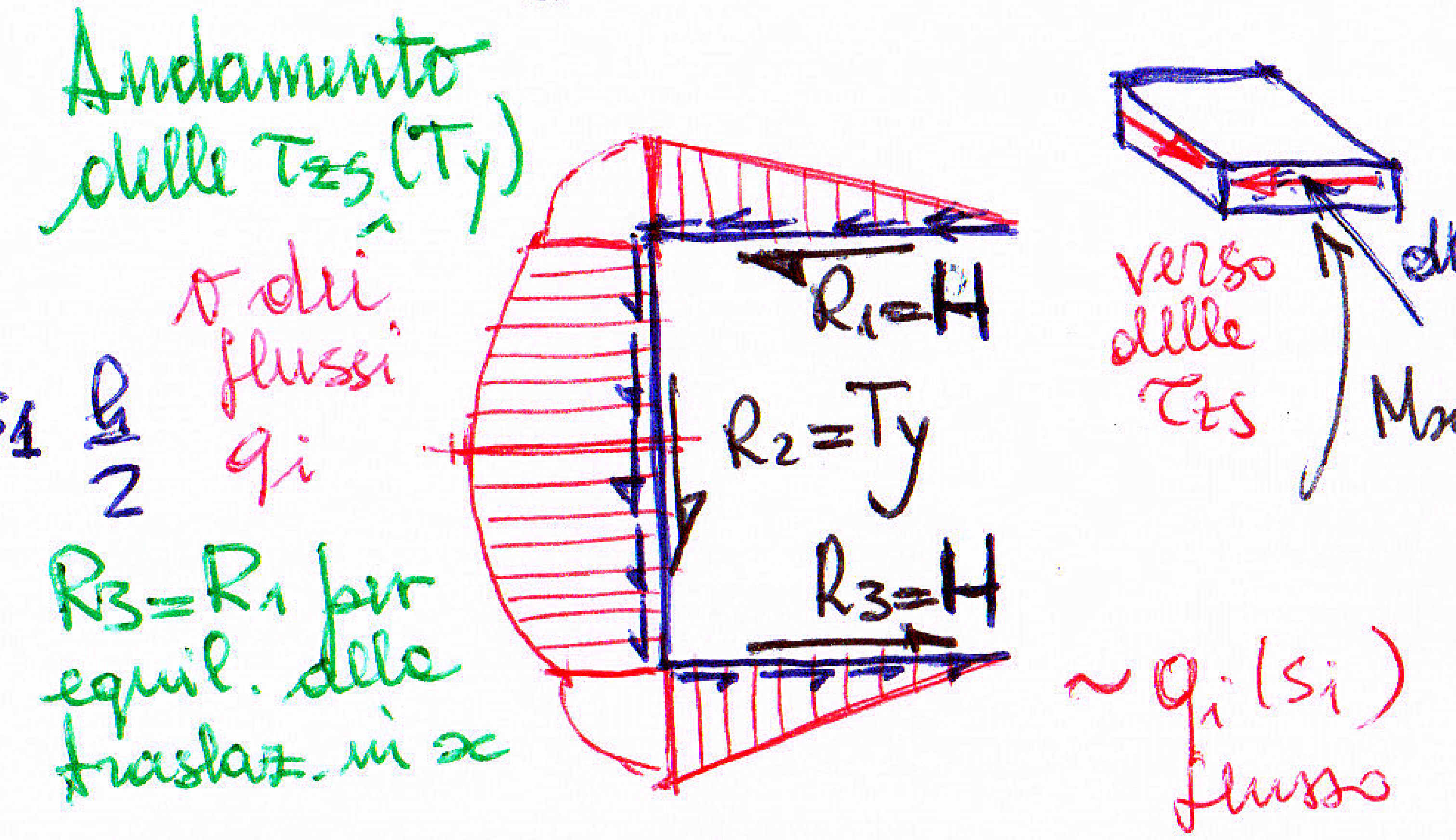
- Tensioni tangenziali sul tratto ①:

$\tau_{zs}(s_1) = -\frac{T_y}{J_x}\frac{S_x^*(s_1)}{b_f}$ con $S_x^*(s_1) = -b_f s_1 \frac{h}{2}$

$= \frac{T_y}{J_x}\frac{s_1 h}{2}$ lineari in s_1

Risultante su ①

$H = \int_0^e \tau_{zs1}\, b_f\, ds_1 = \frac{T_y}{J_x}\frac{h}{2} b_f \frac{s_1^2}{2}\Big|_0^e = \frac{T_y}{J_x}\frac{b_f h e^2}{4}$



Infatti: area del triangolo: $\frac{T_y}{J_x} b_f e \frac{h}{2} \cdot e \cdot \frac{1}{2}$

- Tratto ②:

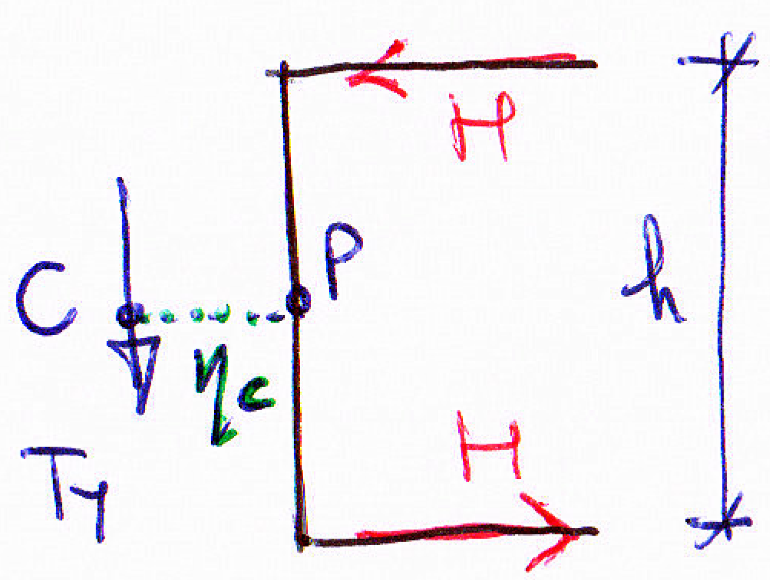
$\tau_{zs}(s_2) = +\frac{T_y}{J_x}\frac{1}{b_a}\left(b_f e\frac{h}{2} + b_a s_2\left(\frac{h}{2}-\frac{s_2}{2}\right)\right)$ parabolico in s_2 -

Valore max in $s_2 = \frac{h}{2}$: $\tau_{zs}^{max} = \frac{T_y}{J_x}\frac{1}{b_a}\left(b_f e \frac{h}{2} + b_a \frac{h}{2}\frac{1}{2}\frac{h}{2}\right) = \frac{T_y}{J_x}\frac{1}{\cancel{b_a}}\frac{\cancel{b_a} h^2}{8}\left(1+\frac{b_f}{b_a}\frac{e h}{2}\frac{8}{h^2}\right) = \frac{T_y}{J_x}\frac{h^2}{8}\left(1+4\frac{b_f}{b_a}\frac{e}{h}\right)$

N.B.: Dovrà risultare $R_2 = T_y$ (per equivalenza statica alla traslazione in direzione y)

- Equivalenza statica rispetto a P: → C deve stare a sn. della costola verticale

conveniente!



$H h = T_y \eta_c \rightarrow \eta_c = \frac{H}{T_y} h = \frac{1}{J_x}\frac{b_f h e^2}{4} h = \frac{1}{J_x}\frac{b_f e^2 h^2}{4} = \frac{\cancel{12}^{\,3}}{\cancel{b_f}\,\cancel{e}\,\cancel{h^2}}\frac{1}{6+\frac{b_a}{b_f}\frac{h}{e}}\frac{\cancel{b_f}\, e^{\cancel{2}}\, \cancel{h^2}}{\cancel{4}}$

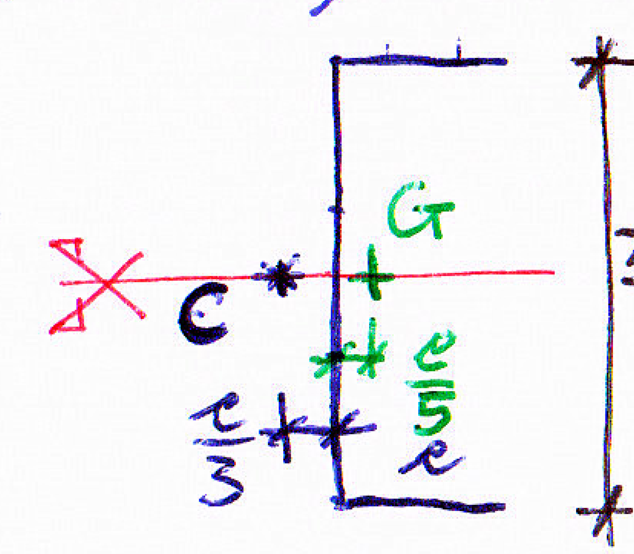
coppia generata dalle H

$\boxed{\eta_c = 3\frac{1}{6+\frac{b_a}{b_f}\frac{h}{e}}\, e}$

$= \frac{e}{2+\frac{1}{3}\frac{b_a}{b_f}\frac{h}{e}} > \eta_G$

$\eta_c = \frac{3e}{4+e/\eta_G} = \eta_G\frac{3e/\eta_G}{4+e/\eta_G}$

es. $b_a = b_f$, $h = 3e \rightarrow \eta_c = \frac{e}{3}$ $\left(\eta_G = \frac{e}{5}\right)$



brizzi@unibg.it