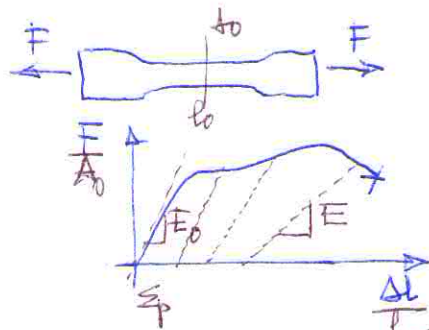
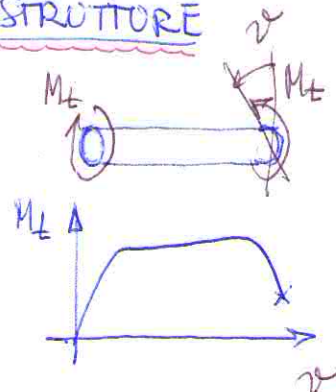


Integrat. I ~~1st~~ → Dinamiche, Instabilità e Anelasticità delle Strutture

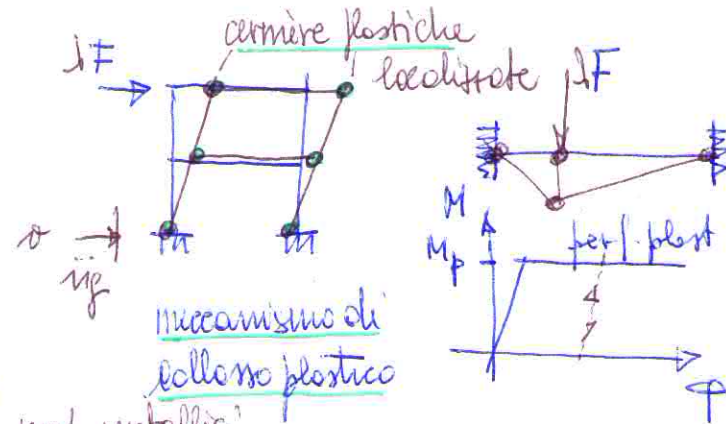
ANELASTICITÀ DELLE STRUTTURE



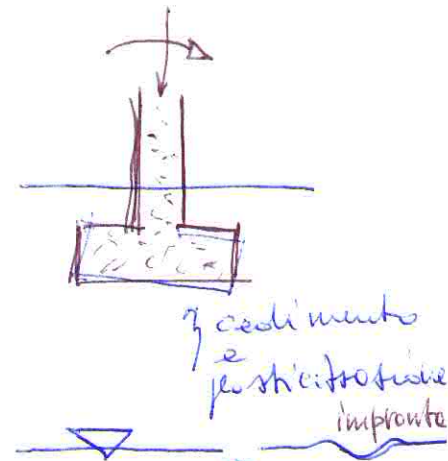
- comport. plastico (ϵ_p)
- danneggiamento ($E < E_0$)



NON LINEARITÀ DI MATERIALE
- dipendenza dalle storie



- met. metalliche
- geo-materiali (c.s., suoli, murature)



prove di iniezione
(identificazione parametrica tramite analisi inversa)

• Azioni:

- cost. o lentamente variabili in t ma di entità tale da produrre fenomeni anelastici (analisi statica o quasi statica)
- variabili nel tempo (anche esplosioni, sisma) e di elevate entità - Possono condurre a collasso (plastico) con transizione dinamica e/o da comp. stabile.

• Caratteristiche:

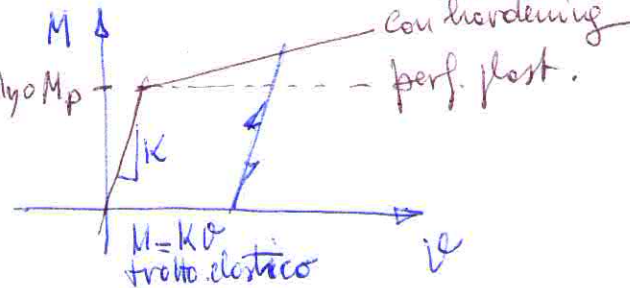
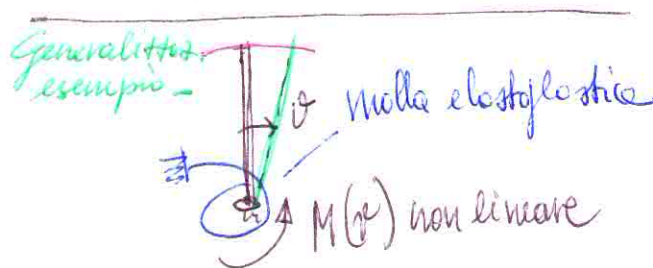
- non linearità di comportamento del materiale o delle strutture - comport. dissipativo
- localizzazione dei fenomeni anelastici

• Programmi:

- calcolo a rottura di travi e telai (olet. del moltiplicatore di collasso)

- Teoremi dell'analisi limite (statico e cinematico)

- elementi di teoria della plasticità (condiz. di snervam., leggi di incrudimento, legge costitutiva incrementale) - Danneggiamento (damage mechanics)



erizi@unibg.it

DIAS - Scaletta plastica

- Elementi fondamentali sul legame elastoplastico monodirezionale

- snervamento

- $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

- incrudimento, tipi

- isotropo

- cinematico — effetto Bauschinger

- ciclico

- lineare / non lineare

E_s, E_p, E_c

- perf. plast.

- Comportamento EP delle travi (sez. dopp. simmetriche)

- legame M/x non lineare

- eq. di curvatura plastica

- cedimento

- Teoremi dell'Analisi Limit

- statico

- cinematico

- misto

- calcolo del L_k

- Domini di micros. N, n

- Ritorno alla plasticità dei corpi con h' uni

erizzi@uniroma2.it

DIAS - Introd. alla PLASTICITA'
- Comportamento elastoplastico (es. materiali metallici) $\rightarrow$ corrif. a 1D

-
- $E \approx E$ oppure $(D/D)E$
 Damage
- elastic
 vehicles
 in stallions
 non
- $E = \Sigma_e + \Sigma_p$
 decomp. addit.
 in piccole
 deformazioni

Example 2

$f: E \rightarrow F$

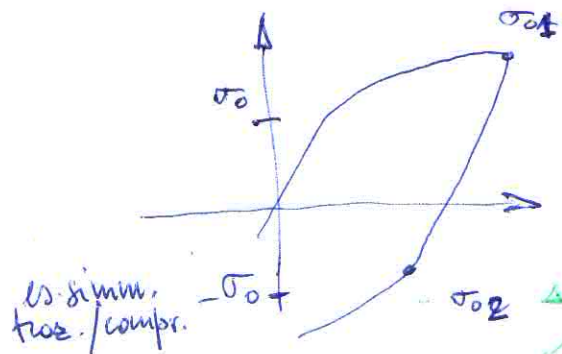
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

y_1, y_2, y_3, y_4, y_5

$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, f(x_4) = y_4, f(x_5) = y_5$

f is not a linear map

- Diagram illustrating the relationship between the rate of change of the order parameter, $\frac{d\sigma}{dt}$, and the order parameter, σ , for different states of the system:
- elastic-plastic:** $\frac{d\sigma}{dt} = F + \frac{d\epsilon}{dt}$ (nonvelocità $\rightarrow$ influenza)
 - elastic:** $\frac{d\sigma}{dt} = E \dot{\epsilon} > 0$ con $\dot{\epsilon} > 0$ (modulo tangente)
 - elastic:** $\frac{d\sigma}{dt} = E \dot{\epsilon} < 0$ con $\dot{\epsilon} < 0$
 - hardening:** $E_t > 0$
 - perfectly-plastic:** $E_t = 0$
 - softening:** $E_t < 0$



v. Effels
Bauschinger

(con σ_2 in genere compresso ha stima
di incrudimento isotropo $\sigma_{oc} = \sigma_{of}$ e
di incrudim. cinematico $\sigma_2 = \sigma_{of} - \Delta\sigma$)

Es. simm. traz./comp. $-\sigma_0$  nuovo limite elastico def.
 del percorso seguito (storia, spuri delle def. plastiche subite)

— legge diretta (incrementale) — legge inversa — Quando univocamente definita
 $\epsilon = \epsilon(\sigma)$ controlla in $\sigma = \sigma(\epsilon)$ (ruolo dell'incrudimento)

(a) $F_t > 0$
módulo
positivo
(hardening)



The graph shows a stress-strain curve. The vertical axis is labeled σ and the horizontal axis is labeled ϵ . The curve starts at the origin, rises linearly to a point labeled σ_0 , and then continues with a shallower slope. A point on the curve is marked with a red dot and labeled $\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma$. A tangent line is drawn at this point, and the slope of this tangent is indicated by a red arrow pointing upwards and to the right.

controls in
deform. ($\Rightarrow$ spot - well
prove)

$$\begin{aligned} \sum \geq 0, \quad \sigma &= E_{+} \sum \geq 0 \\ \sum \leq 0, \quad \sigma &= E_{-} \sum \leq 0 \end{aligned}$$

$$\zeta = \zeta(0)$$

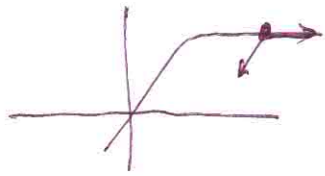
$$\begin{aligned} \dot{\sigma} > 0, \quad \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{E_t} \sigma > 0 \\ \dot{\sigma} \leq 0, \quad \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{E} \sigma \leq 0 \end{aligned}$$

Quando univocamente definiti!
in (ruolo dell'inconcludimento)

entrami univocamente
definiti

Se α è con leptoni
inverso univocamente definito

(b) $E_t = 0$ (plasticità perfetta)



$$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} = 0$$

$$\dot{\epsilon} < 0, \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}$$

ancora univ. def.

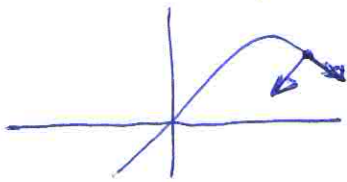
$$\dot{\sigma} > 0 \text{ non amm.}$$

$$\dot{\sigma} = 0, \dot{\epsilon} \geq 0 \text{ arbitrario}$$

$$\dot{\sigma} < 0, \dot{\epsilon} = -\frac{1}{E} \dot{\sigma}$$

non univ. definito

(c) $-\infty < E_t < 0$ (incrudim. negativo)
softening



$$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} < 0$$

$$\dot{\epsilon} < 0, \dot{\sigma} < 0$$

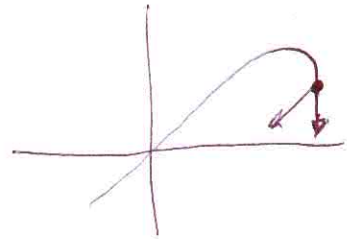
ancora univ. def.

$$\dot{\sigma} > 0 \text{ non amm.}$$

$$\dot{\sigma} < 0, \dot{\epsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma} > 0$$

$$\dot{\epsilon} = -\frac{1}{E} \dot{\sigma} \leq 0$$

(d) $E_t \rightarrow -\infty$ (softening critico) (con limite e livello costantissimo)



$$\dot{\epsilon} > 0 \text{ non amm.}$$

$$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} \leq 0 \text{ arbitr.}$$

$$\dot{\epsilon} < 0, \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}$$

non più univ. def.

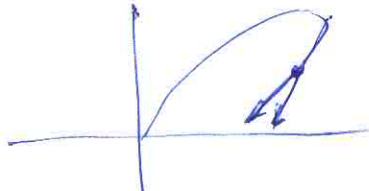
$$\dot{\sigma} > 0 \text{ non amm.}$$

$$\dot{\sigma} = 0, \dot{\epsilon} > 0$$

$$\dot{\sigma} < 0, \dot{\epsilon} > 0$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} < 0$$

(e) $E_t > 0$ (softening subcritico)
in $\dot{\sigma} < 0, \dot{\epsilon} < 0$



$$\dot{\epsilon} > 0 \text{ non amm.}$$

$$\dot{\epsilon} > 0, \dot{\sigma} = 0$$

$$\dot{\sigma} = E_t \dot{\epsilon} < 0$$

$$\dot{\sigma} < 0, \dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} < 0$$

non univ. def.

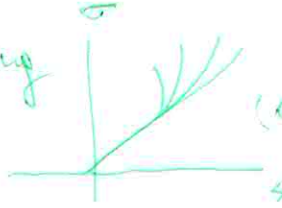
$$\dot{\sigma} > 0 \text{ non amm.}$$

$$\dot{\sigma} = 0, \dot{\epsilon} = 0$$

$$\dot{\sigma} < 0, \dot{\epsilon} = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma}$$

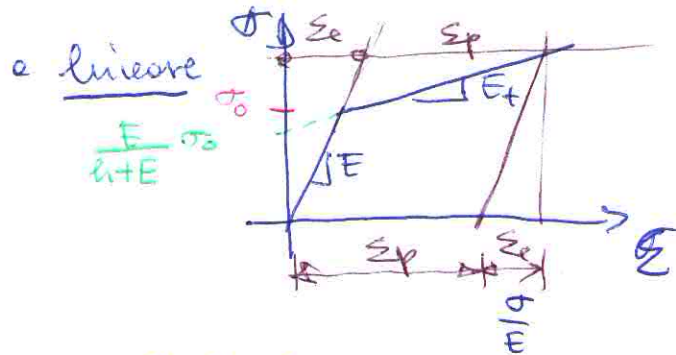
$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma}$$

N.B. $E_t < E \rightarrow$ no locking

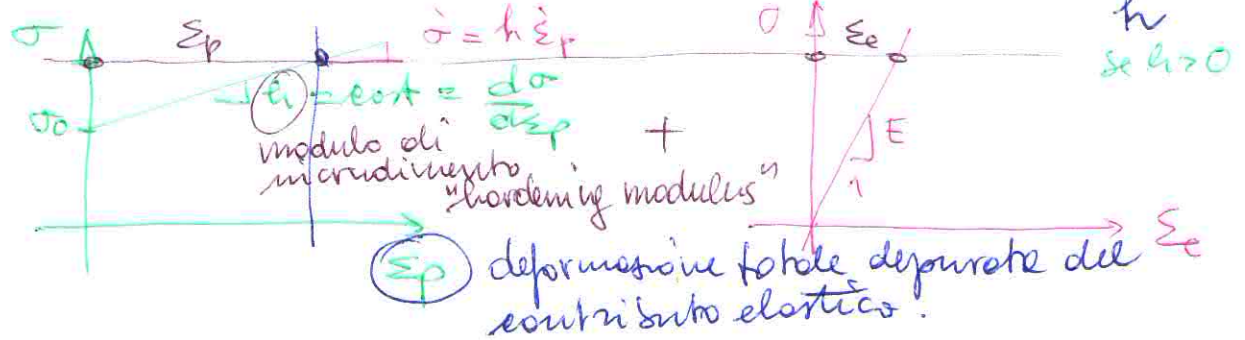


(co. term. biologica)

- Esempi di microdimento



CURVA RIGIDO-PLASTICA



$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p) = E \epsilon_e$$

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}_e = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) \text{ forme incrementale}$$

$$\dot{\sigma} = h \dot{\epsilon}_p = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) = E \dot{\epsilon} - E \dot{\epsilon}_p$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_0}{h} \rightarrow \sigma = \frac{\sigma_0 E h}{h + E} + \frac{h E}{h + E} \epsilon$$

$$= \frac{E}{h + E} \sigma_0 + \frac{h E}{h + E} \epsilon$$

$$E_t = \frac{h}{h + E} E = K E$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{h + E}{E} \dot{\epsilon}_p$$

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{E}{h + E} \dot{\epsilon}$$

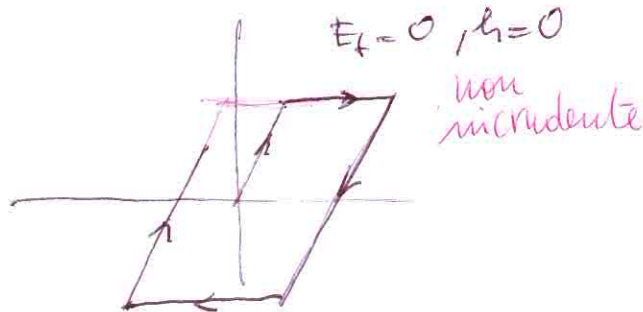
Da cui, nel ramo plastico

$$\dot{\sigma} = E \left(\dot{\epsilon} - \frac{E}{h + E} \dot{\epsilon} \right) = \frac{h E}{h + E} \dot{\epsilon} = E_t \dot{\epsilon}$$

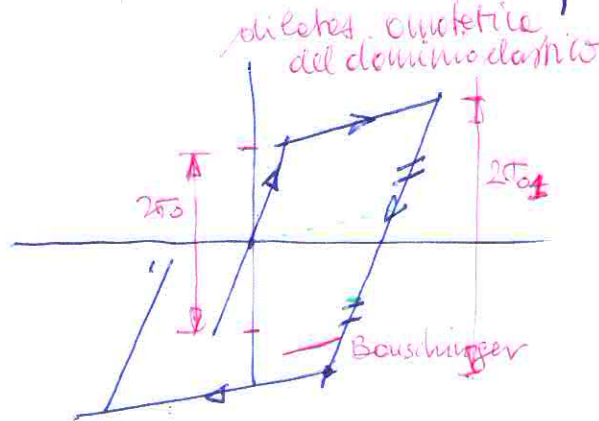
$E_t = E \frac{h}{h + E}$ modulo tangente

$h > -E$ softening

- Perfettamente elastoplastico:



- microdimento isotropo



- microdimento cinematico

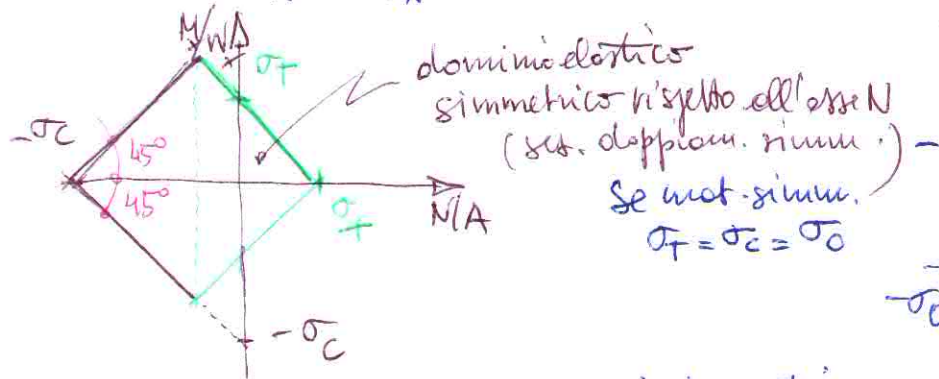


Trave elasto-flostica

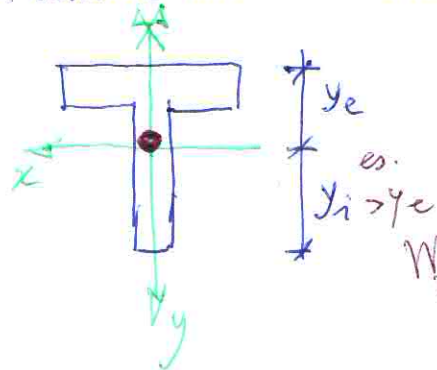
rif. Corradi 2
Cap. 7.4-7.5

Domini elastico

$$-\sigma_c \leq \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_T$$



Sez. avente un unico asse di simmetria



$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_i$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_e$$

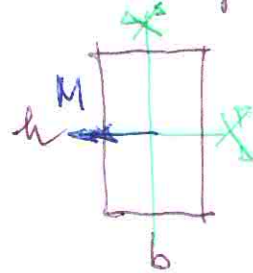
$$W_x = \min \left[W_{xi} = \frac{J_x}{y_i}, W_{xe} = \frac{J_x}{y_e} \right] = \frac{J_x}{y_i} \quad \text{se } y_i > y_e$$

limite elastico per sole

$$N: N_e = \sigma_0 A$$

$$M_x: M_{xe} = \sigma_0 W_x$$

Sez. doppiamente simmetrica
(es. rettangolare)



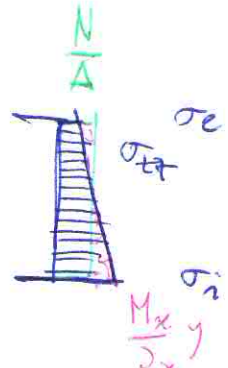
In campo elastico: $-\sigma_c \leq \sigma(y) \leq \sigma_T$
(2) $\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y$ tenso-flessione retta

$$\text{in trazione } \sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x}$$

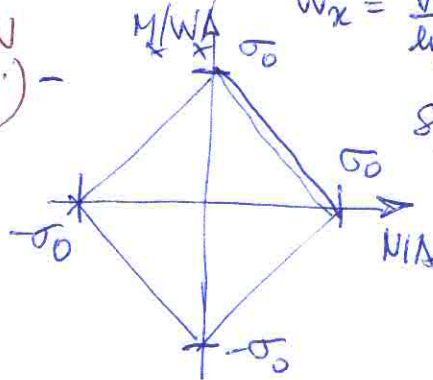
$$\text{in compressione } \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2} = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x}$$

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{2J_x}{h} = 2 \frac{1}{12} b \frac{h^3}{h} = \frac{1}{6} b h^2$$

modulo di resistenza
dalla flessione



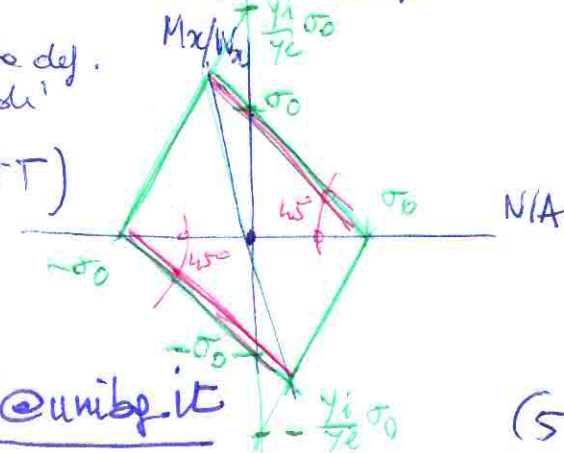
Simmetrica anche rispetto all'asse M_x



$$\text{se } \sigma_T = \sigma_c = \sigma_0$$

$$-\sigma_c \leq \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_T \Rightarrow -\sigma_0 \leq \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_0$$

NON necessario def.
di criterio di
resistenza
(se non e' T)

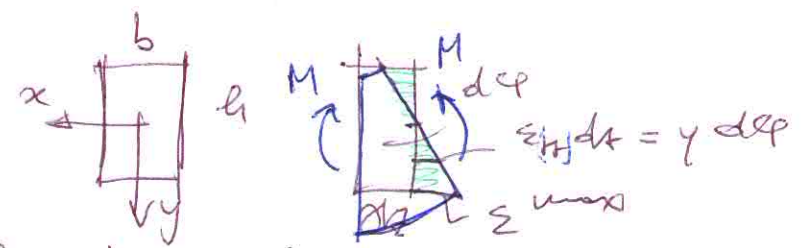
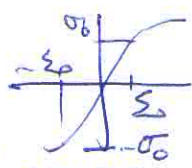


erizzi@unibg.it

(5)

Flessione retta elastoplastica

- Materiale simmetrico $\sigma_F = \sigma_C = \sigma_0$
 primo snerv.
- Set. rett.
- Ip. cinematica: set. piano e l'asse deformato $\Rightarrow$ deform. lineari in y.
- asse u-n $\equiv$ con asse x anche in campo elastico (per la simmetria rispetto ad x) -



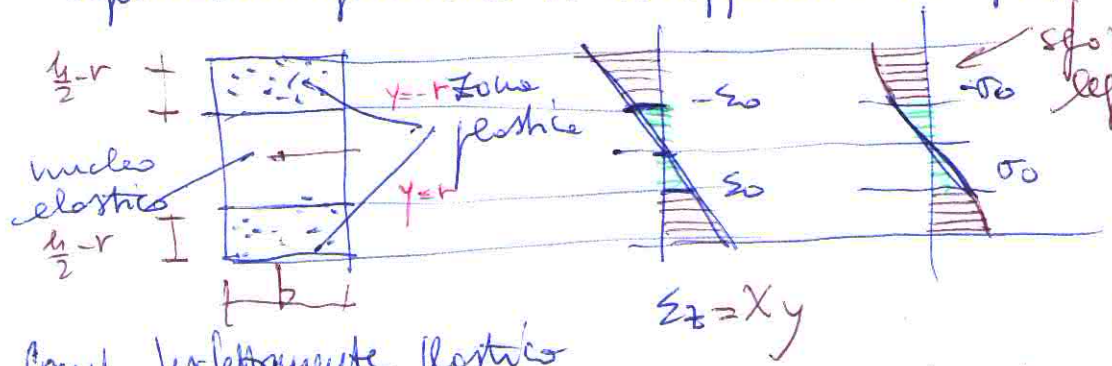
$\epsilon_{max} = y \frac{1}{\rho} = y X$
 curvature

$\epsilon_{max} = X \frac{h}{2} \rightarrow$ oppure $= \frac{\sigma_0}{E} \rightarrow X_e = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E}$
 $X_e = \frac{2}{h} \epsilon_0$

- In campo elastico sin tenuto che $\epsilon_{max} \leq \epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$, con $\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E X y = \frac{M}{J} y$
 pertanto, come ben noto dalle leggi di Bernoulli - Euler - Navier: $X = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ o $M = EJ X$

- Termine delle forze elastiche: $\sigma_{max} = \frac{M}{J} \frac{h}{2} = \frac{M}{W} = \sigma_0 \Rightarrow M_e = W \sigma_0 = \frac{b h^3}{12} \sigma_0$

- oltre M_e , X_e : pur restando lineare (piana) la set, le ϵ_{max} $\frac{h}{2}$ $\frac{\sigma_0}{E}$ $X_e = \frac{M_e}{EJ} = \frac{1}{6} \frac{b h^3}{J} \frac{\sigma_0}{E} = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E}$
 deformazioni plastiche si sviluppano nelle fibre esterne:



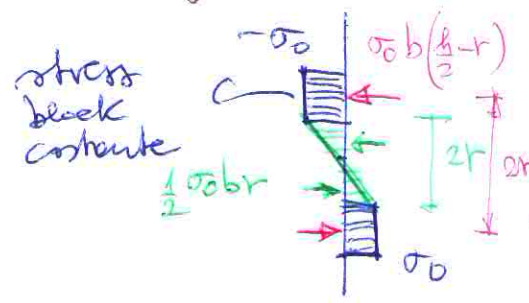
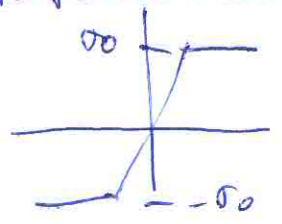
sforzo non lineare, dipendente linearmente dal
 segno costitutivo.

$\epsilon_0 = X r \rightarrow X = \frac{\epsilon_0}{r} = \frac{\sigma_0}{E r}$; $r = \frac{\sigma_0}{E X}$

M da equivalenza statica:

$M = \int_A \sigma_{zz} y dA$ con σ_{zz} da legg. cost. - cinematiche

Comp. perfettamente plastico



$M = \sigma_0 b \left(\frac{h}{2} - r \right) \left(\frac{h}{2} + r \right) + \frac{1}{2} \sigma_0 b r \cdot \frac{2}{3} 2r =$
 $= \sigma_0 b \left[\left(\frac{h^2}{4} - r^2 \right) + \frac{2}{3} r^2 \right] = M_e$
 $= \sigma_0 b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{1}{3} r^2 \right) = \frac{1}{6} b h^2 \sigma_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{h^2} r^2 \right)$
 $\underbrace{\quad}_W$
 eritzi@unibo.it (6)

Sort. $r = \frac{\sigma_0}{E X} \frac{X_e}{X_e} = \frac{\sigma_0}{E \frac{2}{3} X_e} \frac{X_e}{X} = \frac{3}{2} \frac{X_e}{X} \rightarrow \frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{X_e^2}{X^2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{X_e^2}{X^2}$ per $X > X_e$

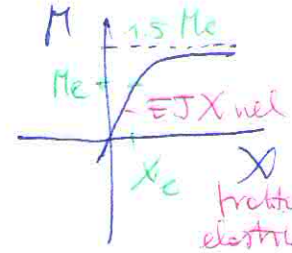
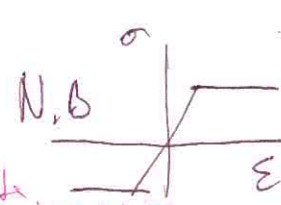
Quindi: legame momento-curvatura in fase elastico-plastica:

$\frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2$ N.B.: per $X \rightarrow \infty$

oppure $\frac{M}{M_e} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2$

confermato che per $X = X_e$, $M = M_e$

per $X > X_e$: ridistribut. di sforzi σ_x , consentiti dalla duttilità del materiale, con conseguente aumento di Π



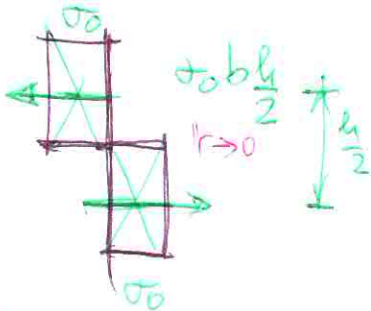
Wsort

con limitazione, per M :

$M_L = M_0 = \lim_{X \rightarrow \infty} M(X) = \frac{3}{2} M_e = \frac{3}{2} W \sigma_0$

momento limite $\rightarrow$ MOMENTO LIMITE

stress block elastico



$M_0 = \sigma_0 \frac{bh}{2} \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$ ✓

raggiunto solo asintoticamente per $X \rightarrow \infty$

o.w.p.

$M_e = W \sigma_0$

W : modulo di resistenza elastico

$M_0 = Z \sigma_0$

Z : " plastico

$Z = 2 S_x$

o.w.p.

$S_x = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$

momento statico di inertia set. rispetto all'asse neutro (asse x)

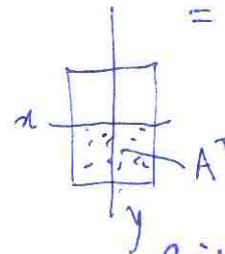
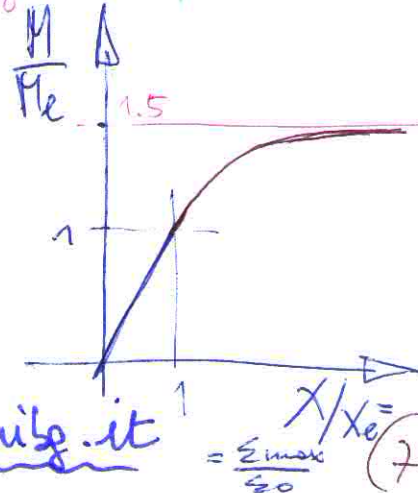
"fattore di forma" - shape factor della sezione trasversale

$\alpha = \frac{M_0}{M_e} = \frac{3}{2} = 1.5$

$= \frac{Z}{W}$

> per sezioni con materiale addensato vicino all'asse neutro

+50% per M_L rispetto a M_e !



brtti@unife.it

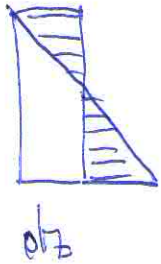
$= \frac{\epsilon_{max}}{\epsilon_0}$

$M_e = \sigma_0 b h \frac{2}{3} \frac{h}{3} = \frac{bh^2}{6} \sigma_0$

$M_0 = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$

- In realtà la curvatura non può essere illimitata (anche se M_0 resta stime efficace del M_{max} che la sezione può sopportare in campo elastoplastico).

- Infatti i limiti di compressione di materiali, nelle parte ^{*} compresse:



$$\epsilon_{min} = \epsilon(y = -\frac{h}{2}) = -X \frac{h}{2} = -1 \Rightarrow X \leq X^* = \frac{2}{h}$$

$$\epsilon dz = -dz \rightarrow \epsilon = -1$$

Quindi

$$\frac{M}{M_0} \leq 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_c}{X^*} \right)^2 = \frac{M^*}{M_0}$$

$$\sim 1 - \frac{1}{3} 10^{-6} = 1 - \frac{0,000001}{3} = 1 - 0,0000003 = 0,9999997 \approx 1$$

$$r \gg \frac{\sigma_0}{E X^*} = \frac{h}{2} \frac{\sigma_0}{E} = r^* \quad (r \text{ non può essere } 0)$$

es. $\frac{\sigma_0}{E} = 10^{-3} \frac{h}{2}$
 $E \approx 1000 \sigma_0$

$$r^* = \frac{h}{2} \frac{X_c}{X^*} \rightarrow \frac{X_c}{X^*} = \frac{2}{h} r^* = \frac{2}{h} \frac{h}{2} \frac{\sigma_0}{E}$$

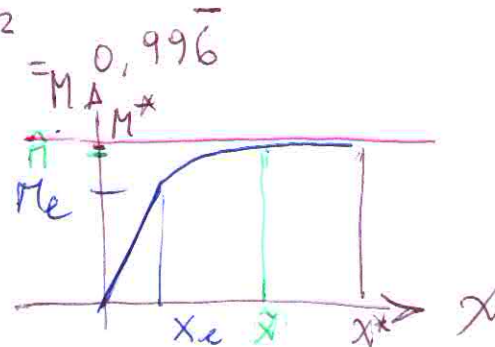
- Limitazione operativa delle def. in all'estremità:

$$\epsilon_{min} \geq -\hat{\epsilon} \Rightarrow -X \frac{h}{2} \geq -\hat{\epsilon} \Rightarrow X \geq \hat{X} = \frac{2}{h} \hat{\epsilon}$$

$$\frac{M}{M_0} \leq 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_c}{\hat{X}} \right)^2 = \frac{\hat{M}}{M_0}$$

$$\sim 1 - \frac{1}{3} 10^{-2} = 0,996$$

$$M_c \approx \hat{M} \approx M^*$$



$$r \geq \frac{\sigma_0}{E \hat{X}} = \frac{h}{2} \frac{1}{\hat{\epsilon}} \frac{\sigma_0}{E} = \hat{r} \quad \frac{\sigma_0}{E} \approx 10^{-3}$$

es. $\hat{\epsilon} = 1\% = 0,01$, con $\frac{E}{\sigma_0} \approx 10^3 \rightarrow \hat{r} = 10^{-1} \frac{h}{2}$
 $= 10^{-2}$

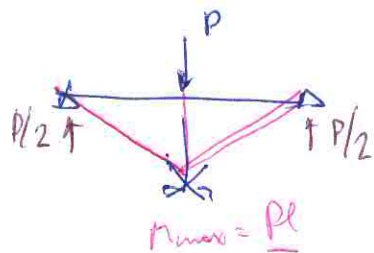
$$\hat{r} = \frac{h}{2} \frac{X_c}{\hat{X}} \Rightarrow \frac{X_c}{\hat{X}} = \frac{2}{h} \hat{r} = \frac{2}{h} \frac{h}{2} \frac{1}{\hat{\epsilon}} \frac{\sigma_0}{E} \approx 10^{-1}$$

- Inoltre, es. per $\epsilon_{max} = 10 \epsilon_0$, $X/X_c = 10$, deform. tollerabile in materiali metallici

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{100} = \frac{299}{300} = 1 - 0,33\%$$

M inferiore solo dello 0,33% 18

Consideriamo trave isostatica



Momento fissato
dal solo equilibrio
(indip. dal legame
costitutivo)

Fasi elastoplastiche:

- $P \leq \frac{4\pi_e}{l} = \left(\pi_{\max} = \frac{Pe}{h} \leq \pi_e \right)$: tutta la trave è in campo elastico
 $= \frac{8}{3} \frac{M_0}{l}$

- $\frac{8}{3} \frac{M_0}{l} < P < \frac{4M_0}{l} \rightarrow$ trave
 plasticizzata ove $\pi > \pi_e$

- $P \rightarrow \frac{4M_0}{l} = P_L$ curvature ser. in messerie
 sempre più grande e teoricamente illimitata

$P_L = \frac{4M_0}{l}$ è il carico di collasso della trave:
 oltre P_L non può più aumentare
 (un aumento di P richiederebbe un
 aumento di $\pi_{\max}$).

Curvature determinate dalle relazioni

$$M(x) = \begin{cases} EJ X & \text{se } X \leq X_e \\ M_e \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{X}{X_e} \right)^2 \right] & \text{se } X \geq X_e \end{cases}$$

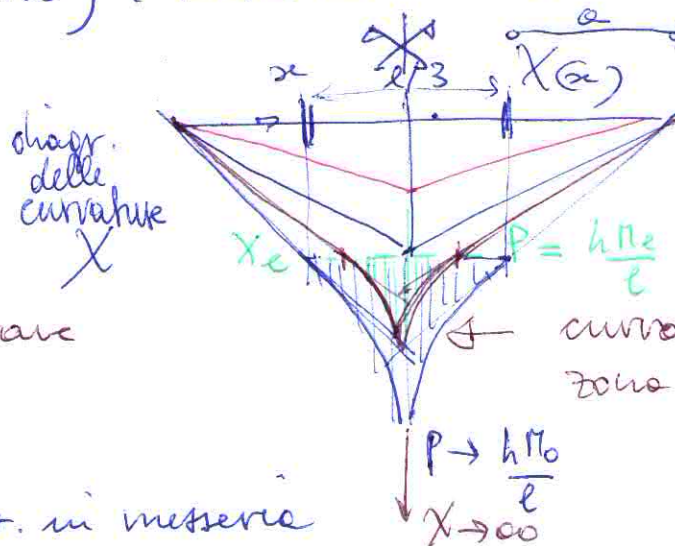
$$M_0 = \frac{3}{2} M_e$$

$$M_e = \frac{2}{3} M_0$$

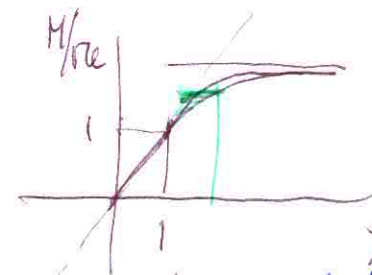
$$M_0 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X}{X_e} \right)^2 \right]$$

$M_0 = \frac{3}{2} M_e$
 $M_e = \frac{2}{3} M_0$

curvature con stesso
andamento di π



curvature > nelle
zone elastoplastiche



Per $P = \frac{4M_0}{l}$

$\frac{P}{2} a = \frac{4M_0}{l} \frac{a}{2} = M_e \Rightarrow a = \frac{M_e}{M_0} \frac{l}{2}$

$\frac{l}{3}$ delle trave plasticizzate = $\frac{1}{3} \frac{l}{2}$
 $= \frac{l}{6}$

Amplissima anche ridotta ma molto
 piuttosto limitato con spostamenti di
 curvature significativi:

per $\frac{V}{\pi/E} > 2$

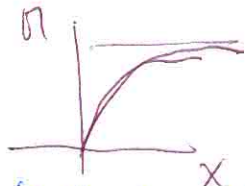
$M > \sim 0,963 M_0$
 valore che si manifesta solo in
 una piccola parte in termini
 della meserie

erizzi@unibz.it

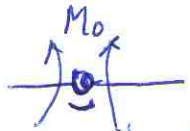
- Appare quindi deciso, ^{ed il fine del calcolo del valore di collasso di P} sopportare la nave ovunque elastica, tranne che nelle situazioni limite $P_{max} \rightarrow P_0$, in un piccolo tratto e cordolo delle messerie ove può essere interpretata come rotaz. relativa tra due tratti elastici di nave

- I poli di cerniera plastica:

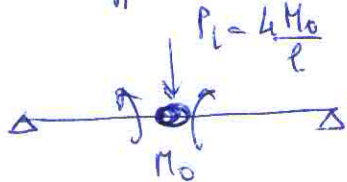
Antiche di esp. non lin.



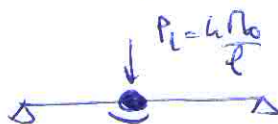
- trasmette mom. flettente cost = M_0



- sviluppa rotazione solo nel verso di plasticizzazione

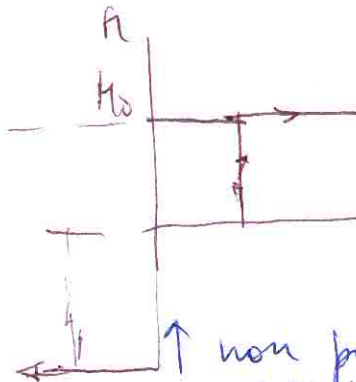
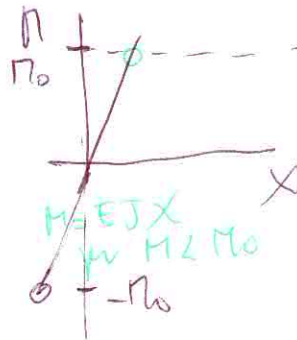


$\equiv$



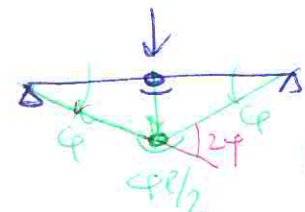
in carico di collasso

legge momento-rotazione rigida-plastica per $M = M_0$



ϕ è una rotazione plastica

non più necessario definire $M-X$ non lin. solo EJ e M_0



meccanismo di collasso (alto di un sistema articolato di corpi rigidi)

$$L_z = -M_0 \cdot 2\phi + P_1 \cdot \frac{\phi l}{2} = 0 \quad \forall \phi$$

$$\Rightarrow P_1 = 4 \frac{M_0}{l}$$

- Situazione tipica dei sistemi isostatici, con M definito dal solo equilibrio. Ove $M = M_0$ si forma cerniera plastica e conseguente meccanismo di collasso.

Non c'è possibilità redistribuzione dei momenti ϕ cose che invece può avvenire nelle strutture iperstatiche.

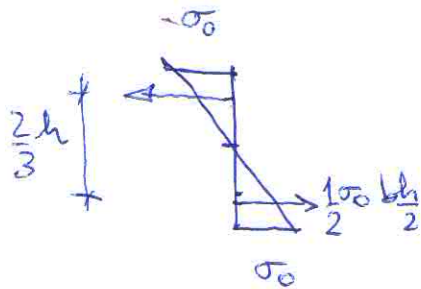
$$P = \lambda P_0$$

λ coefficiente di carico base
 λ moltiplicatore dei carichi

e collasso $\lambda = 5$ = fattore di sicurezza

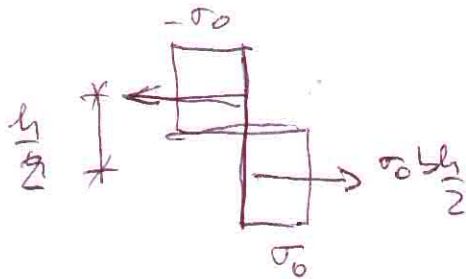
Orizzi@unibg.it

Riassunto (su flessione EP)



$$M_e = \frac{1}{2} \sigma_0 \frac{bh}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{bh^2}{6} \sigma_0 = W \sigma_0$$

$$W_e = W = \frac{bh^2}{6}$$



$$M_L = \sigma_0 \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_0 = Z \sigma_0$$

$$W_p = Z = \frac{bh^2}{4} = 25'$$

$$\frac{h}{2} X_e = \frac{\sigma_0}{E} \Rightarrow X_e = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E} = \frac{2}{h} \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\alpha = \frac{M_L}{M_e} = \frac{Z}{W} = \frac{3}{2} = 1.5$$

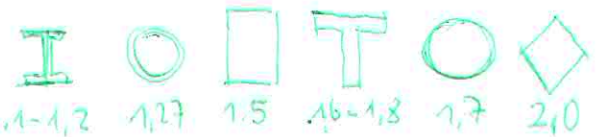
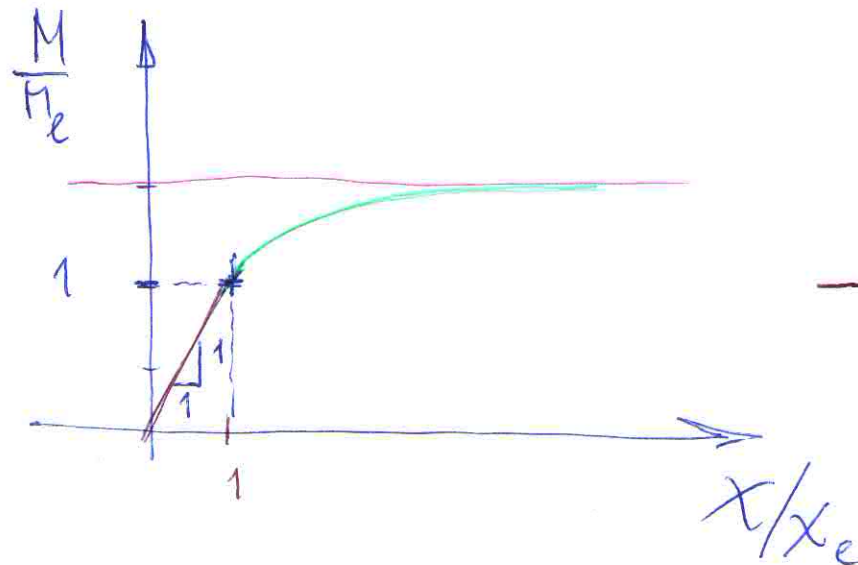
Tratto plastico:

$$\frac{M}{M_e} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2$$

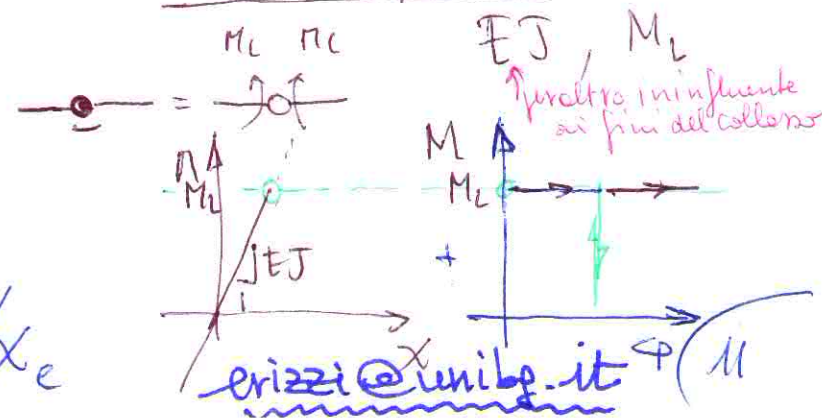
$$\frac{M}{M_L} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{X_e}{X} \right)^2$$

Tratto elastico:

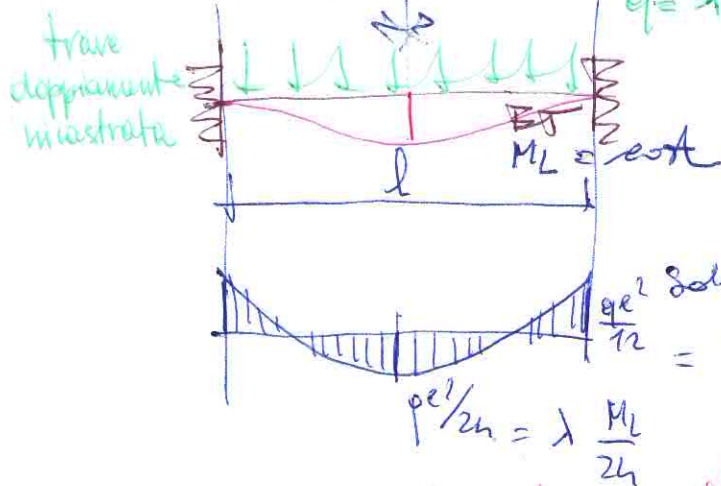
$$\frac{M}{M_e} = \frac{EJ}{M_e} \frac{X}{X_e} = \frac{X}{X_e}$$



Cerniere plastiche



Esempi iperstatici -



$$q = 1 q_0 \text{ or } \lambda = \frac{q}{q_0} = \frac{q l^2}{M_L}$$

$$q_0 = \frac{M_L}{l^2}$$

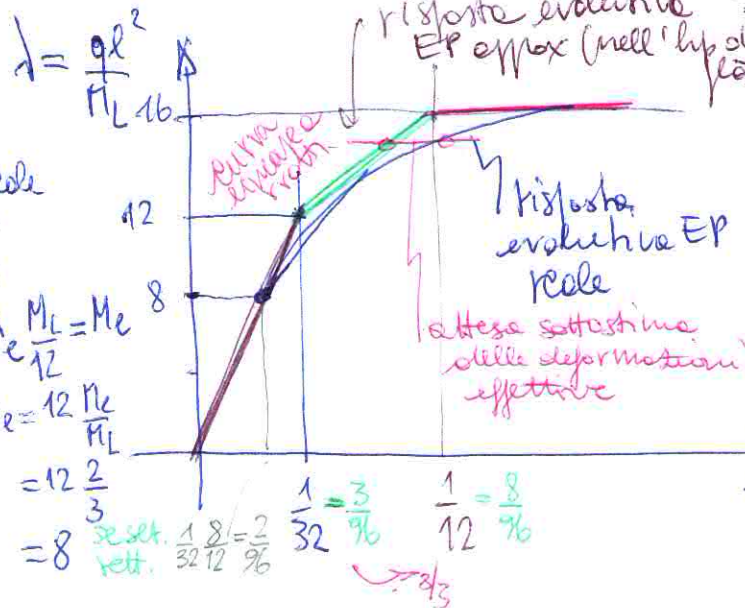
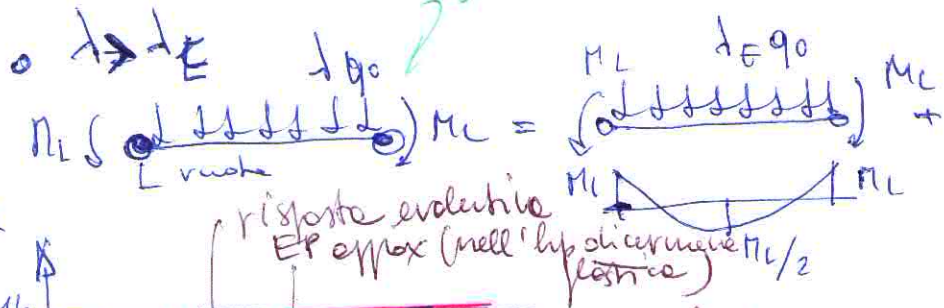
Solus. elastica

$$\frac{q l^2}{12} = \lambda \frac{q_0 l^2}{12} = \lambda \frac{M_L}{12}$$

freccia elastica

$$f = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{EJ} = \frac{1}{384} \lambda \frac{q_0 l^4}{EJ} = \frac{1}{384} \lambda \frac{M_L l^2}{EJ}$$

ore iperstatica



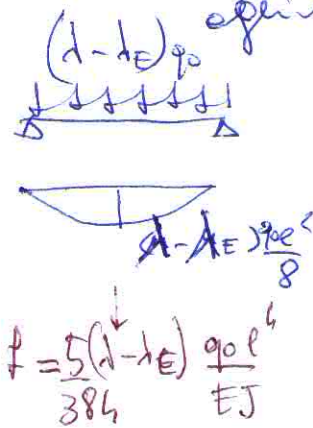
$$f = f_E$$

A collasso

$$f = f_L = f_E + \frac{5}{384} (s - \lambda_E) \frac{q_0 l^4}{EJ}$$

$$= \frac{1}{384} \frac{M_L l^2}{EJ} + \frac{5}{384} \cdot 4 \frac{M_L l^2}{EJ}$$

$$= \frac{8}{96} \frac{M_L l^2}{EJ} = \frac{1}{12} \frac{M_L l^2}{EJ}$$

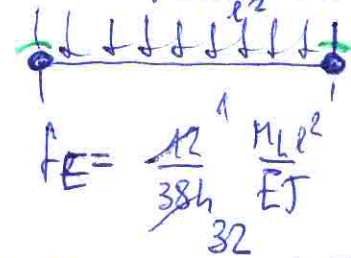


$$f = \frac{5(1 - \lambda_E)}{384} \frac{q_0 l^4}{EJ}$$

- A limite elastico, negli incastri:

$$\frac{1}{E} \frac{M_L}{12} = M_L \rightarrow \lambda = 12 \quad (\text{non e' elastico})$$

moltiplicatore di limite elastico



$$\frac{32}{12} \cdot \frac{12}{64} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

- Ora $M = M_L$ agli incastri ma sono possibili ridistribuzioni di M grazie alle rotazioni plastiche che si sviluppano agli incastri (e momento costante).

$$\Rightarrow M_{max} = \frac{1}{2} M_L + (1 - \lambda_E) \frac{q_0 l^2}{8}$$

A collasso $\lambda = s$

$$M_L = \frac{M_L}{2} + (s - \lambda_E) \frac{q_0 l^2}{8}$$

$$= \frac{M_L}{2} + (s - \lambda_E) \frac{M_L l^2}{EJ \cdot 8}$$

$$\frac{1}{2} M_L = (s - \lambda_E) \frac{M_L l^2}{EJ \cdot 8} \rightarrow s - \lambda_E = 4$$

erizzi@unibp.it

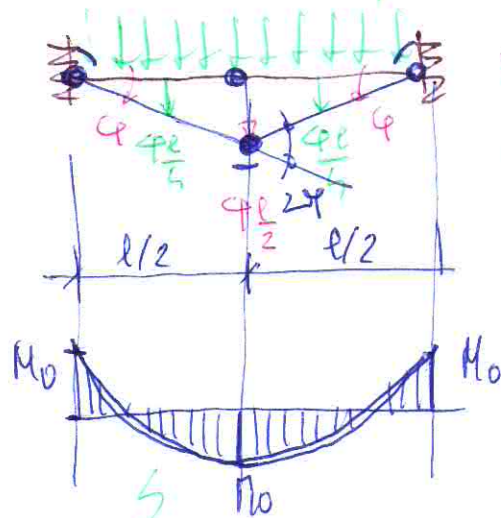
$$s = 4 + \lambda_E = 4 + 12 = 16$$

$$q_L = 16 \frac{M_L}{l^2}$$

NB: λ_E, λ indipendenti da E, I si

$$\leftarrow = 16 + 33\% = \frac{16 \cdot 12}{12} = \frac{1}{3} \quad (12)$$

Meccanismo di collasso:



formazione di un numero di Cerniere plastiche tale da formare una catena cinematica, per effetto di moto virtuali di corpo rigido.

non necessario determinare l'andamento di $M(x)$, si fini delle determinazioni di λ_L .

Equilibrio e collasso nascente: da PLV ($L_e = 0$) o Lechi

$$L_e = -M_L (2\varphi + \varphi + \varphi) + \int \left(\lambda_L q_0 \frac{l}{2} \cdot \frac{\varphi l}{4} \right) dx = 0$$

$$-M_L 4\varphi + \lambda_L \frac{M_L l^2}{l^2} \frac{\varphi}{4} = 0 \quad \forall \varphi$$

$$S = \lambda_L = 16 \quad \text{moltiplicatore di collasso plastico}$$

Momento e collasso

$$\text{ove } M = M_0, \varphi > 0 \\ M = -M_0, \varphi < 0$$

In forma generale:

$$\int_{Str} (\lambda_L q_0) y(x) dx = \sum_{i=1}^n M_{bi} \varphi_i = L_p \quad \text{lavoro plastico dissipato}$$

$$\lambda_L = S = \frac{\sum_{i=1}^n M_{bi} \varphi_i}{\int_{Str} q_0 y(x) dx}$$

Questa relazione consente il calcolo del moltiplicatore di collasso, una volta noto il meccanismo di collasso

$\varphi > 0$ l'atto di moto relativo al meccanismo di collasso comporta valore positivo del lavoro esterno dei carichi base.

ND - si sviluppa un insieme congruente di rotazioni plastiche, ciascuna se

- positive implice $M = M_L^+$
- negative " $M = M_L^-$

- per ogni sezione sono rispettati i limiti di resistenza $M_L^- \leq M \leq M_L^+$

- Vige l'equilibrio tra i carichi esterni $q(x)$ permanenti distribuiti ed azioni interne $M(x)$ ($e T(x), N(x)$) $\downarrow q(x)$ accidentali distribuiti $\downarrow P_i$ " concentrati $\downarrow W_i$ " " "

erizzi@unibo.it

- per carichi accidentali ($S + d > 1$), $d > 0$ in misture "equilibrio dinamico" ed i carichi in "eccesso" compiono lavoro positivo nel meccanismo di collasso (che avviene durante il moto) (1.3)

Teoremi fondamentali del calcolo a rottura (analisi limite)

Definizioni -

- Azioni flettenti $M(x)$
"lecite" o "ammissibili"
 (amm. static. e plastic.)

 - staticamente ammissibili = in equilibrio con i carichi applicati (equilibrate)
 - plasticamente ammissibili = compatibili con la condizione di resistenza

$$M_L(x) \leq M(x) \leq M_U(x)$$

per ogni sezione x

Moltiplicatori $\lambda^- = \varphi$ staticamente ammissibili, tali per cui fanno azioni interne lecite

- Meccanismo o cinetismo
"lecito" o "ammissibile"
 (amm. cinematic. e plastic.)

 - cinematicamente ammissibile = invertiti moltiplicatore $\pi = \pi_L^+$ ove $\varphi > 0$
 $\pi = \pi_L^-$ ove $\varphi < 0$
 compatto e dissip. > 0 ,
 $D = \sum \pi_i \varphi_i$
 - plasticamente ammissibile = insieme di rot. plast. e spost. congruenti e tali da far compiere lavoro positivo ai vincoli (eccid.) interessati da $\lambda: \sum_i \pi_i \varphi_i > 0$

Moltiplicatori $\lambda^+ = \beta$ cinematicamente ammissibili, associati a meccanismo lecito mediante il bilancio energetico:

$$\lambda^+ \sum \pi_i \varphi_i + \int_{sr} p(x) \eta(x) dx + \lambda^+ \int_{sr} q_0(x) \eta(x) dx = \sum_i \pi_i \varphi_i$$

(λ^+ generato, da mecc. amm., come si calcolerebbe λ)

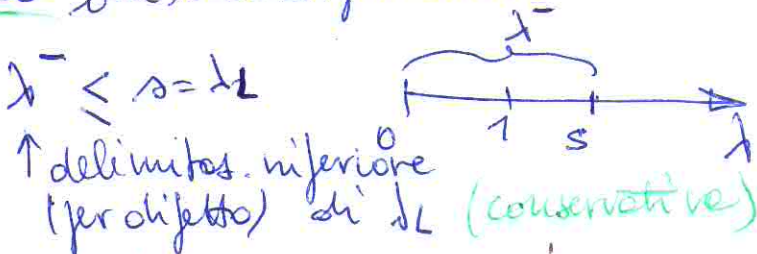
N.B. Il moltiplicatore $\lambda = \lambda^+$ è contemporaneamente staticam. amm. e cinematic. amm.

erizzi@unibg.it

Teorema statico

Il moltiplicatore di collasso $\alpha = \lambda_L$ è il massimo dei moltiplicatori statici ammissibili:

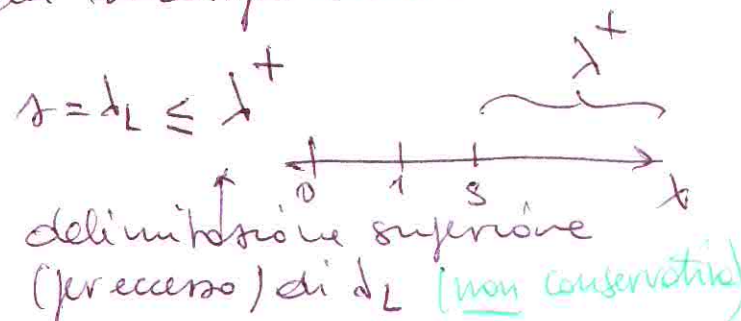
$$\alpha = \lambda_L = \max \{ \lambda^+ \mid \lambda^+ \leq \alpha \}$$



Teorema cinematico

Il moltiplicatore di collasso $\alpha = \lambda_L$ è il minimo dei moltiplicatori cinematicamente ammissibili:

$$\alpha = \lambda_L = \min \{ \lambda^+ \mid \lambda^+ \geq \alpha \}$$



Dim. Th. Statico:

(1) a collasso effettivo

$$\sum_i P_{0i} y_i = \sum_i M_{Li}^+ \varphi_i + \sum_i M_{Li}^- \varphi_i$$

quantità cinematiche e collasso
statiche statiche ammissibili

(2) **PLV**

$$\lambda^- \sum_i P_{0i} y_i = \sum_i M_{Li}^+ \varphi_i + \sum_i M_{Li}^- \varphi_i$$

sempre e collasso

$$(\alpha - \lambda^-) \sum_i P_{0i} y_i = \sum_i (M_{Li}^+ - M_{Li}^-) \varphi_i + \sum_i (M_{Li}^- - M_{Li}^+) \varphi_i \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq \lambda^-$$

α è ammissibile "statico" (cioè $\alpha \leq \lambda_L$), allora

$$\alpha = \max \{ \lambda^- \}$$

in (1) e (2) quantità cinematiche
ideali min. di collasso effettivo

erizzi@unibg.it

Din. Th. Cinematics

quantità statiche del cinem. am.

(1) meccanismo
fittizio

$$\lambda^+ \sum_i P_{oi} \gamma_i = \sum_i \underbrace{\pi_{Li}^+}_{\geq 0} \varphi_i + \sum_i \underbrace{\pi_{Li}^-}_{\leq 0} \varphi_i$$

quant.
cinem. meccanismo
ammissibile
statiche e collari

(2)

$$\sum_i P_{oi} \gamma_i = \sum_i \pi_i \varphi_i + \sum_i \pi_i \varphi_i$$

sempre cinem. ammissibile

in (1) quantità cinem. di
mecc. ammissibile

$$(\lambda^+ - S) \sum_i P_{oi} \gamma_i = \sum_i (\underbrace{\pi_{Li}^+ - \pi_i}_{\geq 0}) \varphi_i + \sum_i (\underbrace{\pi_{Li}^- - \pi_i}_{\leq 0}) \varphi_i \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^+ - S \geq 0 \Rightarrow \boxed{S \leq \lambda^+}$$

ma S è ammissibile "cinematica" (cioè $S \leq \lambda^+$), allora

$$S = \min \{ \lambda^+ \}$$

Teorema unificato

In una struttura (e telaio), soggetta a dati carichi, se si trova una distribuzione ammissibile di momenti che reggano π_L^+ in un numero di sezioni tali da rotazioni portiche in esse appartengano ad un mecc. ammissibile (quindi con segno $\varphi \equiv$ segno π_L^+), allora λ è il moltiplicatore limite.

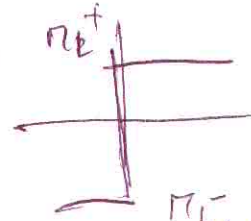
DIM: un tale fattore è tra λ^- e λ^+ e poiché $\lambda^- \leq \lambda_L \leq \lambda^+$
 $\lambda_L \in \lambda^+, \lambda_L \in \lambda^- \} \Rightarrow \lambda = \lambda_L$

Corollari

1° - la capacità portante delle strutture ^{risultante} è indep. dalle proprietà elastiche del materiale.

Da th. statico, la capacità di materiale che interviene è $\pi_L^{\pm}$ (vedi σ_0) - e cinem.

Si può enunciare legge ripubb-platea:



2° - la capacità portante delle strutture ^{risultante} è indep. da stati di coesione (deform. termiche, cedimenti vincolari, tensioni residue)

Da th. cinematico
e statico

quantità statiche non
da queste coes. influenzate

(coazioni ineq. sotto carichi nulli). Non
intervengono nelle def. dei t.

Anche β non influent., in quanto det. univ.
dal bilancio tra lavoro esterno e potenziale dissipato
nell'atto di moto del cinemotismo.

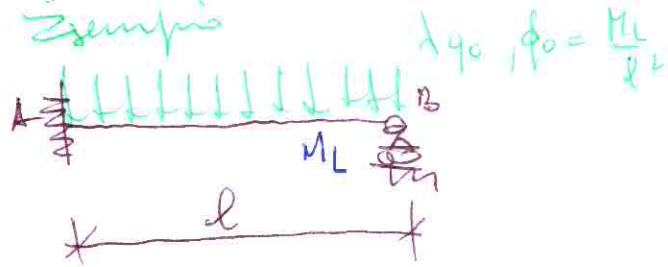
(però modificano il
Camp EP e le deform.
e collasso iniziale)

erizzi@unibg.it

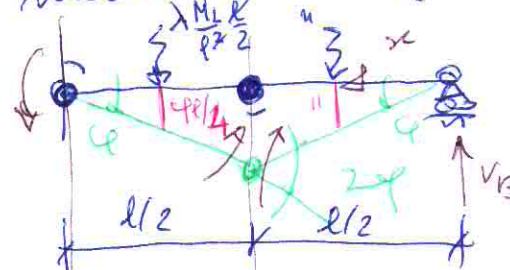
Calcolo del moltiplicatore di collasso -

$\lambda_c = 5$ è il solo che risulti staticamente e cinematicamente ammissibile. - Per sistemi strutturali non troppo complessi (travi, telai), ciò consente la determinazione di λ_c mediante metodi di calcolo "manuali" -

Esempio

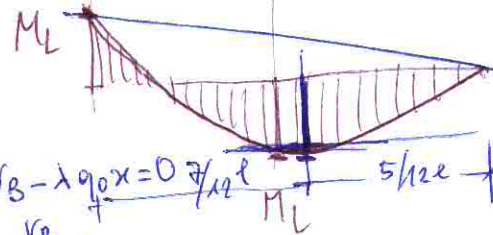


Si vuole un moltiplicatore $\lambda^+ = \beta$ nella fase del meccanismo: (non è quello fisico)



$$\sum \lambda \frac{M_L}{x} \phi = M_L (\phi + 2\phi) \quad \forall \phi$$

$\lambda = \lambda^+ = 12$ è l'ultimo sup. di λ



- Verifica delle condizioni di M.

$$M_{max} \left(\frac{5}{12} l \right) = -\frac{q_0}{2} \frac{5}{12} l + \frac{6 q_0}{l^2} \frac{5}{12} l \left(l - \frac{5}{12} l \right)$$

$$= M_L \left(-\frac{5}{12} + \frac{5}{2} - \frac{25}{24} \right) = \frac{-10 + 60 - 25}{24} M_L$$

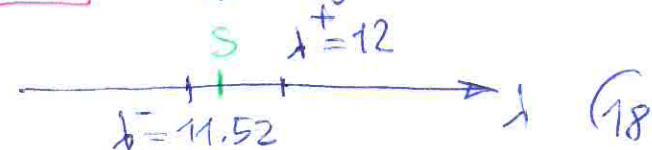
$$= \frac{25}{24} M_L > M_L \quad \text{conformità violata!}$$

Ammissibili $\frac{M_{max}}{M_L} = \frac{25}{24} = \rho_m$ λ^+ non anche λ^- quindi non è 5

- Riducendo M di $1/\rho_m$ si ottiene il rispetto delle condizioni, con $\frac{M}{M_L}$ in equil. con $\lambda = 12/\rho_m$, cioè

$$\lambda^- = \lambda^+ / \rho_m = \frac{12 \cdot 24}{25} = \frac{288}{25} = 11,52$$

tratte dellimitatorie (più probato stretto)



- Calcolo i momenti flettenti nel rispetto dell'equilibrio

$$V_B l = \lambda q_0 l \frac{l}{2} + M_L = 0$$

$$V_B l = \lambda \frac{M_L}{\frac{l^2}{2}} - M_L = \frac{\lambda - 2}{2} M_L$$

$$V_B = \frac{\lambda - 2}{2} \frac{M_L}{l}$$

$$\rightarrow T=0 \quad \text{ove}$$

$$T = V_B - \lambda q_0 x = 0 \quad \forall x$$

$$x_m = \frac{V_B}{\lambda q_0} = \frac{\lambda - 2}{2} \frac{M_L}{l} \frac{l^2}{2} \frac{1}{M_L} = \frac{\lambda - 2}{2} \frac{l}{\lambda}$$

$$x_m = \frac{\lambda - 2}{2\lambda} l \quad \text{per } \lambda = 12 = \frac{10}{24} l$$

$$M(x) = V_B \cdot x - \lambda q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{\lambda - 2}{2} \frac{M_L}{l} x - \lambda \frac{M_L}{l^2} \frac{x^2}{2}$$

$$= -\frac{M_L}{l} x + \frac{\lambda}{2} \frac{M_L}{l^2} x (l - x) = -\frac{M_L}{l} x + \frac{6 M_L}{l^2} x (l - x)$$

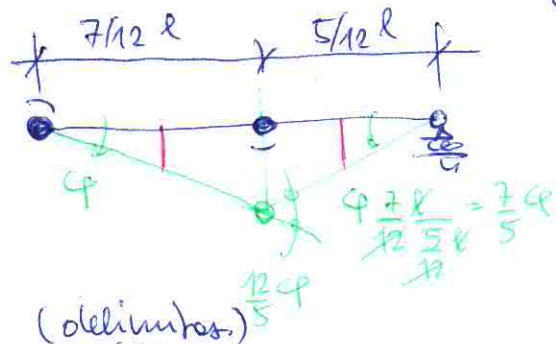
$$\text{in } x = \frac{l}{2}$$

$$= -\frac{M_L}{l} \frac{l}{2} + \frac{\lambda}{2} \frac{M_L}{l^2} \frac{l}{2} \frac{l}{2} = \frac{M_L}{2} \left(\frac{\lambda}{4} - 1 \right) = \frac{M_L}{2} \left(\frac{12}{4} - 1 \right)$$

$$= \frac{M_L}{2} x = M_L \quad \text{OK}$$

luzzi@unibo.it

- Se delimitato. non ritenute suff., si considera nuovo cinematicismo, con c.p. in x_m .



$$\lambda^+ \frac{M_L}{l^2} \frac{7}{12} l + \lambda \frac{M_L}{l^2} \frac{5}{12} l = M_L \left(1 + \frac{12}{5} \right)$$

$$\lambda^+ \left(\frac{1}{2} \frac{7}{12} \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \frac{7}{2} \frac{1}{12} \right) = \frac{17}{5}$$

$$\lambda^+ \frac{17}{2 \cdot 144 \cdot 12} = \frac{17}{5} \Rightarrow \lambda^+ = \frac{17}{5} \cdot \frac{2 \cdot 12}{7} = \frac{408}{35} = 11.657142$$

Ora stima λ^+ più migliorata:

$$11.52 \leq S \leq 11.657142$$

- se non suff. si considera movimento $M(x)$ in equil. con λ^+ e se ne valuta la conformità, risolvendo movimento $M < \lambda^+$.

$$x_m = \frac{\lambda - 2}{2\lambda} l = 0.4142156 l, \quad 1 - x_m/l = 0.5857844$$

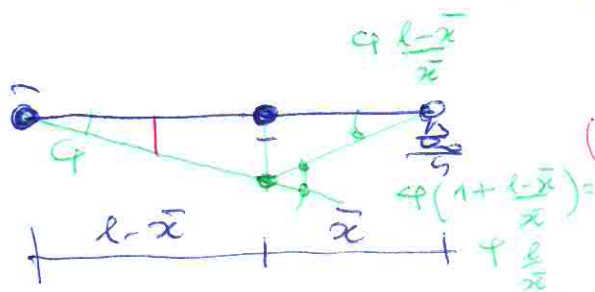
$$M_{max} = \frac{M_L x_m}{l} \left(-1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_m}{l} \right) \right) = M_L \underbrace{1.0000348}_{e_m} = \frac{M_L}{0.9999652} \rightarrow \lambda^- = \lambda^+ / e_m = 11.656736$$

Ora, λ^- è delimitazione ancora stretta:

$$11.656736 \leq S \leq 11.657142 \rightarrow$$

$S = 11.657$ è stima ancora ragionevole

- Per trovare valore esatto, si suppone la cerniera in comune a $\bar{x}$ incognita.



$$\lambda_L \frac{M_L}{l^2} (l - \bar{x}) \frac{l - \bar{x}}{2} + \lambda_L \frac{M_L}{l^2} \bar{x} \frac{\bar{x}}{2} = M_L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}} \right) = M_L \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}}$$

$$(l - \bar{x}) \lambda_L \left[(l - \bar{x}) + \bar{x} \right] = 2l^2 \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}}$$

$$\lambda_L l (l - \bar{x}) = 2l^2 \frac{l + \bar{x}}{\bar{x}} \Rightarrow \boxed{\lambda_L = 2 \frac{l}{\bar{x}} \frac{l + \bar{x}}{l - \bar{x}}} \quad (*)$$

erizzi@unibg.it

check: $\bar{x} = \frac{l}{2}, \lambda_L = 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 12$ ok (19)

- Si vuole ora che, in $\bar{x}$, sia anche M_{max} , cioè $\bar{x} = x_m = \frac{l-2}{2\lambda} l$

$$\text{e } 2\lambda \bar{x} = l - 2l$$

$$\lambda(2\bar{x} - l) = -2l \rightarrow \lambda(l - 2\bar{x}) = 2l$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2l}{l-2\bar{x}}} \quad (*)$$

Sostituendo i due λ trovati si ottiene:

$$\frac{2l}{l-2\bar{x}} = \frac{l}{\bar{x}} \frac{l+\bar{x}}{l-\bar{x}}$$

$$\bar{x}(l-\bar{x}) = (l+\bar{x})(l-2\bar{x})$$

$$l^2 - 2l\bar{x} + l\bar{x} - 2\bar{x}^2 - l\bar{x} + \bar{x}^2 = 0$$

$$-\bar{x}^2 - 2l\bar{x} + l^2 = 0$$

$$\bar{x}^2 + 2l\bar{x} - l^2 = 0 \rightarrow \left(\frac{\bar{x}}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{l}\right) - 1 = 0 \rightarrow \left(\frac{\bar{x}}{l}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1}}{1} = -1 \pm \sqrt{2} \begin{cases} \sqrt{2}-1 \\ -1-\sqrt{2} \end{cases}$$

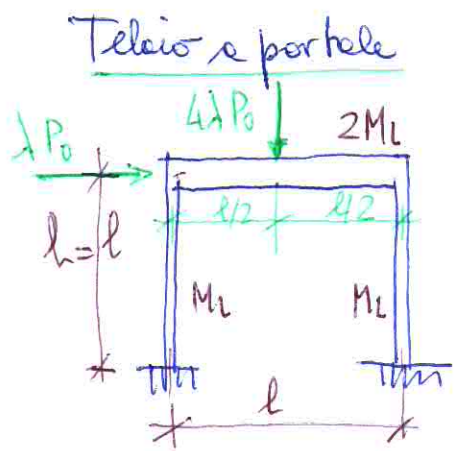
quindi, e allora:

$$\frac{\bar{x}}{l} = \sqrt{2}-1 = 0,4142135 \quad \text{e} \quad 1 - \frac{\bar{x}}{l} = 0,5857865$$

$$\text{ovvero } \lambda = \frac{2l}{l-2(\sqrt{2}-1)l} = \frac{2l}{l-2\sqrt{2}l+2l} = \frac{2}{3-2\sqrt{2}} = \frac{2(3+2\sqrt{2})}{9-8} = 2(3+2\sqrt{2}) = \boxed{11,656845} = S$$

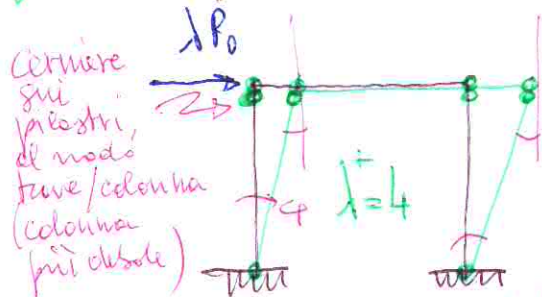
$$\text{idem da } (*) \quad \lambda = 2 \frac{1}{\sqrt{2}-1} \frac{1+\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2-2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4} = \frac{2}{3-\sqrt{2}} \quad \text{ok} = \frac{2}{3-2\sqrt{2}}$$

erizzi@unibg.it



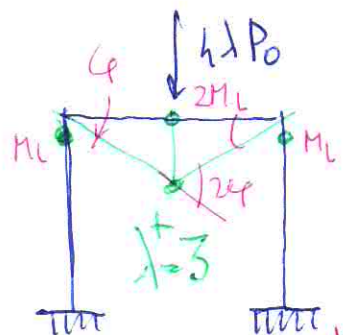
$P_0 l = M_L$
 $P_0 = \frac{M_L}{l}$

Delimitazioni superiori λ^+ possono essere ottenute considerando alcuni meccanismi potenziali:



$\lambda P_0 l = 4 M_L \Rightarrow \lambda^+ = 4 \frac{M_L}{P_0 l} = 4$
 (compie solo il carico orizzontale)

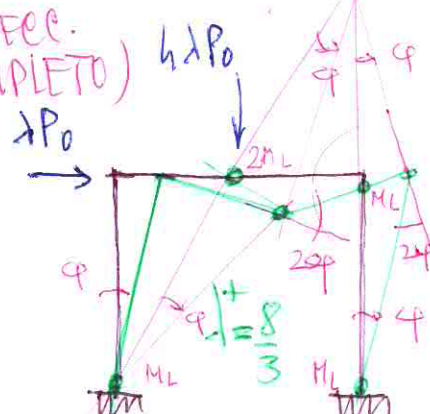
erizzi@unibp.it



meccanismo di parete

$2 \lambda P_0 \cdot \frac{1}{2} l = 2 M_L \cdot \frac{1}{2} l + 2 M_L \cdot \frac{1}{2} l$
 $2 \lambda P_0 l = 6 M_L \Rightarrow \lambda^+ = 3$

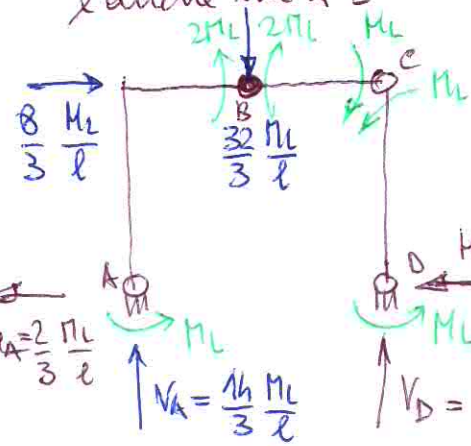
(compie solo il carico verticale)



$\lambda P_0 l + 4 \lambda P_0 \frac{1}{2} l =$
 $= M_L (l + l) + 2 M_L \cdot \frac{1}{2} l$
 $= 8 M_L$
 $3 \lambda P_0 l = 8 M_L \Rightarrow \lambda^+ = \frac{8}{3}$

è il minore tra quelli finora calcolati, cioè il più vicino a $\lambda_L = 5$:
 $\lambda_L = 5 \leq 2.667$

Il moltiplicatore limite è l'unico a risultare contemporaneamente cinematicamente e staticamente ammissibile. Si verifica quindi se l'ultimo λ^+ trovato è anche un λ^- .



Si determina la distribuzione di momenti in equilibrio coi carichi dati (incluse coppie nelle cerniere plastiche).

$\sum M_C = 0 \Rightarrow H_D = 2 M_L / l$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = \frac{2}{3} M_L / l$

$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_D = \frac{(2-1) M_L + 2 M_L}{l/2} = \frac{3 M_L}{l/2} = \frac{6 M_L}{l} = \frac{18}{3} \frac{M_L}{l}$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{(2+1) M_L - 2/3 M_L}{l/2} = \frac{7/3 M_L}{l/2} = \frac{14}{3} \frac{M_L}{l}$

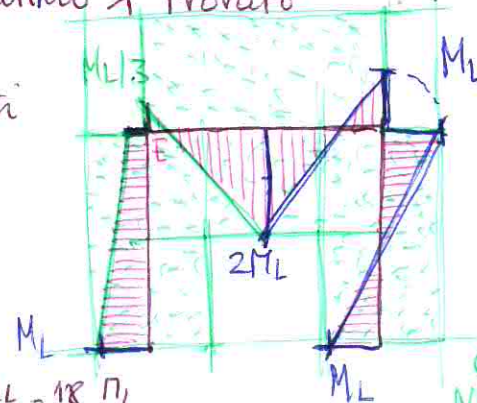


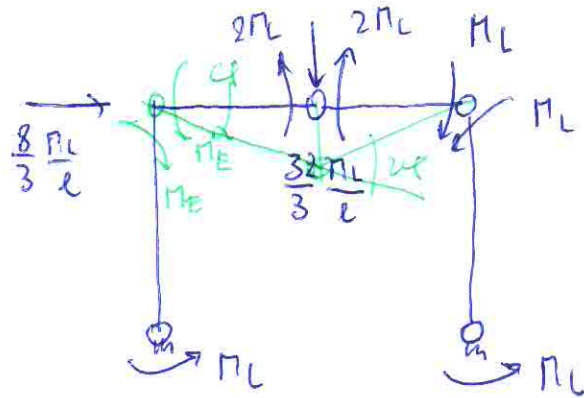
Diagramma ovunque conforme ∇ , quindi λ^+ è anche λ^- . Pertanto

$\lambda_L = 5 = \frac{8}{3} = 2.667$

NB. Con 4 cerniere plastiche, strutture ipostatiche al collasso, incipiente $\rightarrow$ Meccanismo determinato dal solo equilibrio.

serve per calcolare M_E

Momento in E calcolabile senza RV, da PLV ($L_e = 0$) (Calcolo chirurgico, al fine di verificare il rispetto della conformità).



Mass. di trovare:

$$L_e = -M_E \cancel{4} + 2M_L \cancel{2} - M_L \cancel{4} + \frac{32\pi L}{3} \cancel{\frac{l}{2}} = 0, \quad \cancel{4} \quad \text{16}$$

$$M_E = \left(-5 + \frac{16}{3}\right) M_L = \frac{1}{3} M_L \quad (\text{è conforme, cioè } \leq M_L)$$

Osservazioni

lvizzi@uni.bg.it

- Il moltiplicatore di collasso $\lambda_1 = 5$ può essere calcolato direttamente, evitando la completa analisi evolutiva della struttura (fornisse le risposte carico/spostamento del sistema).
- Il calcolo di un moltiplicatore cinematico $\lambda^+ = \beta$ è piuttosto agevole, facendo riferimento a cinematismi ragionevoli - il min. tra i valori λ^+ trovati delimita superiormente il λ_1 .
Con esso si identifica se il λ^+ risulta poi anche un moltiplicatore statico λ^- : $\lambda^- = 5 = \lambda^+$.
- Se il cinematismo scelto presenta solo un gdl, il bilancio energetico $\delta L_{eq} = 0 \Rightarrow \lambda^+ = D/L_{eq}$ impone univocamente l'equil. e collasso incipiente. Pur non essendo richiesto di considerare solo meccanismi plastici con un gdl, operando con meccanismi ad un gdl per ogni λ^+ è possibile associare una soluzione equilibrata. Questo rispetta la conformità nelle cerniere plastiche ma non necessariamente d'arco (poiché un λ^+ non è necessariamente un λ^- , altrimenti avremmo già trovato il λ_1).
- A volte il cinematismo rende la struttura staticamente determinata (MECCANISMO COMPLETO). In tal caso è possibile ricostruire univocamente i momenti in equilibrio col λ^+ e quindi verificare se la conformità è rispettata, cioè se λ^+ è anche λ^- , vale o div. λ_1 . In altri casi il meccanismo coinvolge una parte della struttura (MECCANISMO PARZIALE) e questo può risultare iperstatico: l'equil. è soddisfatto per $\forall$ valore delle iperstatiche residue; la soluz. è static. amm. se è possibile assegnare alle iperstatiche valori tali da soddisfare ovunque la conformità.
- Il metodo di calcolo "manuale" del moltiplicatore limite λ_1 o di delimitas. λ^+, λ^- possono essere affinati ma sono scarsamente sistematici e la soluzione dipende dallo specifico pb. in esame.
- Metodi generali per la valutazione di λ_1 si basano su tecniche di Programmazione Matematica (Ricerca Operativa) che calcolano il $\max$ o il $\min$ di una funzione (obiettivo), all'interno di un determinato dominio definito da vincoli sulle variabili (OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA). Il pb. si dice di Programmazione Lineare quando f. obiettivo e vincoli sono lineari nelle variabili. Soluz. es. mediante metodo del simplesso. (27)