Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

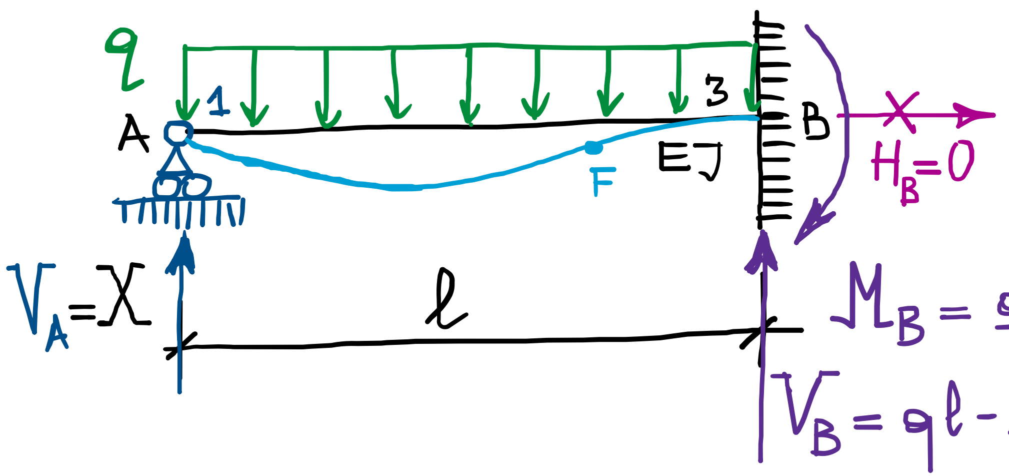
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 10

Risoluzione di strutture iperstatiche (tramite LE)



$M_B = \frac{ql^2}{2} - Xl$

$V_B = ql - X$

gdv $= 3+1 = 4$

gdl $= 3$

non labile

1 volta iperst.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0 \text{ static. determinata} \\ \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -V_A l + ql\frac{l}{2} - M_B = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - ql = 0 \end{cases}$$

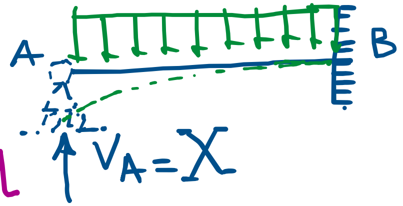
2 eq.ni in 3 incognite (V_A, V_B, M_B) pb staticam. indeterm.

Scelta dell'incognita iperstatica ("metodo delle forze") $\Rightarrow X$ agente in corrispondenza del vincolo ritenuto ridondante (o sovrabbondante (cioè in eccesso, esubero)) $\Rightarrow RV = RV(q, X)$ nel rispetto dell'equilibrio.

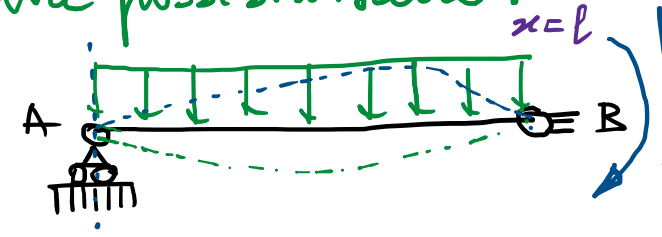
$$\left.\begin{aligned} 3^a \text{ eq.ne} &\Rightarrow V_B = ql - X \\ 1^a \text{ eq.ne} &\Rightarrow M_B = \frac{ql^2}{2} - Xl \end{aligned}\right\} RV(X)$$

Condizione di congruenza:

$V_A = X \Rightarrow \boxed{v_A = 0} \Leftrightarrow$

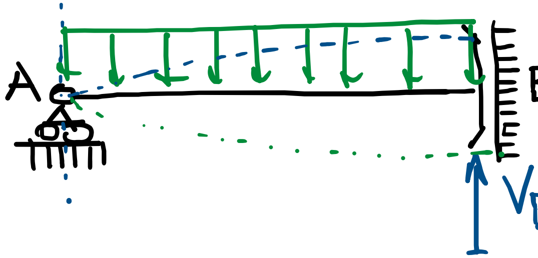


Altre possibili scelte: (basate sulle RV)



$M_B = Y$

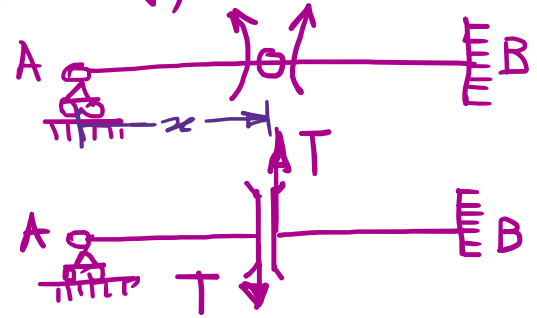
$\varphi_B = 0$



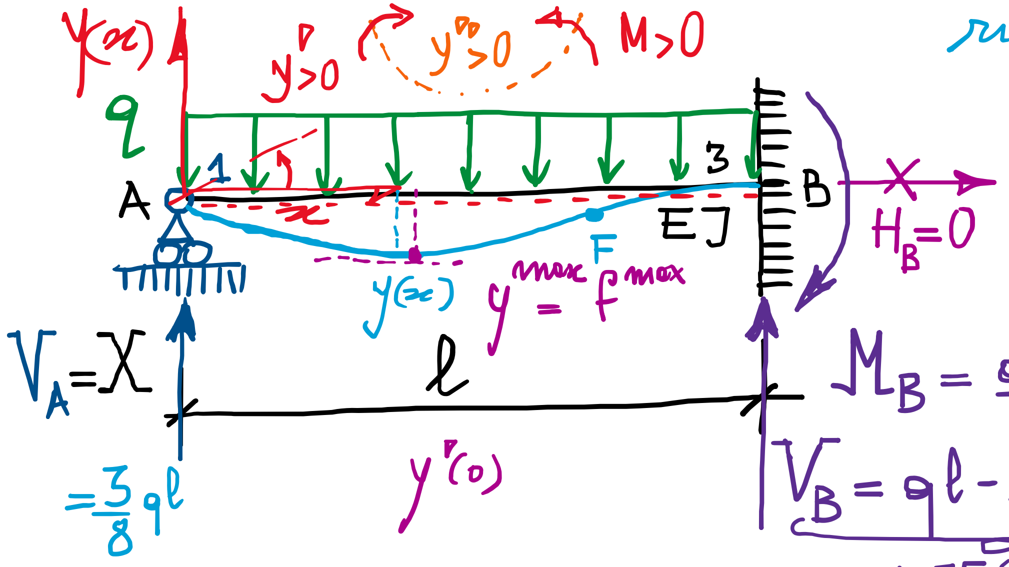
$v_B = 0$

$V_B = Z$

(basate su AI) M M



infinite scelte $\forall x$



rigidezza flessionale (cost)

equilibrio "locale"

rif. locale : $EJ\, y''(x) = M(x) = -\frac{qx^2}{2} + Xx$ — eq.ne differenz. della LE al 2° ord.

$\int dx$

$EJ\, y'(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{Xx^2}{2} + A_1$

$\int dx$

$EJ\, y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{Xx^3}{6} + \underbrace{A_1 x + \cancel{A_2}}_{\text{comp. di moto rigido}}$

$M_B = \frac{ql^2}{2} - Xl = \frac{ql^2}{8}$

$\underbrace{V_B = ql - X = \frac{5}{8}ql}_{RT(X)}$

equil. "globale"

y(x) nota a meno di 3 incognite : $X; A_1, A_2$

(Individuazione)

Scrittura delle condizioni al contorno (c.c.) $[x=0, x=\ell]$

$$\begin{cases} \boxed{v_A = 0} & \text{carrello in A (gdv sovrabbondante)} \\ v_B = 0 \\ \varphi_B = 0 \end{cases} \text{incastro in B}$$

"fisiche"

⇒

Imposizione delle c.c :

$$\begin{cases} y(0)=0 \quad \cdots\rightarrow \quad A_2 = 0 & (1) \\ y(\ell)=0 \Rightarrow -\frac{q\ell^4}{24} + \frac{X\ell^3}{6} + A_1\ell + A_2 = 0 & (2) \\ y'(\ell)=0 \Rightarrow -\frac{q\ell^3}{6} + \frac{X\ell^2}{2} + A_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

sistema delle c.c. (algebrico, nelle incognite $X; A_1, A_2$)

Dalla (3) : $A_1 = \frac{ql^3}{6} - X\frac{\ell^2}{2} = \underbrace{A_1(X)}$

Dalla (2) : $A_2 = \frac{ql^4}{24} - X\frac{l^3}{6} - \left(\frac{ql^3}{6} - X\frac{\ell^2}{2}\right)\ell = A_2(X) \overset{\text{Dalla (3)}}{=} 0$

Eq.ne di congruenza $y(0)=0$: consente di calcolare l'incognita iperstatica X

$\frac{ql^4}{24} - \frac{4ql^4}{4\cdot 6} - X\left(\frac{\ell^3}{6} - \frac{3\ell^3}{3\cdot 2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\cancel{3}}{\cancel{24}_8}ql^4 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}_3}X = 0 \Rightarrow \boxed{X = \frac{3}{8}ql}$

Sostituendo la X ottenuta:

$$\varphi_A = y'(0) = \frac{A_1}{EJ}$$

$$A_1 = \frac{ql^3}{6} - \frac{3}{8} ql \frac{l^2}{2} = \frac{ql^3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right) = \frac{ql^3}{2}\,\frac{8-9}{24} = -\frac{1}{48}\, ql^3 \Rightarrow |\varphi_A| = \frac{1}{48}\frac{ql^3}{EJ}$$

Equazione finale della LE:

$$y(x) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qx^4}{24} + \frac{\cancel{3}}{8} ql \frac{x^3}{\cancel{6}_2} - \frac{1}{48} ql^3 x\right]$$

N.B.: $y=0$ in $x=0$

$$EJ\, y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{1}{16} ql x^3 - \frac{1}{48} ql^3 x$$

condiz. di staz. (per y^{max}) $y'=0$

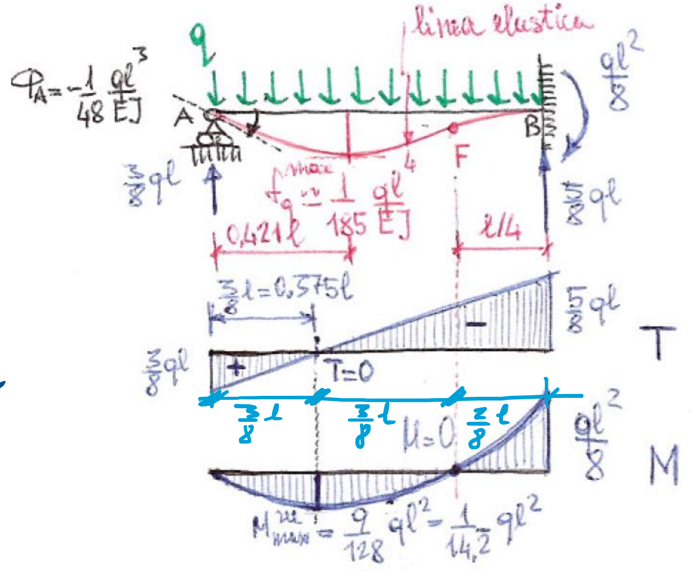
$$EJ\, y'(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{3}{16} ql x^2 - \frac{1}{48} ql^3 = \frac{q}{48}\left(-8x^3 + 9lx^2 - l^3\right) = 0$$

$$= \frac{q}{48}\left(-8x^2 + lx + l^2\right)(x-l) = 0 \; < \; x = l \quad ; \quad \bar{x} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{16}\, l \simeq 0.421\, l$$

$$EJ\, y''(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3}{8} ql x = M(x) = 0 \; < \; x = 0 \quad ; \quad x = \frac{3}{4} l$$

$$f^{max} \simeq \frac{1}{185}\frac{ql^4}{EJ} = -y(\bar{x})$$

"freccia" massima



- Tracciamento dei diagrammi delle AI
- Rappresentazione della deformata qualitativa (Linea Elastica)

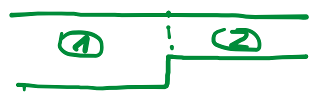
⇒ vedi note sul sito ⇒

Quadro generale del metodo della LE

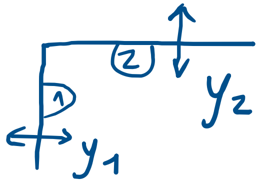
con stessa eq.ne differenziale della LE

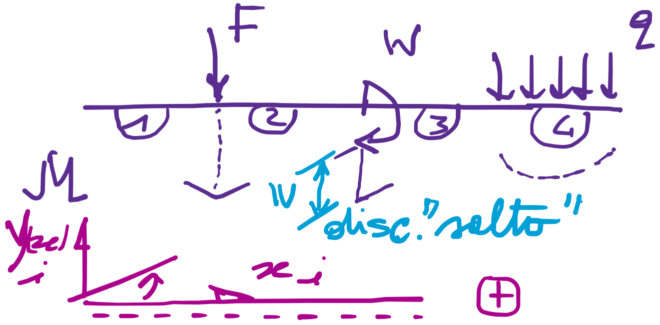
$$EJ_i(x_i)\, y_i''(x_i) = \pm M_i(x_i)\ , \quad i = 1, 2, \dots n$$

- Suddivisione in campi di integrazione:



$EJ_1 \neq EJ_2$

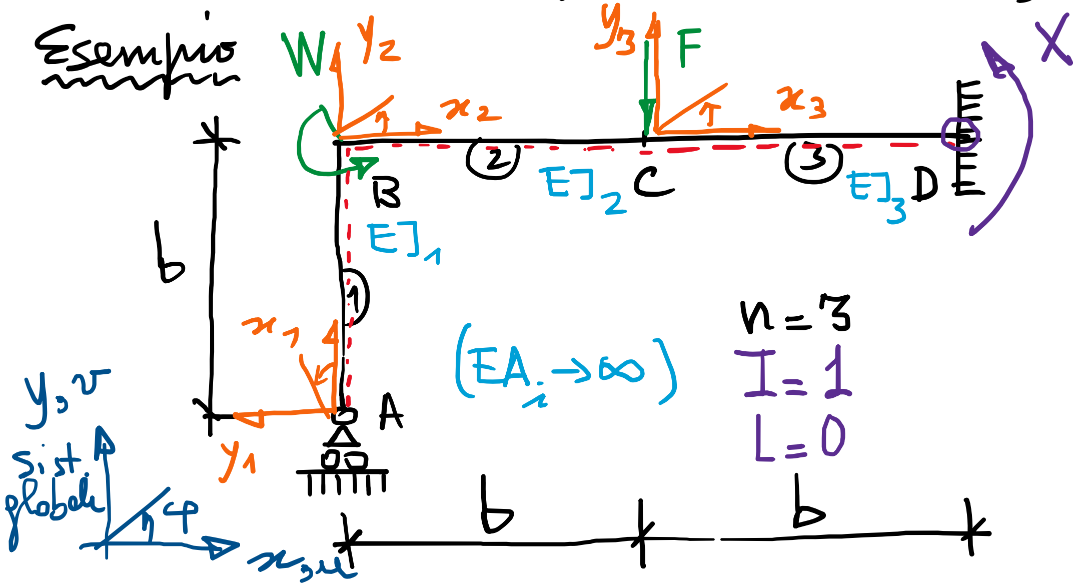




eq.ni diverse di $M_i(x_i)$ nei vari tratti

- Scelta dei sistemi di riferimento locali
- Integraz. delle eq.ni differenziali $\Rightarrow$ 2n costanti di integraz. ($+ \overset{I}{\text{inc. iperst.}}$)
- Scrittura e imposizione delle c.c. ($M_{c.c.} = I + 2n$)
- Soluzione, LE finali; RV; N, T, M; calcolo di comp.ti di "spost."; deformata qualitativa

Esempio



$M_{cc} = I + 2n = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$y_1(b) = 0$ — Incastro in D + $EA_{BCD} \to \infty$

$y_1'(b) = y_2'(0)$ — Continuità alla rotaz. in B

$y_2(0) = 0$ — Carrello in A + $EA_{AB} \to \infty$

$\left.\begin{array}{l} y_2(b) = y_3(0) \\ y_2'(b) = y_3'(0) \end{array}\right\}$ Continuità allo spostamento / alla rotazione in C

$\left.\begin{array}{l} y_3(b) = 0 \\ y_3'(b) = 0 \end{array}\right\}$ Incastro in D

condizione di congruenza associata alla scelta di X