Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

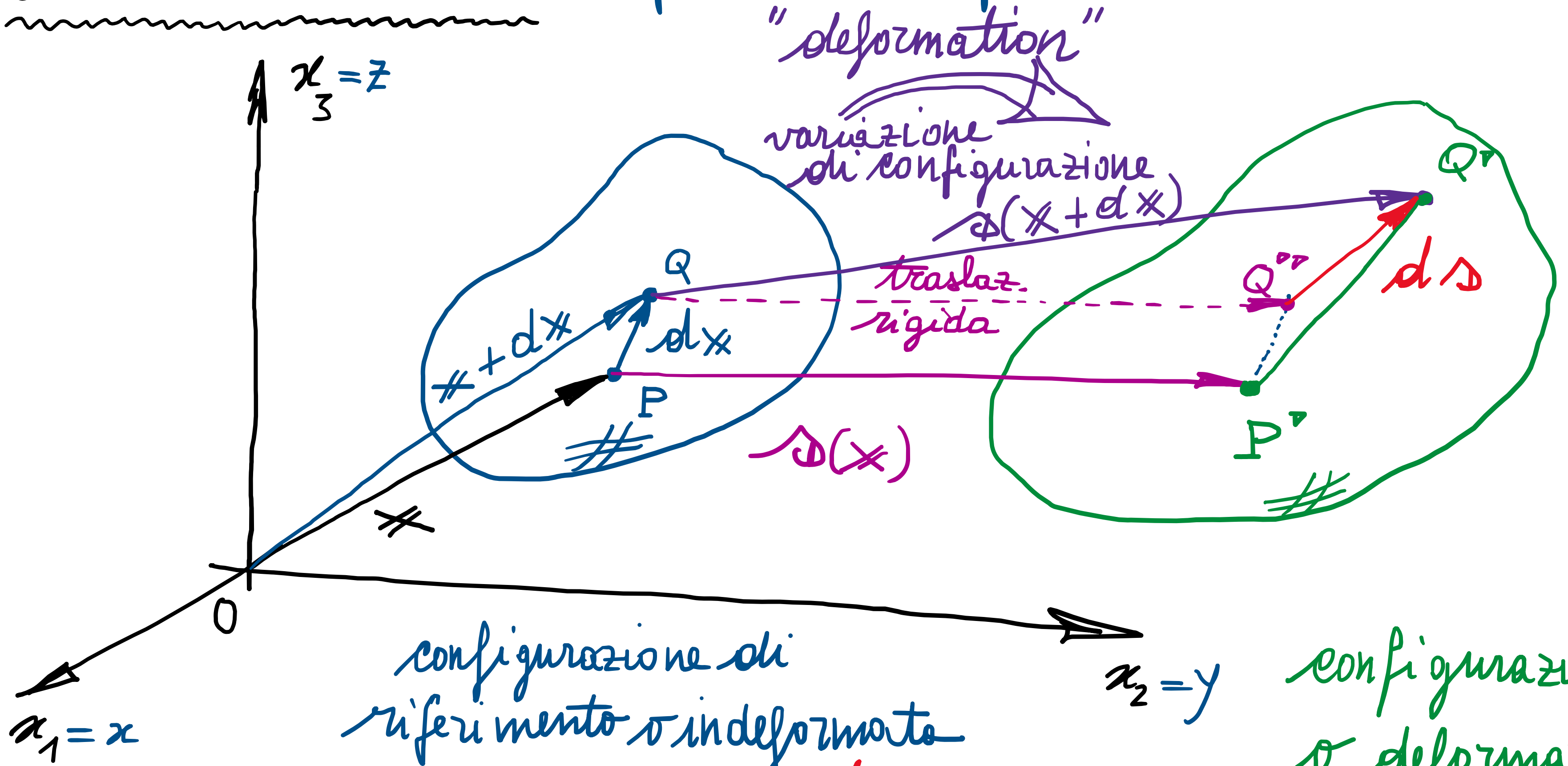
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 15

Cinematica dei continui: spostamento e deformazione in ambito 3D (regime di piccole deformazioni)



$\mathbf{s}(\mathbf{x})$ vettore spostamento (campo vettoriale)

$s_i(x_k)$ (contiene componenti di traslazione rigida)

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \overbrace{\underbrace{\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}}\cdot d\mathbf{x}}^{d\mathbf{s}} + \dots \rightarrow | \; 1^\circ \text{ord.}$$

$$\Rightarrow \quad d\mathbf{s} = \overbrace{\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}}^{\Psi(\mathbf{x})} \cdot d\mathbf{x}$$

piccoli gradienti di spostamento

$$|\Psi_{ij}| \ll 1$$

$\sim 1‰, 1\%$

tensore gradiente di spostamento (2° ordine)

$$\Psi(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{s}(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_{ij}(x_k) = \frac{\partial s_i(x_k)}{\partial x_j} = s_{i,j}$$

9 componenti

Decomposizione additiva di Ψ:

(sempre possibile) $\Psi = \mathcal{E} + \vartheta$

definizioni:

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T)$ parte simmetrica ⇔ tensore di deformazione ("piccola") $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$

$\mathcal{E}^T = \frac{1}{2}(\Psi^T + \Psi) = \mathcal{E} \Leftrightarrow \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$

$+$

$\vartheta = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T)$ parte emisimmetrica ⇔ tensore di rotazione infinitesima

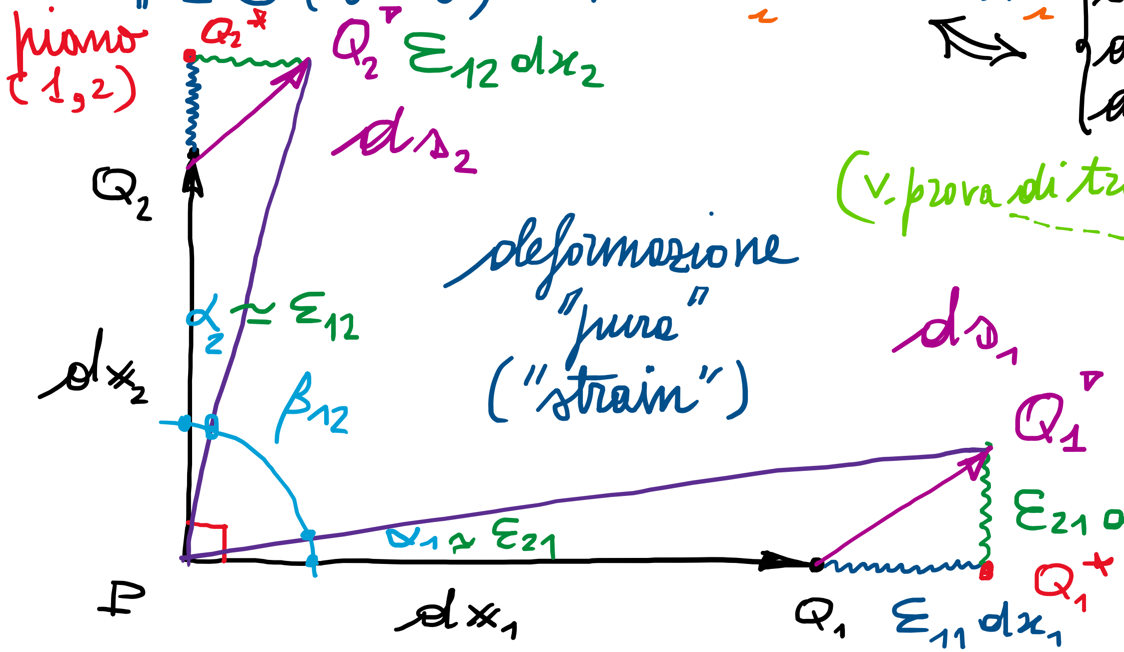
$\vartheta^T = \frac{1}{2}(\Psi^T - \Psi) = -\vartheta \Leftrightarrow \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$

$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} - \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i})$

- Significato fisico delle componenti ε_{ij}

$\Psi = \mathcal{E} \; (\vartheta = 0) \Rightarrow d\underline{s}_i = \mathcal{E} \cdot d\underline{x}_i$

$$\begin{Bmatrix} ds_{i1} \\ ds_{i2} \\ ds_{i3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdot \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dx_{i1} \\ dx_{i2} \\ \cancel{dx_{i3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}\, dx_{i1} + \varepsilon_{12}\, dx_{i2} \\ \varepsilon_{21}\, dx_{i1} + \varepsilon_{22}\, dx_{i2} \\ \cdot \end{Bmatrix}$$



$\overline{PQ_i} = dx_i$ $\qquad \alpha_i \simeq \tan\alpha_i$

(v. prova di trazione)

- $\frac{\Delta l}{l_0} \simeq \frac{\overline{PQ_i^*} - \overline{PQ_i}}{\overline{PQ_i}} = \frac{(\cancel{1} + \varepsilon_{ii})\cancel{dx_i} - \cancel{dx_i}}{\cancel{dx_i}} = \varepsilon_{ii} \sim 1‰, 1\%$

allungamenti specifici di fibre // x_i

- $\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \beta_{12} = \alpha_1 + \alpha_2 \simeq \frac{\varepsilon_{21}\cancel{dx_1}}{(1+\cancel{\varepsilon_{11}})\cancel{dx_1}} + \frac{\varepsilon_{12}\cancel{dx_2}}{(1+\cancel{\varepsilon_{22}})\cancel{dx_2}} = 2\varepsilon_{12}$

scorrimento angolare

(v. prova di torsione)

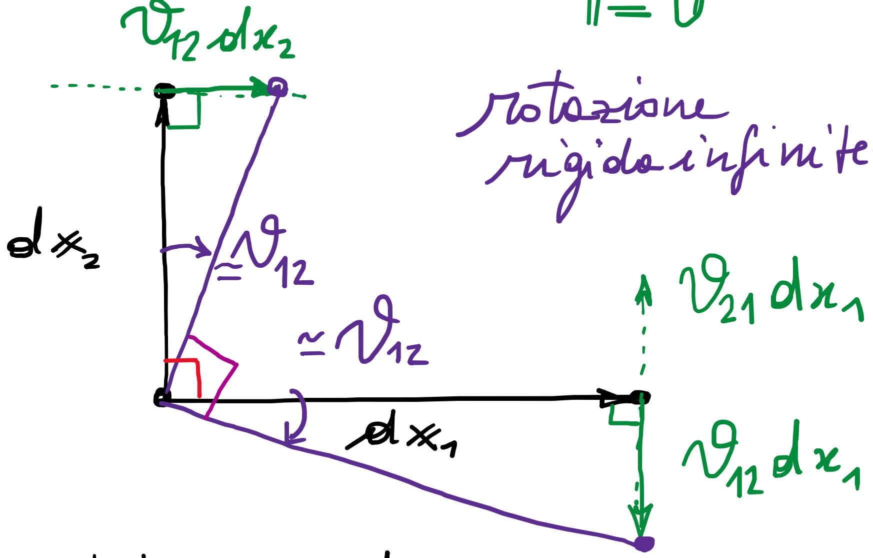
$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}\,; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ deformazioni taglianti

• Significato fisico delle ϑ_{ij} : $\vartheta_{ii} \equiv 0$ per $i=j$

$\Psi = \vartheta$

$\vartheta_{ij} = -\vartheta_{ij}$ $i \neq j$

$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \cdot \\ \vartheta_{21} = -\vartheta_{12} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$



rotazione rigida infinitesima

velocità angolare

$-\dot{\vartheta}_3 = \omega_3$

$$\vartheta_{12} \simeq \tan \vartheta_{12} = \frac{\vartheta_{12} \cancel{dx_1}}{\cancel{dx_1}}$$

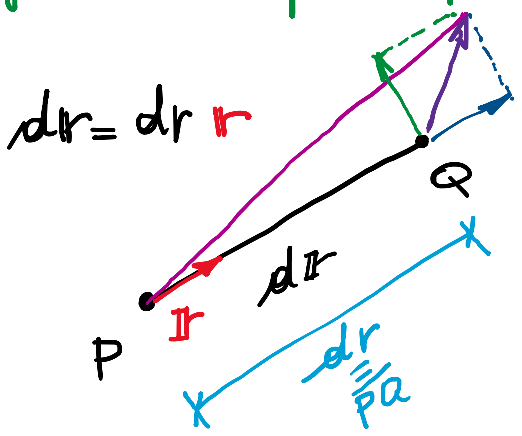
(rotazione negativa rispetto all'asse x_3)

• Riassumendo:

- il campo di spostamento contiene componenti di traslazione rigida e può rappresentare la deformazione "pura" ("strain") tramite il suo gradiente.
- il gradiente di spostamento, nella sua parte emisimmetrica può contenere una componente di rotazione rigida (infinitesima).
- depurando il gradiente di spostamento della sua parte emisimmetrica, la sua parte simmetrica rappresenta l'effettiva deformazione pura infinitesima. Quindi, ε, tensore del secondo ordine simmetrico, rappresenta la misura intensiva cercata.

- Proprietà del tensore delle piccole deformazioni $\mathbb{E}$ (tensore doppio simmetrico) $\Rightarrow$ vedi analisi svolta per il tensore sforzo di Cauchy σ, in statica dei continui.

- Deformazioni principali e direzioni principali di deformazione



$d\mathbf{s} = \mathbb{E}\cdot d\mathbb{r}$ $\not\parallel$ $d\mathbb{r}, \mathbb{r}$, in generale

Direzione principale di deformazione:

$d\mathbf{s}_{r} = \underbrace{ds_{r}}\,\mathbb{r}_1$ $\quad // \; d\mathbb{r}_1, \mathbb{r}_1$

$\mathbb{E}\cdot d\mathbb{r} = \varepsilon_r \underbrace{dr\,\mathbb{r}}_{d\mathbb{r}}$

$\mathbb{E}\cdot \cancel{dr}\,\mathbb{r} = \varepsilon_r \cancel{dr}\,\mathbb{r}$

$\varepsilon_{I}, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$; $\mathbb{r}_{I}, \mathbb{r}_{II}, \mathbb{r}_{III}$ ... $(\mathbb{r}_1 = \mathbb{n}_1^{\triangledown})$

ε_r deformazioni principali $\Rightarrow$ autovalori

$\mathbb{r}$ direzioni principali $\Rightarrow$ autovettori

problema agli autovalori associato al tensore $\mathbb{E}$ ..... $\boxed{\mathbb{E}\cdot\mathbb{r} = \varepsilon_r\,\mathbb{r}} \Leftrightarrow (\mathbb{E} - \varepsilon_r \mathbb{I})\cdot\mathbb{r} = 0$

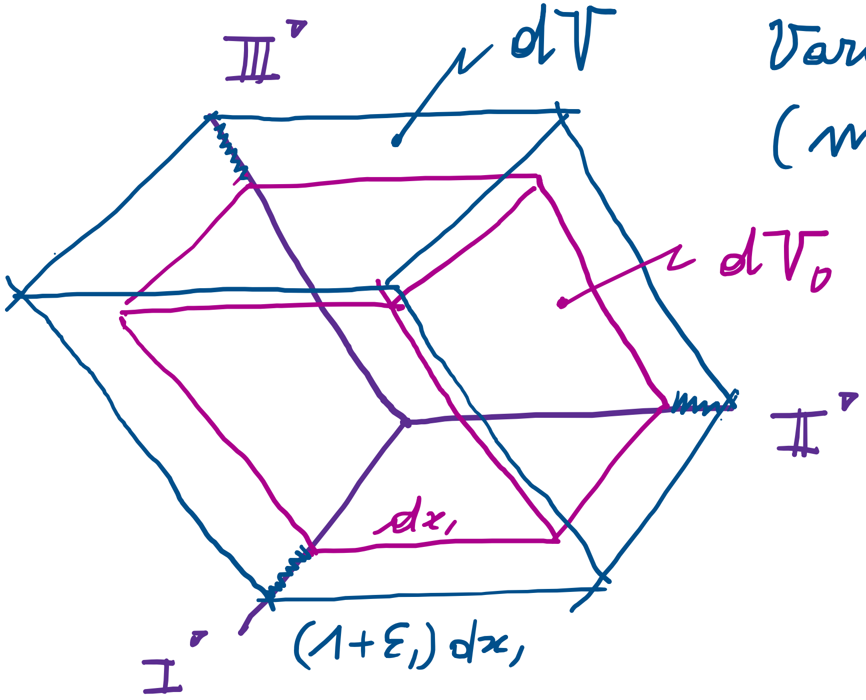
Soluzioni non banali $(\mathbb{r} \neq 0)$ sse: $-\det(\mathbb{E} - \varepsilon_r \mathbb{I}) = \underbrace{\varepsilon_r^3 - I_1^{\triangledown}\varepsilon_r^2 - I_2^{\triangledown}\varepsilon_r - I_3^{\triangledown}}_{\text{polinomio caratteristico}} = 0$ eq.ne caratt.

Invarianti di deformazione (indip. dal sistema di riferimento)

primo: $I_1^{\triangledown} = \mathrm{tr}\,\mathbb{E}$

secondo: $I_2^{\triangledown} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 - \mathrm{tr}^2\mathbb{E}\right)$

terzo: $I_3^{\triangledown} = \det\mathbb{E} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^3 - \frac{\mathrm{tr}\,\mathbb{E}}{2}\left(\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\mathbb{E}\right)$



direzioni principali di deformazione (terna principale)

Variazione di volume, senza variazioni di forma (no scorrimenti angolari)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \sim\varepsilon & I_1^{\varepsilon} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} \\ \sim\varepsilon^2 & I_2^{\varepsilon} = -(\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III}) \\ \sim\varepsilon^3 & I_3^{\varepsilon} = \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} \end{array} \right.$$

Deformazione volumetrica: variazione specifica di volume

$$v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1$$

produttoria

$$= \frac{\prod_{1} (1+\varepsilon_1)\,dx_1}{dx_I\, dx_{II}\, dx_{III}} - 1$$

$$= (1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III}) - 1$$

$$= \cancel{1} + \underbrace{\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}}_{I_1^{\varepsilon}} + \underbrace{\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{III}}_{-I_2^{\varepsilon}} + \underbrace{\varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}}_{I_3^{\varepsilon}} - \cancel{1}$$

$o(\varepsilon^2)$ $\qquad$ $o(\varepsilon^3)$

significato fisico dell'invariante primo (deformazione infinitesima)

$$v \cong I_1^{\varepsilon} = \mathrm{tr}\,\varepsilon$$

(la traccia di ε rappresenta la deformazione volumetrica infinitesima)