

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

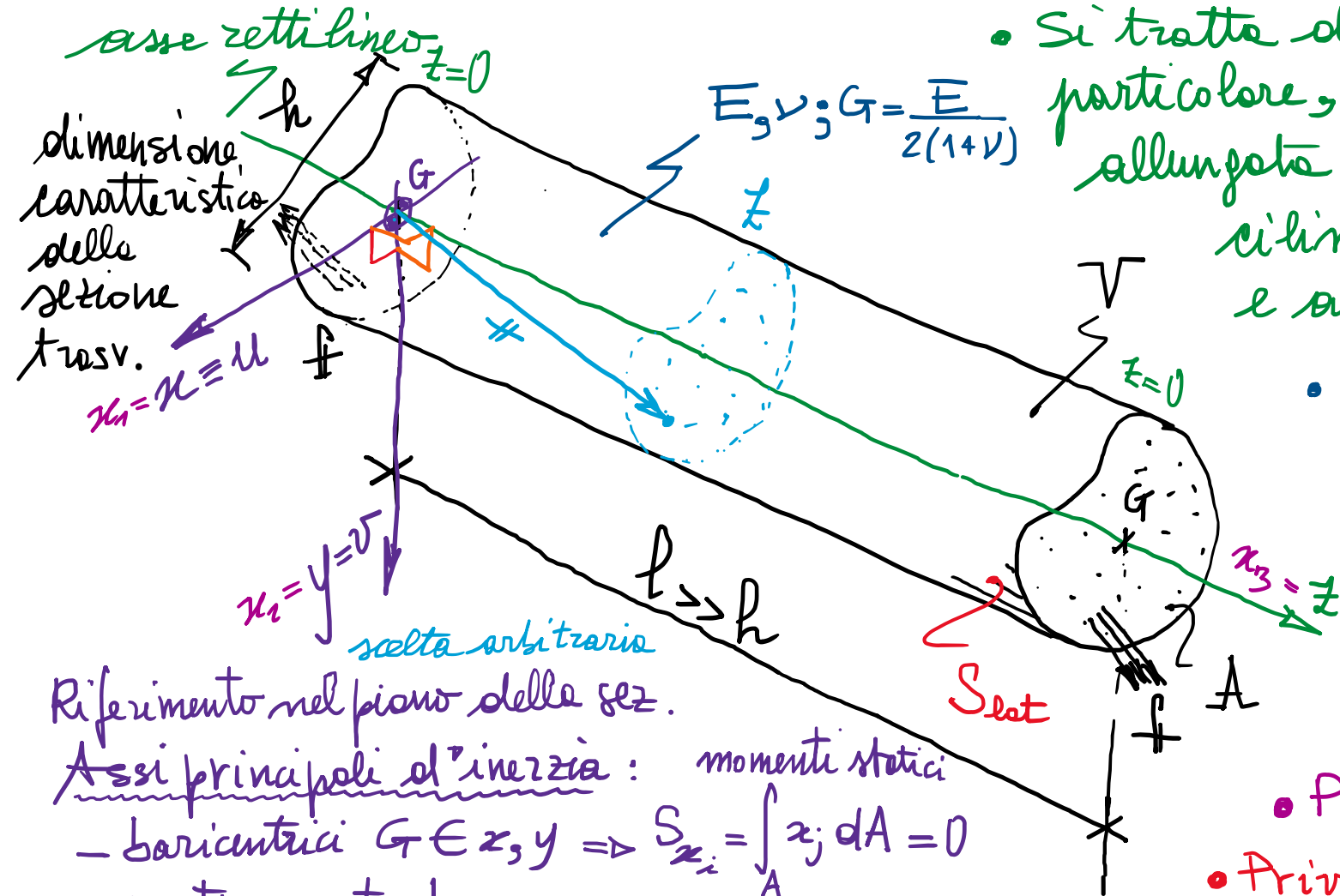
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

Problema di de Saint Venant (~1855)

- Ipotesi e definizioni:

Casi di DSV:
 N, T, M, M_t



Riferimento nel piano della sez.

Assi principali d'inerzia:

momenti statici

- baricentrici $G \in x, y \Rightarrow S_{x_i} = \int_A x_j dA = 0$

- mutuamente $\perp$
- coniugati $\overset{\text{CNS}}{\longleftrightarrow}$

$$J_{xy} = \int_A xy \, dA = 0$$

(v. es. Belluzzi)

momento d'inerzia centrifugo

- Si tratta di un problema elastico lineare particolare, riguardante un solido di forma allungata ($l \gg h$, $l > 10h$), "tipo trave", cilindrico, a sezione costante di area A e asse rettilineo.

- Composto de materiale elastico lineare isotropo, omogeneo:

$$E, v; G \text{ costante in } x \in V.$$

- Privo di vincoli esterni ($S_S \equiv \emptyset$)
(spostamenti noti a meno di moti rigidi).

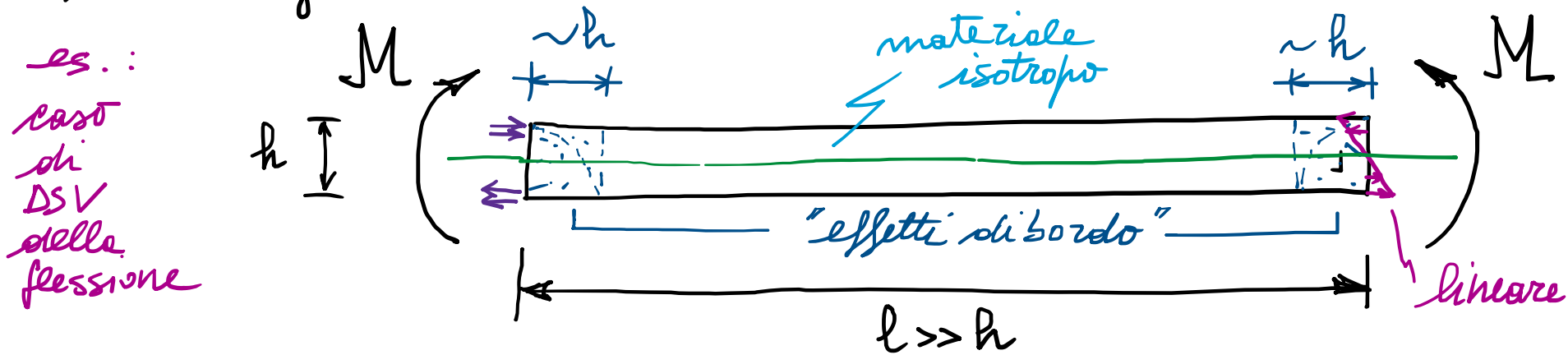
- Privo di forze di volume ($\mathbb{F} = \mathbb{0}$ in V).

- Privo di forze di superficie sulla superficie laterale ($\vec{f} = 0$ su S_{ext}).

- Soggetto a sole forze di superficie f agenti sulle basi, note in termini di risultanti e tali da formare un sistema auto-equilibrato

Postulato di DSV:

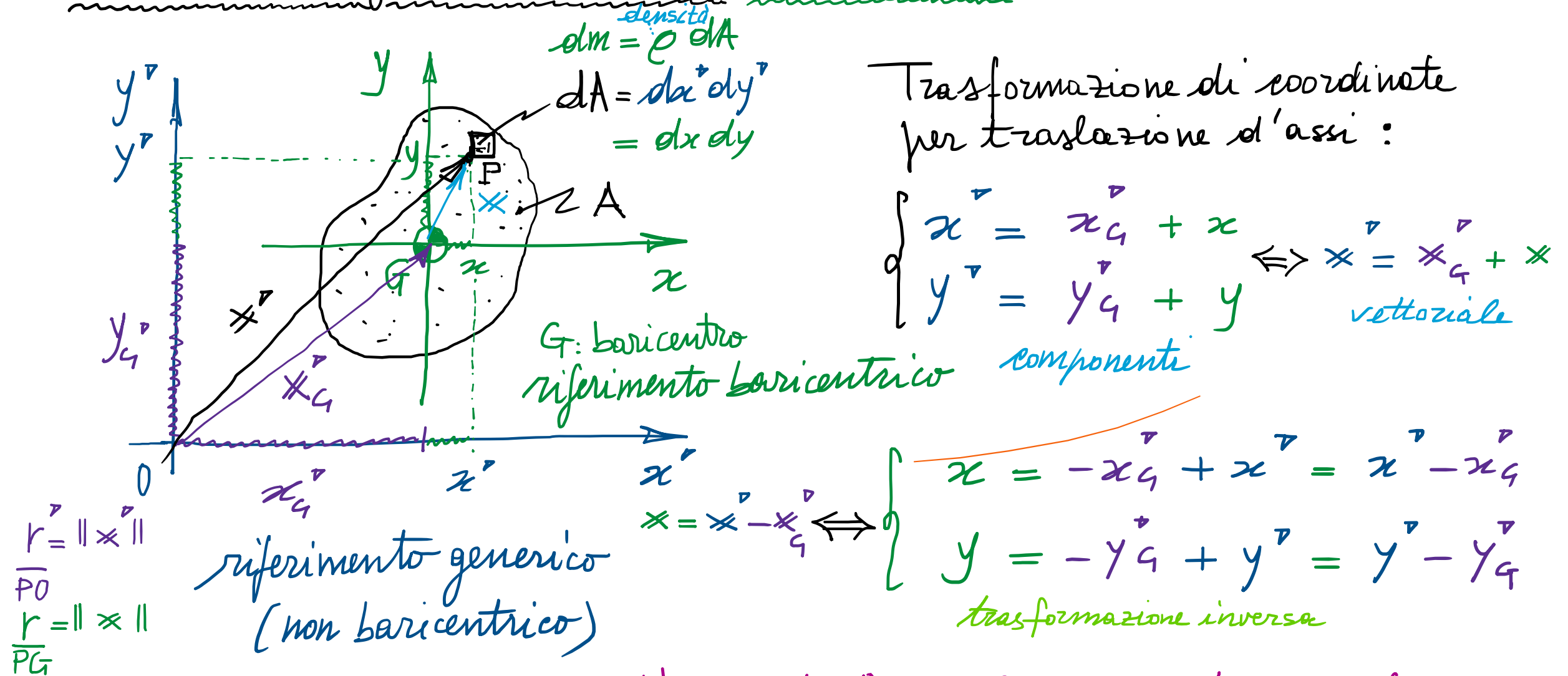
- La reale distribuzione (non assegnata) delle forze di superficie sulle basi, a parità di risultanti, risulta ininfluente ai fini della risoluzione della risposta ^{in "eccesso"} ^{rispetto alle} ^{distribuz. in soluz.} tenso-deformativa all'interno del prisma di DSV.



distribuz. f.e.
risultante nulla
potremmo creare
"effetti di bordo"
localizzati ma
sforzo nullo in quasi
tutto il solido

- Cio' appare lecito, in quasi tutto il prisma, a meno di possibili "effetti di bordo" localizzati in corrispondenza delle basi (sezioni compatte).
- In pratica si potrebbe ipotizzare di applicare le forze di superficie sulle basi secondo la distribuzione (incognita) prevista dalla soluzione del problema stesso, in termini di sforzo.

Richiami sulla geometria delle aree (o delle masse) $\rightarrow$ v. es. Belluzzi.

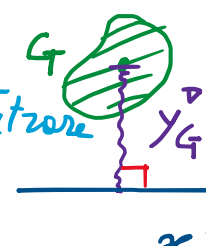


- Si definiscono le proprietà geometriche della sezione trasversale seguenti.

- $A = \int_A dA > 0$ [L]² Area della sezione trasversale (momento di ordine 0)

- $S_{x'} = \int_A y' dA$
 $S_{y'} = \int_A x' dA \geq 0$ [L]³ Momento "statico" della sezione rispetto all'asse x' e all'asse y' (momenti di ordine 1)
 per assi baricentrici $\begin{cases} S_{x'} = A y_G \\ S_{y'} = A x_G \end{cases} \Rightarrow x_G = \frac{S_{y'}}{A}; y_G = \frac{S_{x'}}{A}$

(Baricentro G è il luogo degli assi con $S=0$) G è il punto in cui si può concentrare A per ottenere S



$$I_{x'} = J_{x'} = \int_A y'^2 dA > 0$$

Momento d'inerzia della sezione

- $I_{y'} = J_{y'} = \int_A x'^2 dA > 0$ [L]⁴ rispetto all'asse x' e all'asse y' , (momenti di ordine 2)

$$I_{x'y'} = J_{x'y'} = \int_A x'y' dA \geq 0$$

centrifugo rispetto agli assi x', y'

= 0 per assi coniugati

$$I_o = J_o = \int_A r'^2 dA = \int_A (x'^2 + y'^2) dA = J_{x'} + J_{y'} > 0 \text{ polare rispetto a } O$$

Teorema di trasposizione *(per traslazione d'assi baricentrici e non)*
Huygens-Steiner

$$\begin{aligned}
 J_{x^*y^*} &= \int_A x^* y^* dA = \int_A (x_G^* + x)(y_G^* + y) dA \\
 &= \int_A x_G^* y_G^* dA + \int_A x y dA + \int_A x_G^* y dA + \int_A y_G^* x dA \\
 &= x_G^* y_G^* A + J_{xy} + \cancel{x_G^* S_x} + \cancel{y_G^* S_y} \quad \text{se } x, y \text{ assi baricentrici} \\
 &\quad (G \in x, y)
 \end{aligned}$$

Pertanto :

$$J_{x^*y^*} = J_{xy} + A x_G^* y_G^*$$

analogamente :

$$J_{x^*} = J_x + A y_G^*{}^2$$

$$J_{y^*} = J_y + A x_G^*{}^2$$

$$J_0 = J_G + A r_G^*{}^2$$

trasf. da assi baricentrici a non baric.

$$J_{xy} = J_{x^*y^*} - A x_G^* y_G^*$$

$$J_x = J_{x^*} - A y_G^*{}^2$$

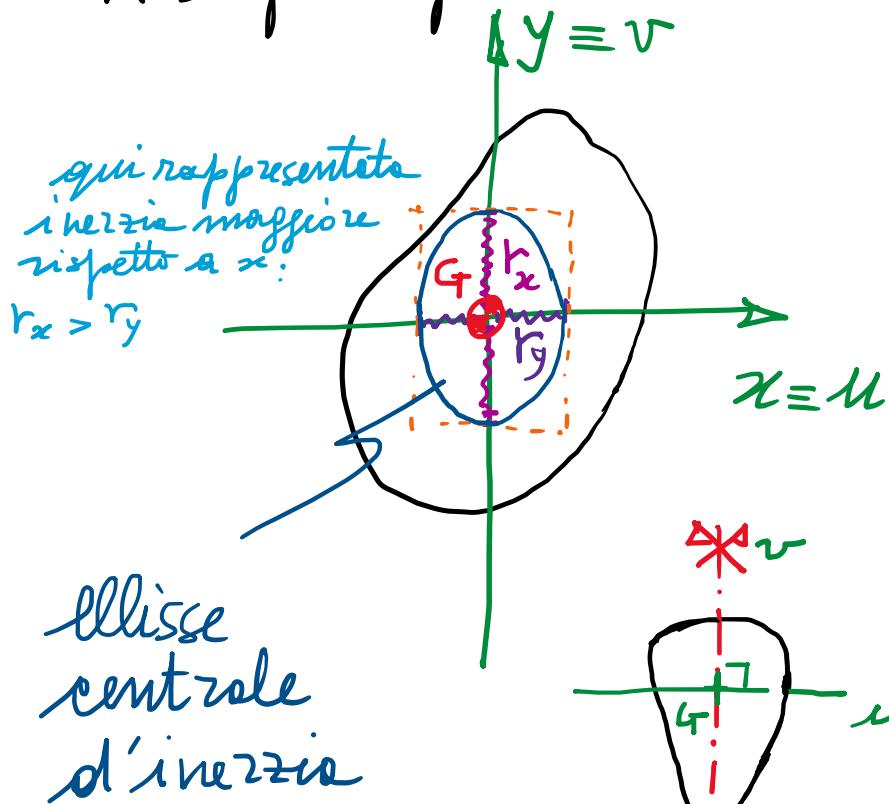
$$J_y = J_{y^*} - A x_G^*{}^2$$

$$J_G = J_0 - A r_G^*{}^2$$

trasf. da assi non baricentrici ad assi baric.

Assi principali d'inerzia

$J_{xy} = J_{uv} = 0$ (assi coniugati) ^{CNS.} (in generale da determin. per rotazione d'assi)



J_u e J_v risultano il max e il min momento d'inerzia al variare di tutte le giaciture nel piano (rotazione d'assi).

Raggi girotoni d'inerzia:

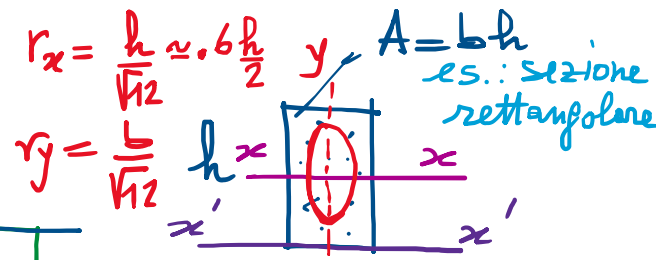
$$\rho_x = r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} ; \rho_y = r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad [L]$$

Ellisse centrale d'inerzia della sezione:

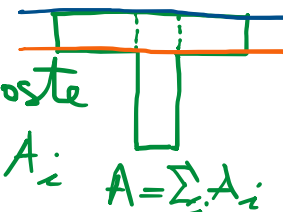
N.B.: Se $\exists$ asse di simmetria retta, esso è asse principale d'inerzia, e l'altro asse è quello baricentrico ad esso perpendicolare.

asse di sim. $\Rightarrow$ asse principale

$$\left(\frac{x}{r_y}\right)^2 + \left(\frac{y}{r_x}\right)^2 = 1$$



Spesso figure composte da aree elementari A_i



$$A = \sum_i A_i$$

$$J_{x'} = \frac{1}{3} b h^3 ; J_{y'} = \frac{1}{12} b h^3$$