

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

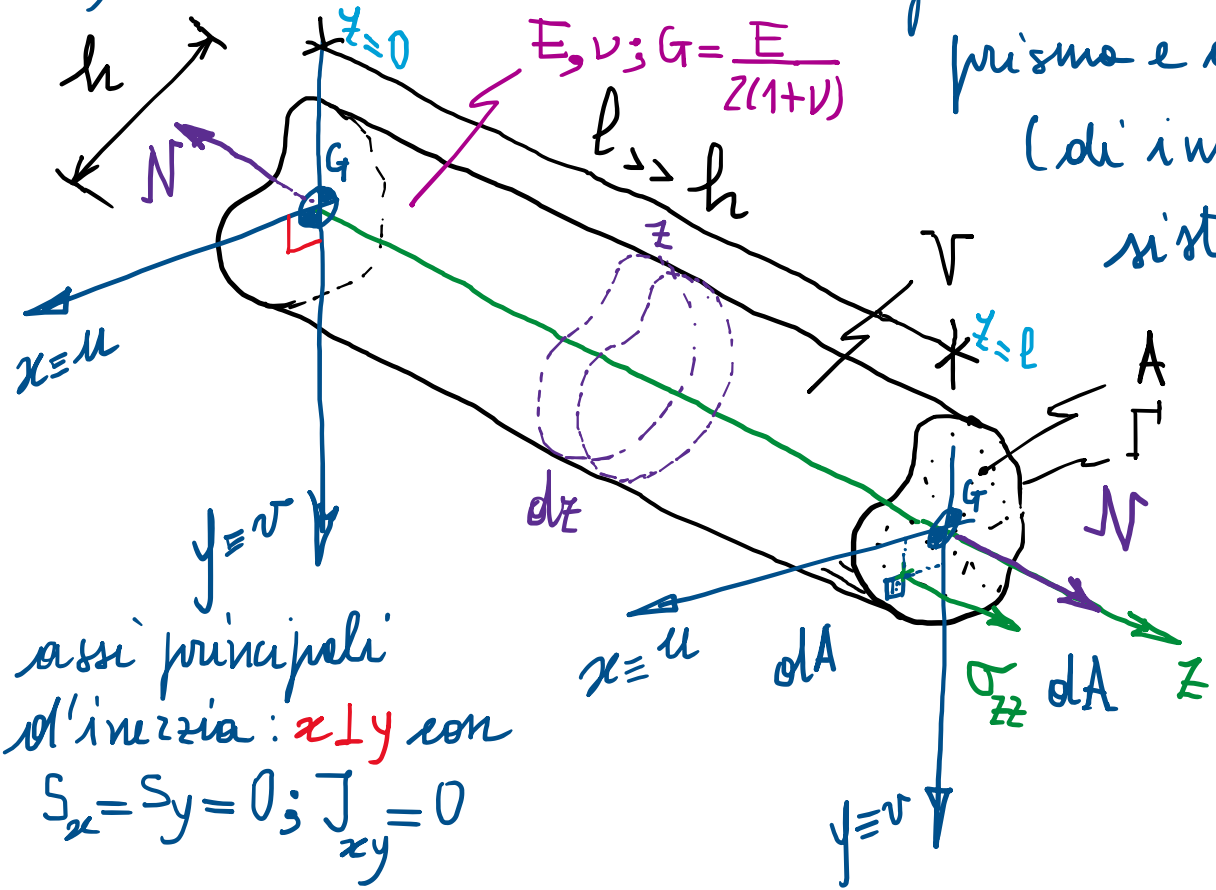
Casi di de Saint Venant

1) Azione assiale o normale N : presenti due risultanti assiali, cioè normali alle basi del prisma e centrate nel baricentro G , uguali e contrarie (di intensità N), quindi tali da formare un sistema di forze auto-equilibrato (in particolare alla traslazione lungo l'asse).

- Si opera con approccio "seminvertso" agli sforzi mediante ipotesi sul campo di sforzo:

$\sigma_{zz} = \sigma_z = K = \text{cost}$; $\sigma_{ij} = 0$ altrimenti
distribuzione di sforzo normale costante
sulla sezione trasversale

- Si verifica che le equazioni governanti il pb. di DSV (particolare pb. elastico lineare), di equilibrio, congruenza e legame costitutivo, risultino soddisfatte, in maniera tale che la soluzione ipotizzata corrisponda alla soluzione reale cercata. $\rightarrow$ ColSdC



- Resta da determinare la costante K , mediante la seguente condizione di equivalenza statica (tra il campo σ_{zz} e l'azione N che l'ha generato):

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA$$

$$= \int_A K dA = K \int_A dA = K A \Rightarrow K = \frac{N}{A}$$

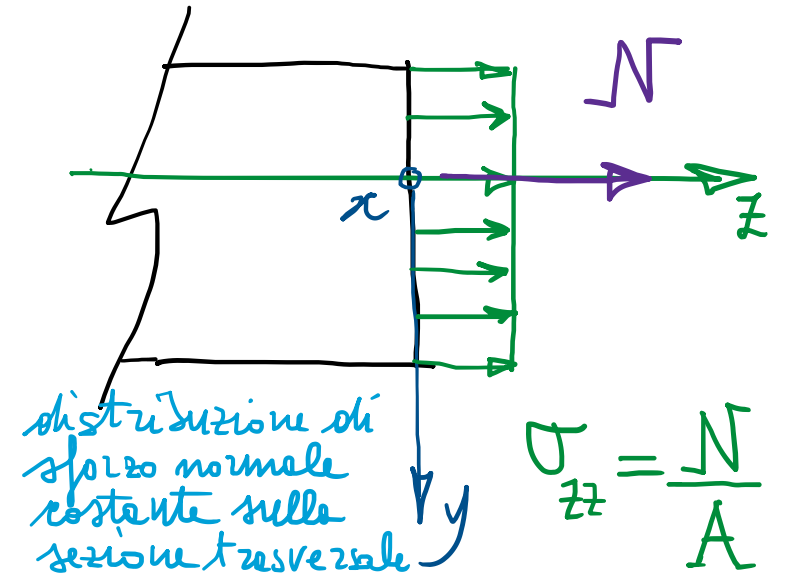
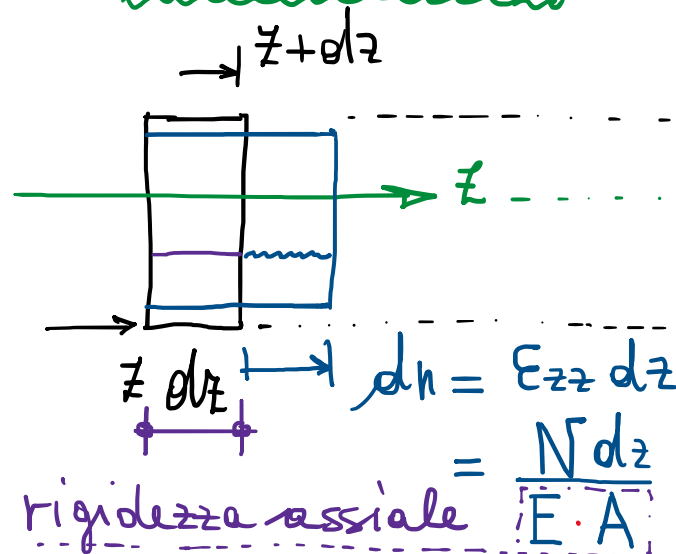
- Campo di deformazione:
Da legge costitutiva,

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\frac{\nu N}{EA}$$

$$\left(\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \equiv 0 \right)$$

$$\sigma_{zz} = K = \frac{N}{A}$$



contrazione omotetica della sez. trasv. nel suo piano

$$\epsilon_T = \epsilon_{PG} = \frac{\overline{P'G} - \overline{PG}}{\overline{PG}} = -\frac{\nu N}{EA}$$

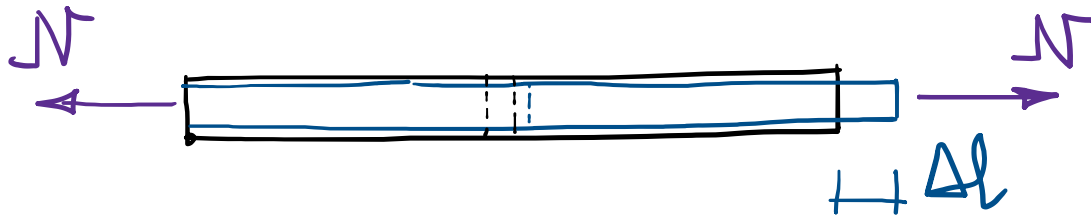
(materiale isotropo)

- Soluzione in termini di spostamento: noto a meno di moti rigidi, in particolare nella direzione dell'asse (z) del prisma.

- Allungamento totale (spostamento relativo nella direzione assiale, tra le due basi):

$$\Delta l = \int_0^l dn = \int_0^l \frac{N dz}{EA} = \frac{N l}{EA}$$

$l = \int_0^l dz$



- dirett. prop. a N
- " " a l
- invers. prop. alla rigidezza assiale EA .

quindi:

- inv. prop. a E
- " " a A

legge "costitutiva" della
trave soggetta ad
azione assiale

$$\Delta l = \overbrace{\frac{1}{EA/l}}^{\text{cedevolezza}} N$$

$$N = \underbrace{\frac{EA}{l}}_{\text{rigidezza}} \Delta l$$

$$\leftrightarrow x = \overbrace{\frac{1}{K}}^{\text{cedevolezza}} F$$

equivalente a

$$\leftrightarrow F = \underbrace{K}_{\text{rigidezza}} x$$

molla elastica lineare (Hooke)

2) Flessione (retta): presenti sulle Sasi due momenti flettenti, uguali e contrari agenti in un piano di sollecitazione (contenente un asse principale d'inertzia, es. y), tali da formare un sistema autoequilibrato.

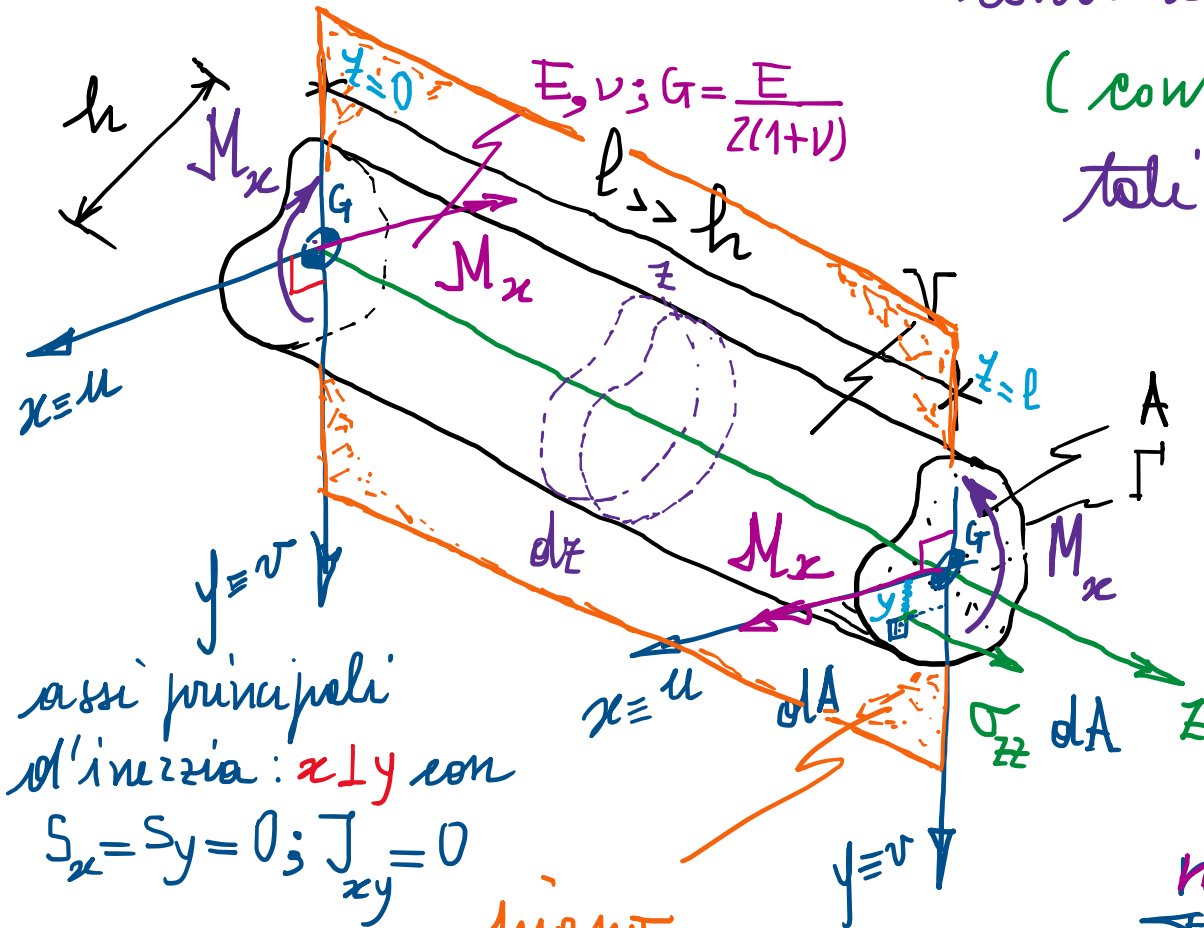
- Hp. sul campo di sforzo:

$$\sigma_{zz} = \sigma_z = K y \quad ; \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ altrimenti}$$

L_{cost}

sforzo lineare sulla sez. (in y)

sezione parziale
tesa e parziale
compresse

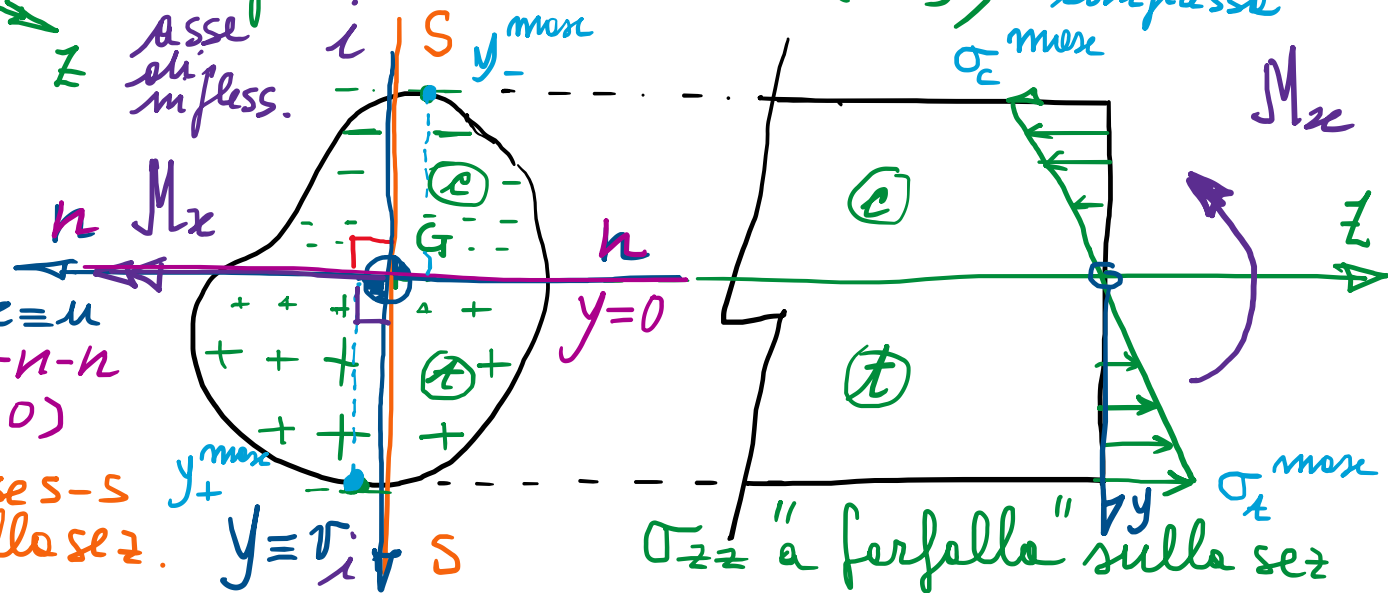


assi principali d'inertzia: $x \perp y$ con $S_x = S_y = 0$; $J_{xy} = 0$

piano di sollecitazione

S-S avente traccia asse S-S ($y \equiv v, z$) nel piano della sez.

asse neutro n-n ($\sigma_{zz} = 0$)



- Si può verificare che le eq. ni governanti risultano soddisfatte. $\rightarrow$ Col SolC
- Resta da determinare la costante κ , dalla condizione di equivalenza statica (tra M_x e le σ_{zz} da esso ingenerate):

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} dA \cdot y = \int_A \underbrace{\kappa y}_{y^2} dA = \kappa \int_A y^2 dA \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{M_x}{J_x}} \quad [F][L]$$

- Formula di Navier per la flessione:

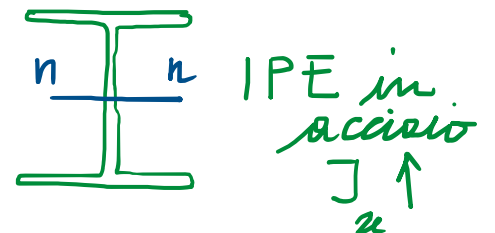
$0 < J_x$ momento d'inerzia della sezione trasversale rispetto all'asse x (asse $n-n$) $[L]^4$

$$\boxed{\sigma_{zz}(y) = \frac{M_x}{J_x} y}$$

- dirett. prop. a M_x

- invers. " a J_x

- dirett. prop. a y (distanza da $n-n$)



$\frac{[F]}{[L]^2}$

$$\sigma_t^{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_+^{\max} = \frac{M_x}{J_x / y_+^{\max}} = \frac{M_x}{W_x^+}$$

$$\sigma_c^{\max} = \frac{M_x}{J_x} |y_-^{\max}| = \frac{M_x}{J_x / |y_-^{\max}|} = \frac{M_x}{W_x^-}$$

moduli di resistenza (a traz./compr.) $[L]^3$
(a traz./compr.)
prop. geometrica sez. trasv.
(sforzi max invers. prop. a tali moduli)

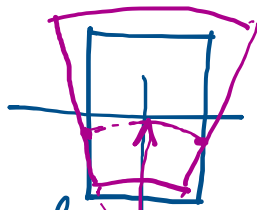
- Campo di deformazione:
Da legge costitutiva

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{M_x}{E J_x} y$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} = -\nu \frac{M_x}{E J_x} y$$

$$(\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \equiv 0)$$

es. sez. rettangolare



$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{\nu} \epsilon^p \text{ (fuori scala)}$$

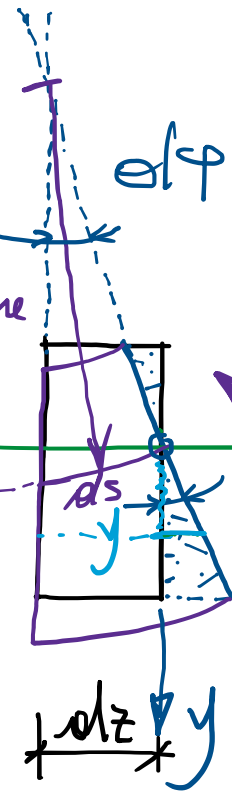
curvatura "anticlastic" $\chi_x = \nu \chi_x < \chi_x$
nel piano della sezione

piano i-i
in piano di inflessione
 $\equiv$ con piano s-s

linea d'asse
inflessa

$$\rho d\varphi = ds \approx dz$$

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \approx \frac{d\varphi}{dz}$$



rotazione della
sezione piano e L
ell'asse inflessore
(sez. L al piano di
solllecitazione)

rotazione
relativa

$$d\varphi = \frac{M_x dz}{E J_x}$$

$$y d\varphi = \epsilon_{zz} dz$$

$$y d\varphi = \frac{M_x}{E J_x} y dz$$

$$d\varphi = \frac{M_x dz}{E J_x}$$

$E J_x$ rigidezza
flessionale

χ_x curvatura
elastica

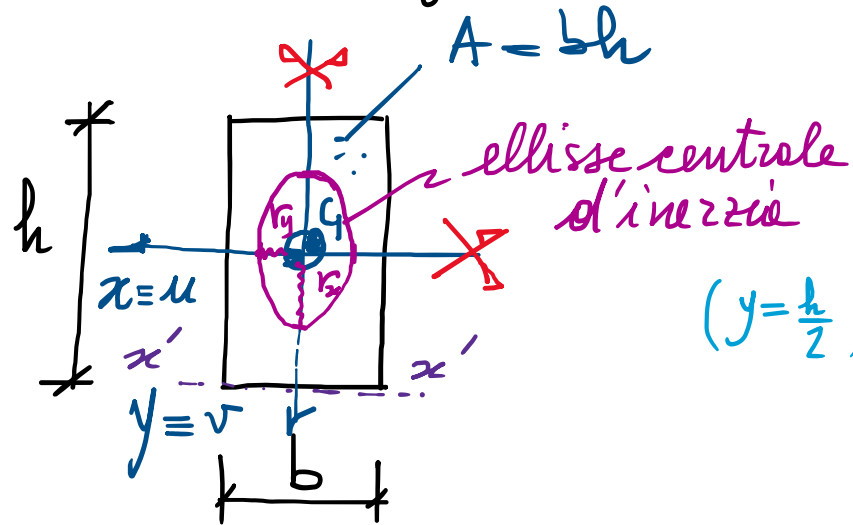
$$\chi_x = \frac{M_x}{E J_x}$$

Legge di E-B-N

- Per l'intero prisma (rotazione relativa tra le basi):

$$\Delta\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_x dz}{E J_x} = \frac{M_x l}{E J_x} = \frac{1}{\underbrace{E J_x / l}_{\text{cedevolezza}}} M_x ; M_x = \underbrace{E J_x}_{\text{rigidezza}} \Delta\varphi$$

Es.: Sezione rettangolare



$$J_{x'} = \int y'^2 dA$$

$$= \int_0^b \int_0^h y'^2 dx' dy'$$

$$= \frac{1}{3} b h^3$$

$$J_x = J_{x'} - A y_c'^2$$

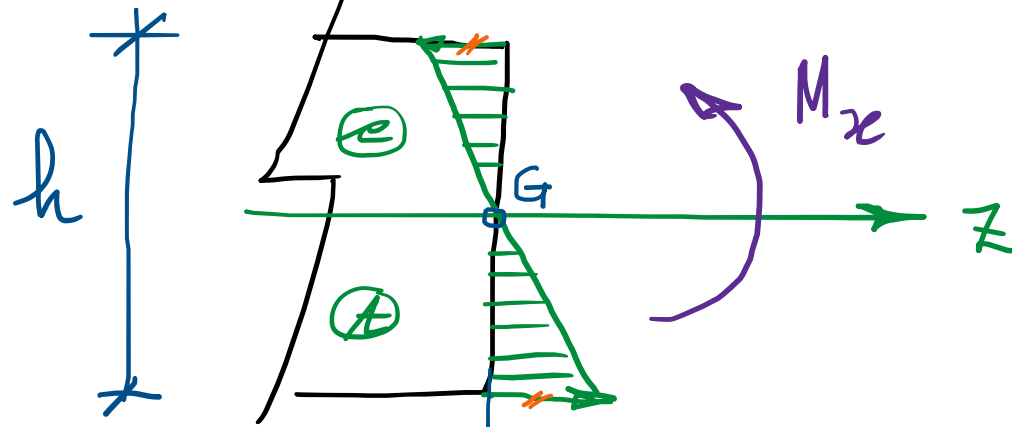
$$= \frac{1}{3} b h^3 - b h \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{14}{34} - \frac{1}{43} \right) b h^3 = \frac{1}{12} b h^3 \Rightarrow$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y = \frac{M_x}{\frac{1}{12} b h^3} y = \frac{12 M_x}{b h^3} y$$

$$(y = \frac{h}{2}) \sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_x}{\frac{1}{12} b h^3} \frac{h}{2} = \frac{M_x}{\frac{b h^2}{6}} = \frac{M_x}{W_x}$$

W_x modulo di resistenza a flessione
 $W_x = \frac{b h^2}{6} [L]^3$



raggiogiratore d'inerzia

$$r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \frac{1}{\sqrt{12}} h = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{h}{2} \approx 0.6 \frac{h}{2}$$

idem per

$$J_y = \frac{1}{12} b^3 h$$

$$r_y = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b}{2}$$