

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

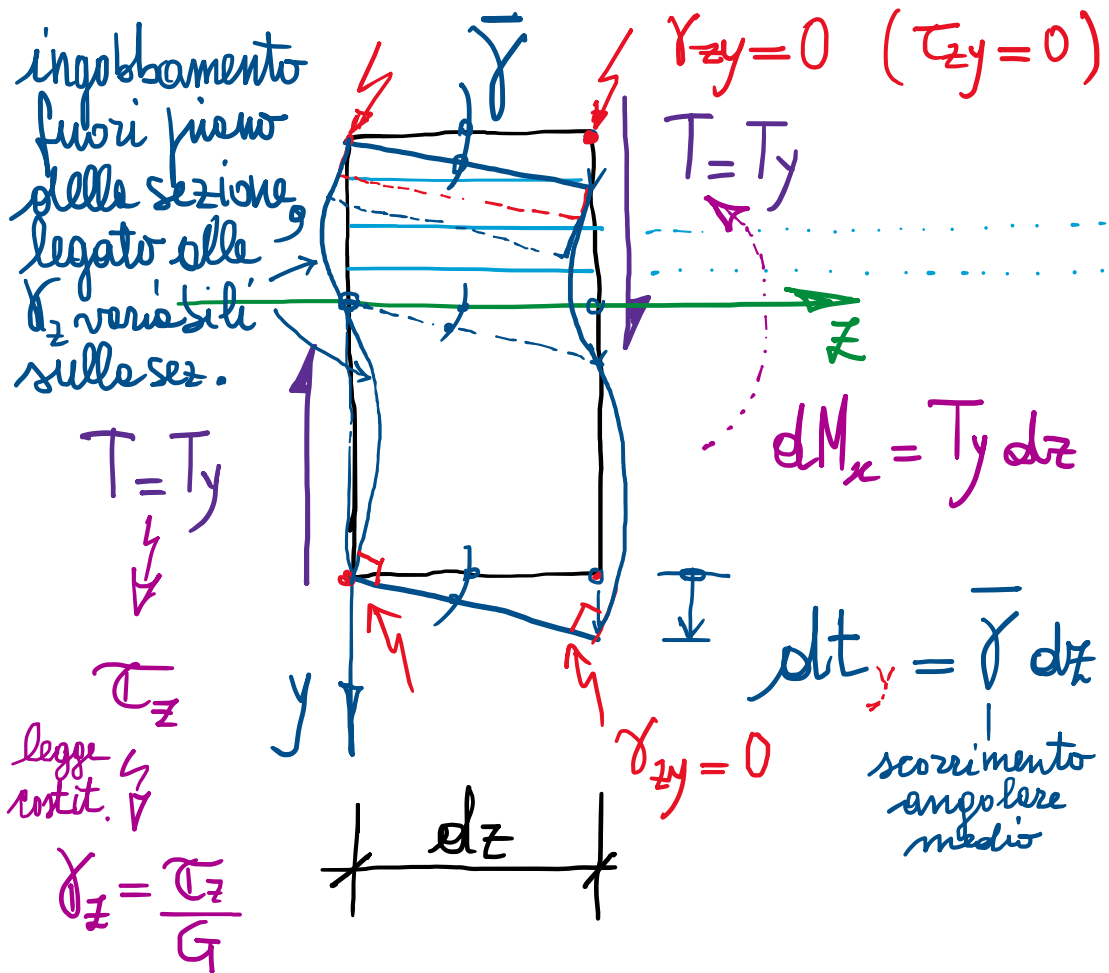
Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

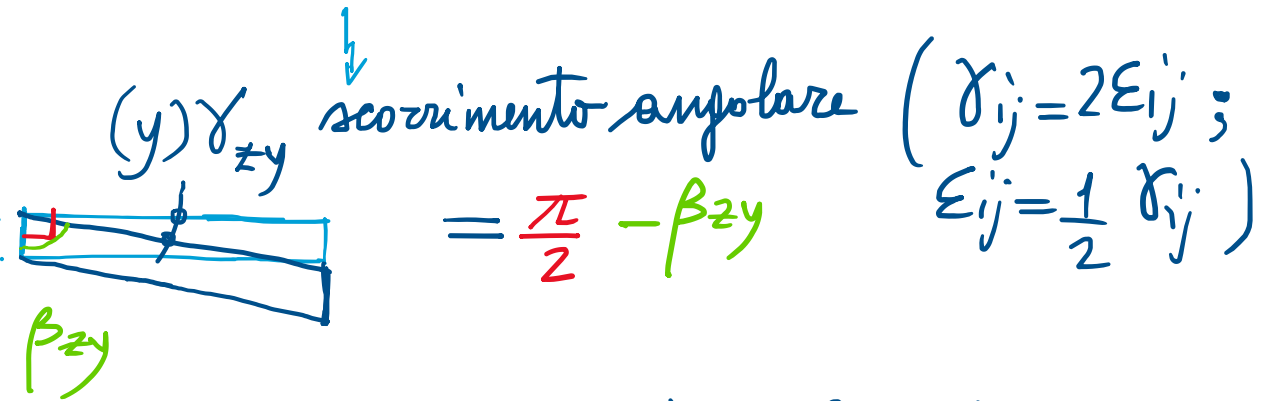
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 23

- Deformazione del concio di trave dovuta al taglio



variazione di angolo retto tra fibre iniziali $\perp$



- Se γ_{zy} fosse costante in y , la deformazione del concio sarebbe "autosomigliante" a quella, costante, di ogni "striscioline" ideale, e si verrebbe a produrre solo uno scorrimento relativo dt della faccia di destra rispetto a quella di sinistra.

- Poichè $\gamma_{zy} = \gamma_{zy}(y)$ risulta variabile lungo la sezione, da $\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}$, con $\tau_{zy}(y)$, secondo, ad es., la formula di Jourawsky, si valuta γ

$\gamma_{zy} \uparrow$ (veloz. medio)

G : modulo di elasticità tangenziale o modulo di taglio

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

materiale:

- elastico
- lineare
- isotropo $\rightarrow$ 2 parametri

es. E, ν

• Valutazione dello scorrimento medio via PLV: [effetti taglianti]

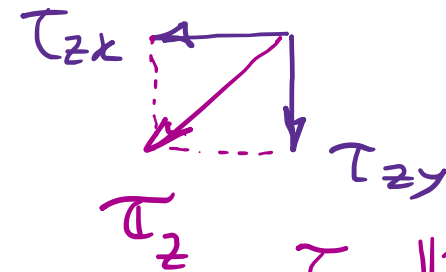
$$\frac{dL_e}{dz} = T_y \frac{dt}{dz} = \int_A \tau_z \cdot \gamma_z dA \quad \tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}; \gamma_z = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\tau_{zx}}{G} \\ \frac{\tau_{zy}}{G} \end{Bmatrix}$$

$\tau_z \gamma_z \Leftrightarrow \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma : \varepsilon$

$$\bar{\gamma} = \frac{T_y}{G A^*} = \frac{dt}{dz}$$

Soluz. di Jourawsky

$$\frac{1}{G} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) = \frac{\tau_z^2}{G}$$



$$\tau_z = \|\tau_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_z^2 = \|\tau_z\|^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2$$

$$T_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \tau_{zy}^2 \left[1 + \left(\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}} \right)^2 \right] dA$$

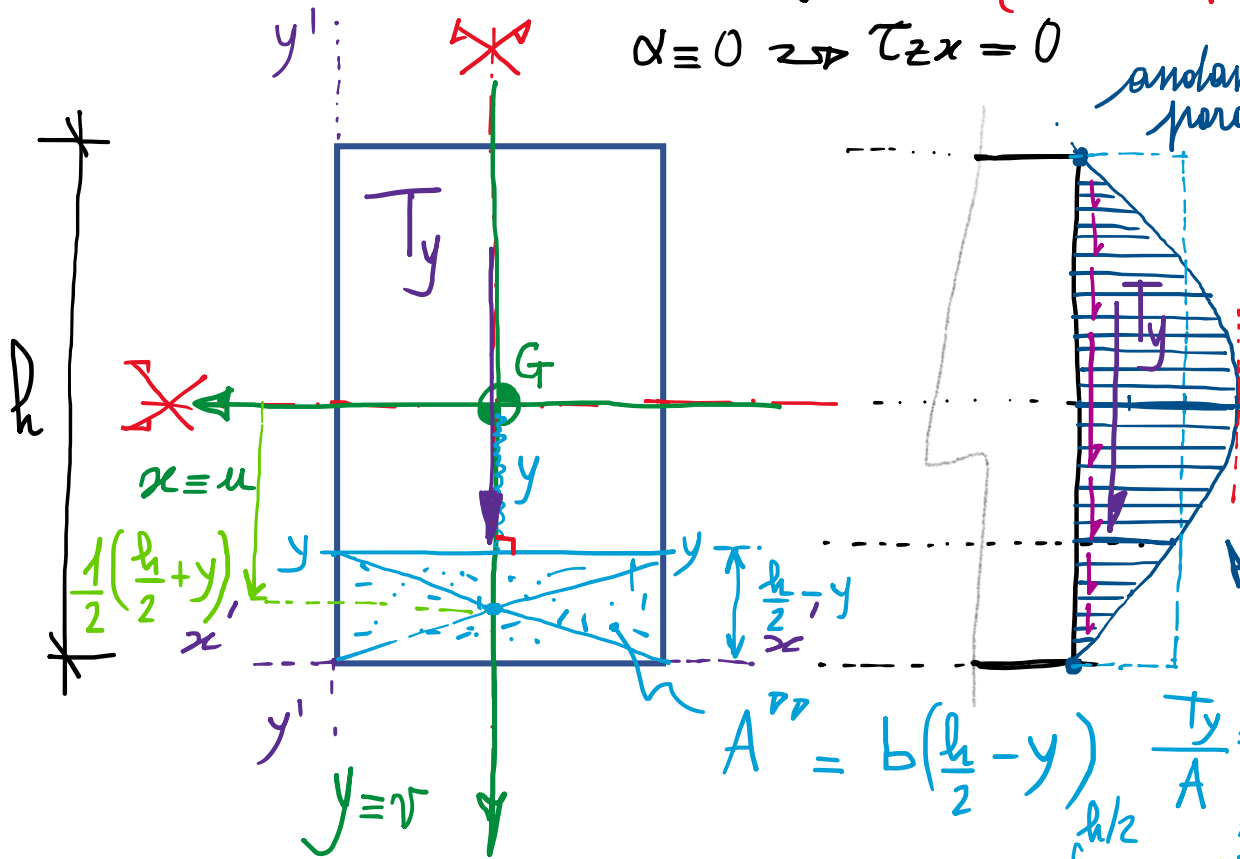
$$\tau_{zy}^J(y) = \frac{T_y S_x^{pp}(y)}{J_x b(y)} \quad \text{formula di Jourawsky}$$

$$\tau_{zx}^J(x,y) = - \frac{2 \tan \alpha(y)}{b(y)} \cdot x$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \frac{T_y}{A} \int_A \frac{S_x^{pp}(y)}{b(y)^2} \left(1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b^2(y)} x^2 \right) dA$$

$dt = \mu \frac{T_y}{G A}$ μ : fattore di taglio delle sez. trasv. ≥ 1
rigidezza tagliante, $A^* = \frac{A}{\mu}$ area ridotta $\Rightarrow dt = \frac{T_y}{G A^*} dz$ inter-
prisma $\frac{dt}{dz} = \frac{T_y}{G A^*}$

- Caso della sezione rettangolare: (sez. doppiamente simmetrica)



$$A = bh$$

$$J_{x'} = \int_0^b \int_0^h y'^2 dA = \int_0^b \frac{y'^3}{3} \Big|_0^h dx' \Rightarrow J_{x'} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J_x = J_{x'} - Ad^2 = \frac{1}{3}bh^3 - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)bh^3 = \frac{4-3}{12}bh^3$$

$$\mu = \frac{6}{5}$$

fattore di taglio



andamento parabólico
 max. rel.

$$\tau_{zy}(y) = \frac{I_y}{J_x b} S_z''(y) = \frac{I_y}{J_x b} S_z''(y)$$

in $y=0$

max. rel.

$$\frac{d\tau}{dy} \sim \frac{2y}{h^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\tau_{zy}^{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} = 1.5 \bar{\tau}_{zy}$$

$$S_x(y) = A'' \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{parabolica}$$

parabolica

$\nabla \phi = 0$ per $y = \pm \frac{h}{2}$
f.ne per $\nabla^2 \phi$

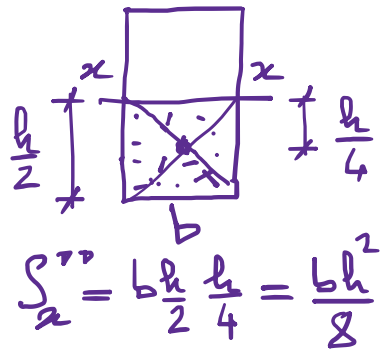
max. per $y=0$:
rel. $\frac{bh^2}{8}$

$$J_{zy}(y) = \frac{I_y}{12} \frac{\frac{1}{2} (h^2 - y^2)}{b}$$

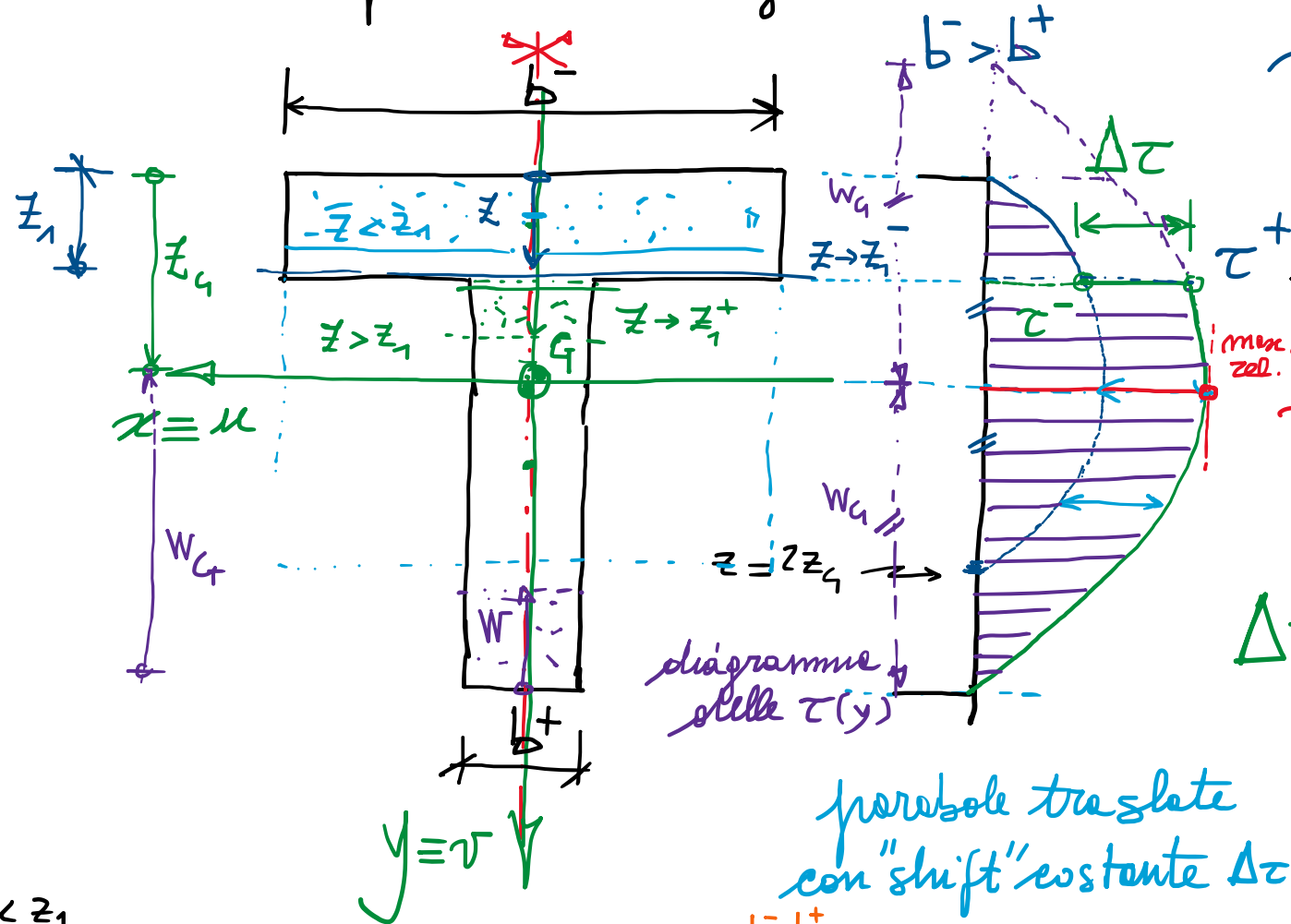
$$= \frac{6 T_y}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \left(y / \frac{h}{2} \right)^2$$

$$= \frac{3}{2} \underbrace{\frac{I_y}{b h}}_A \underbrace{\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)}_{d = 1.74}$$

$$\frac{d}{dy} = -4 \cdot \frac{2y}{h^2} \text{ lin.}$$



- Sezioni composte da rettangoli elementari:



$$z = z_1$$

$$\tau^- = \frac{I S_1}{J b^-} ; \tau^+ = \frac{I S_1}{J b^+}$$

discontinuità della lunghezza della corda $\Delta b = b^- - b^+$

discontinuità "salto" delle τ

$$\Delta\tau = \tau^+ - \tau^- = \frac{I S_1}{J} \left(\frac{1}{b^+} - \frac{1}{b^-} \right) = \frac{I S_1}{J} \frac{b^- - b^+}{b^+ b^-} = \frac{I S_1}{J} \frac{\Delta b}{b^+ b^-}$$

$$= \tau^- \frac{\Delta b}{b^+} = \tau^+ \frac{\Delta b}{b^-}$$

$$\tau^- b^- = \tau^+ b^+ ; \frac{\tau^+}{\tau^-} = \frac{b^-}{b^+}$$

$$S_x = b z \left(z_c - \frac{z}{2} \right) \sim z^2$$

stessa funzione

$$+ \Delta b z_1 \left(z_c - \frac{z_1}{2} \right) \text{ "shift" costante}$$

$$S_x = b^- z_1 \left(z_c - \frac{z_1}{2} \right) + b^+ \left(z - z_1 \right) \left(z_c - \frac{z + z_1}{2} \right) \sim z^2$$

stessa funzione

$$+ b^+ z \left(z_c - \frac{z}{2} \right) - b^+ z_1 \left(z_c - \frac{z_1}{2} \right)$$

