Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

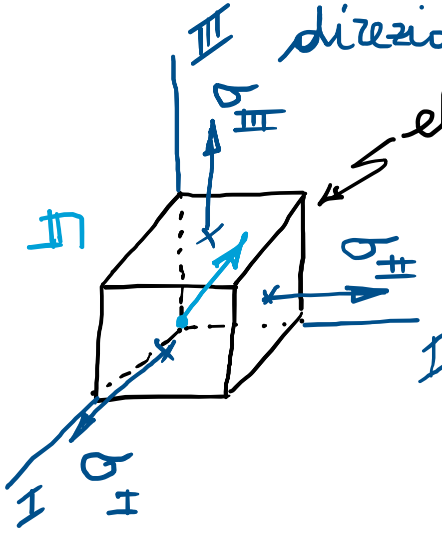
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

Cerchi e Arbèlo di Mohr (sforzo triassiale)

N.B. τ definito in modulo in 3D

direzioni principali di sforzo



elementino 3D ritagliato secondo la terna principale

$\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$

tens. principali

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

matrice sforzo diagonale nel riferimento principale

piano di Mohr

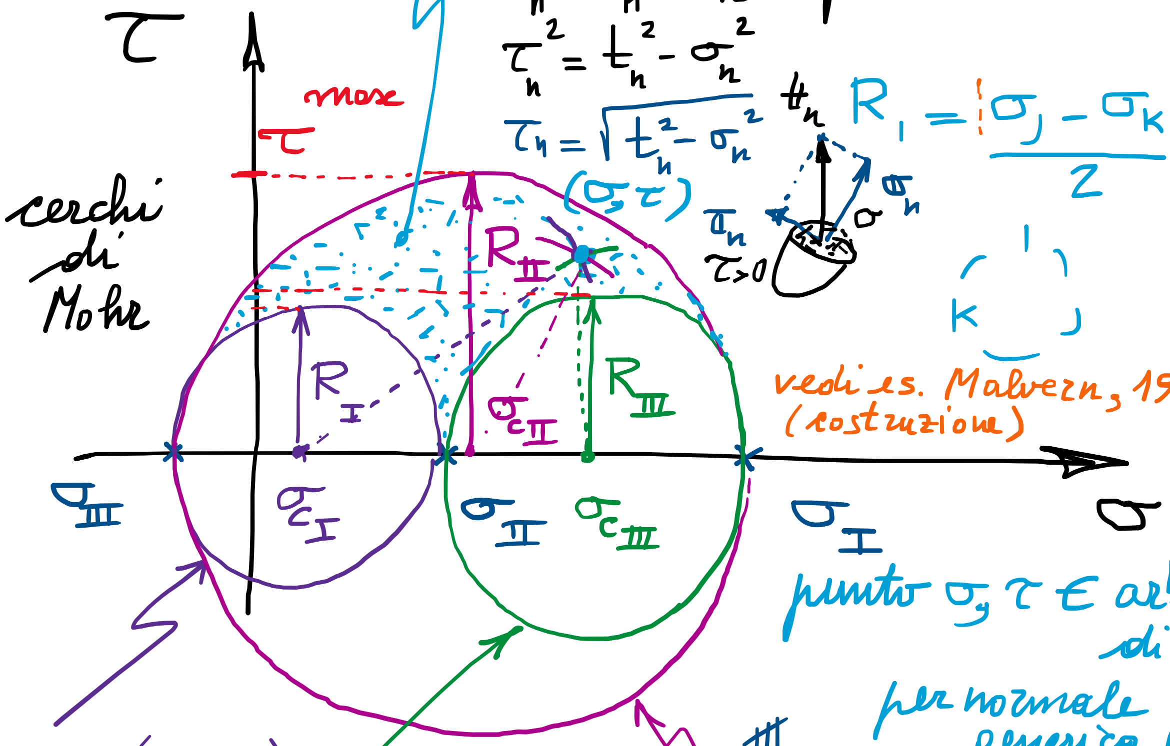
arbèlo di Mohr

$t_n = \sigma_n + \tau_n$

$\tau_n^2 = t_n^2 - \sigma_n^2$

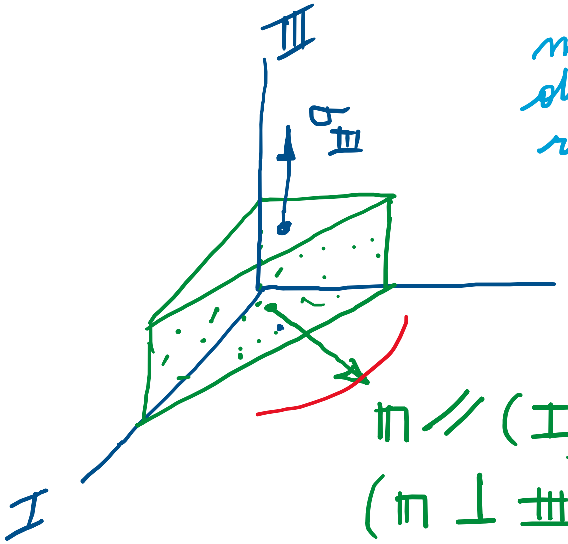
$\tau_n = \sqrt{t_n^2 - \sigma_n^2}$

$R_I = \left| \frac{\sigma_J - \sigma_K}{2} \right| = \tau_{JK}^{max}$

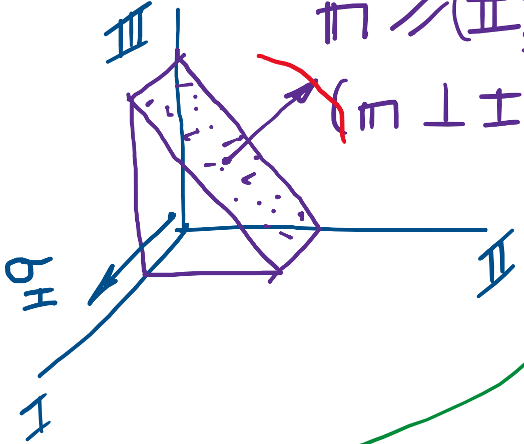


vedi es. Malvern, 1969 (costruzione)

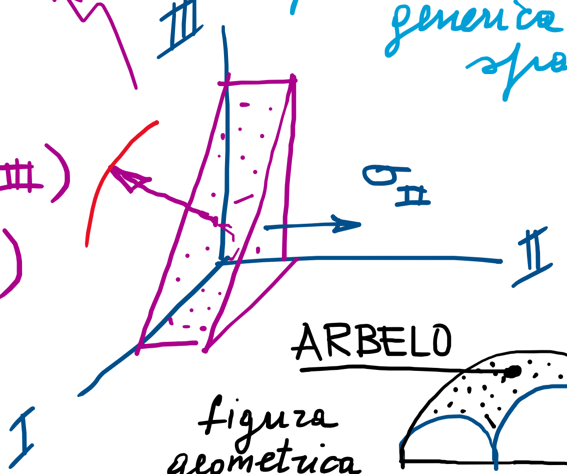
punto $\sigma, \tau \in$ arbèlo di Mohr per normale generica nello spazio



$n \parallel (I, II)$
$(n \perp III)$



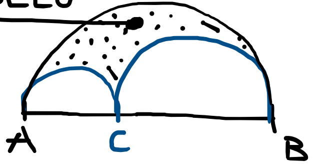
$n \parallel (II, III)$
$(n \perp I)$



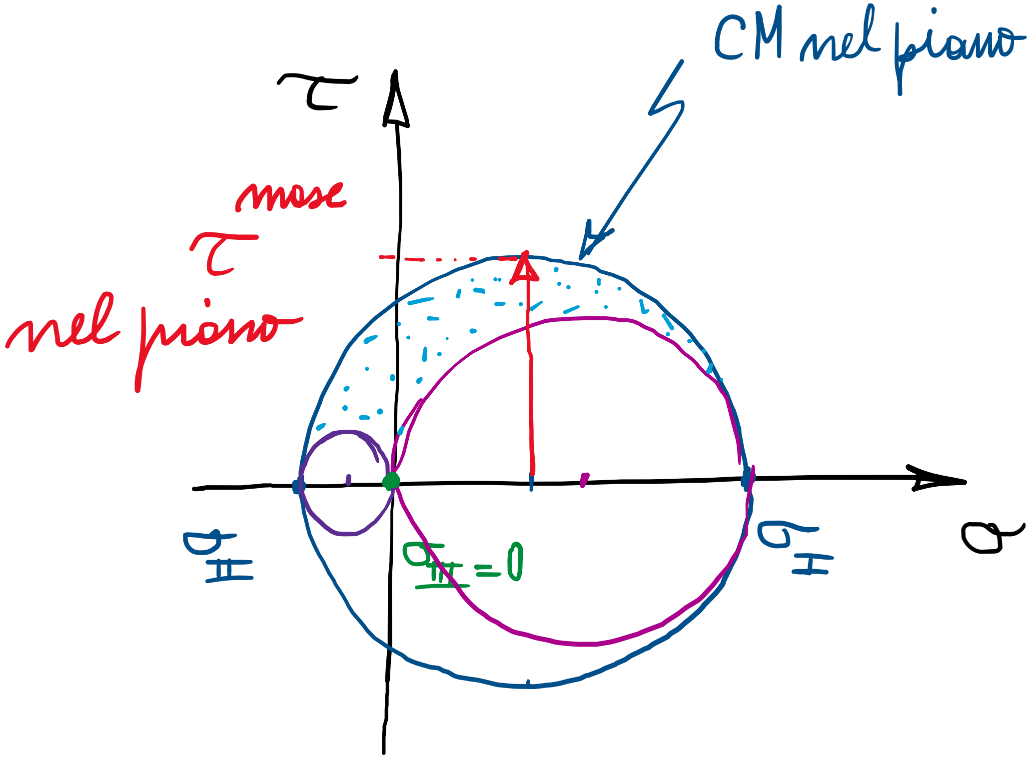
$n \parallel (I, III)$
$(n \perp II)$

ARBELO

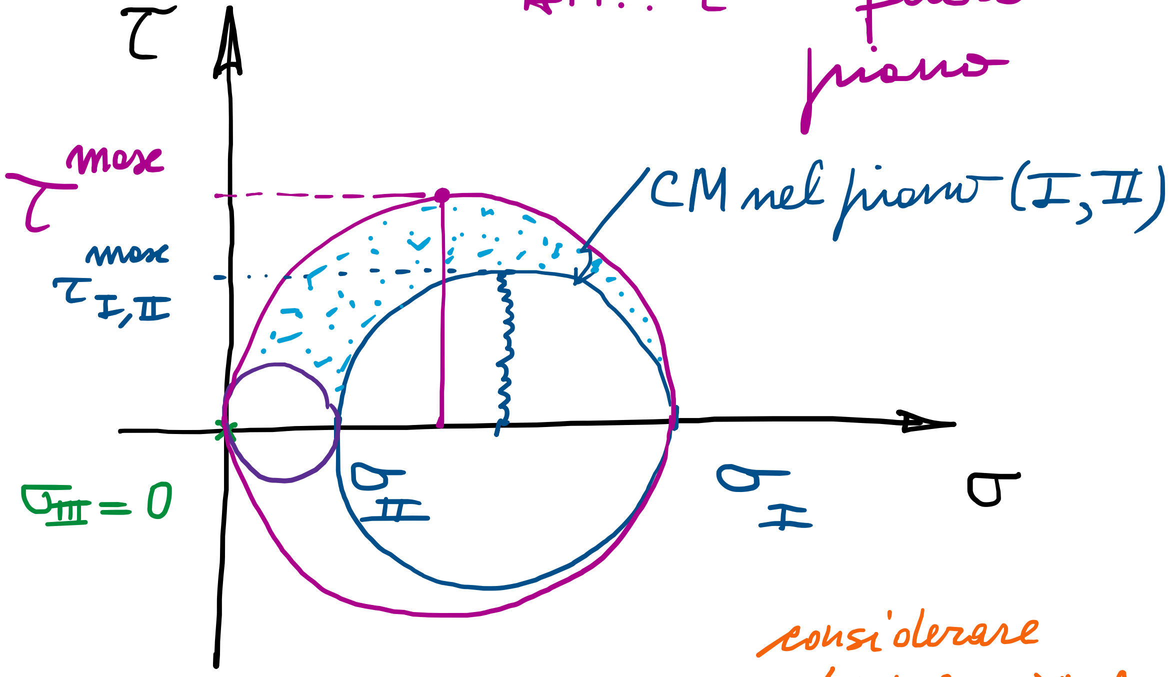
figura geometrica



• Rilevanza dell'Arbelo di Mohr per stato di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$) [ai fini della verifica di resistenza]



ATT.: τ^{max} fuori piano



considerare l'Arbelo di Mohr diviene rilevante qui.

$\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$

tensioni principali di segno opposto

il CM nel piano è il CM più "grande" (R^{max})

$\Rightarrow$ τ^{max} colta nel piano

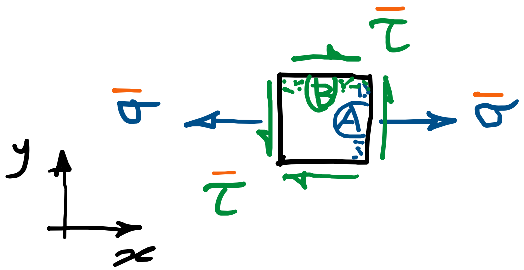
$\sigma_I \cdot \sigma_{II} \geq 0$

tensioni principali di segno uguale

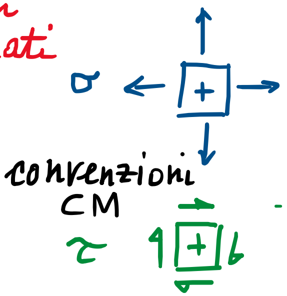
il CM nel piano non è il più "grande"

$\Rightarrow$ τ^{max} avviene fuori piano

- CM per stato di sforzo piano alla de Saint Venant (travi) (una componente di sforzo normale nulla)

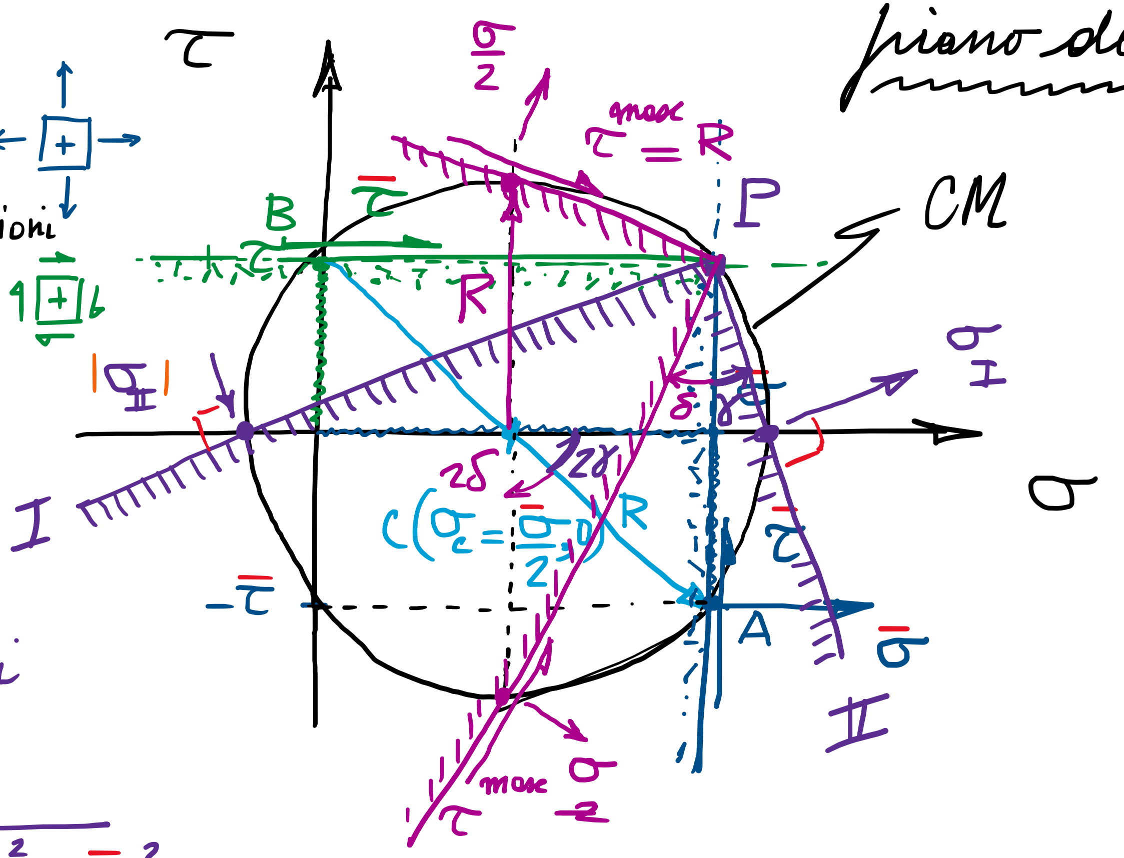


$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \bar\sigma \\ \boxed{\sigma_{yy} = 0} \\ \tau_{xy} = \bar\tau \end{cases}$$ valori assegnati



particolare stato di sforzo piano con una componente di sforzo normale nulla

piano di Mohr



$$\sigma_c = \frac{\bar\sigma}{2}$$

$$R = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\bar\sigma}{2}\right)}_{\sigma_c}^2 + \bar\tau^2}$$

$= \tau^{max}$

tensioni principali

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R$$

$$= \frac{\bar\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar\sigma}{2}\right)^2 + \bar\tau^2}$$

$$\sigma_I \cdot \sigma_{II} = (\sigma_c + R)(\sigma_c - R)$$

$$= \sigma_c^2 - R^2$$

$$= \cancel{\left(\frac{\bar\sigma}{2}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{\bar\sigma}{2}\right)^2} - \bar\tau^2 \leq 0$$

τ^{max} nel piano ⟵ tensioni principali di segno opposto

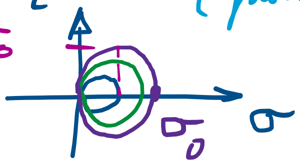
$$\tan 2\gamma = \frac{2\bar\tau}{\bar\sigma}$$

inclinaz. diz. princ. ...... $\gamma = \frac{1}{2}\,\mathrm{atan}\left(\frac{2\bar\tau}{\bar\sigma}\right)$

inclinaz. ...... $\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$ $\left(2\delta + 2\gamma = \frac{\pi}{2}\right.$
dizez. secondo $\quad \delta + \gamma = \frac{\pi}{4}\left.\right)$
cui agisce le τ^{max}

— Formule di verifica per stati di sforzo alla DSV

(parametrizzazione su prova di trazione)



— Criterio di Tresca: $\tau^{max} \le \tau_0^{T} = \frac{\sigma_0}{2} = 0.5\,\sigma_0$

(è il più cautelativo) $\quad 2\tau^{max} \le \sigma_0$

$$\sigma_{eq}^{T} = 2R = |\sigma_I - \sigma_{II}| = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + \boxed{4}\,\bar{\tau}^2} \le \sigma_0 \qquad \sigma_{eq}^{T} = \bar{\sigma}\sqrt{1+4\left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}\right)^2} \le \sigma_0$$

infatti: $\sigma_I - \sigma_{II} = \cancel{\sigma_c} + R - (\cancel{\sigma_c} - R) = 2R = 2\sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{4} + \bar{\tau}^2} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + 4\bar{\tau}^2}$

— Criterio di von Mises:

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}} = \sqrt{\bar{\sigma}^2 + \boxed{3}\,\bar{\tau}^2} \le \sigma_0 \quad \leadsto \quad \tau_0^{vM} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 = \frac{\overset{\sim 1.73}{\sqrt{3}}}{3}\sigma_0 \simeq .577\,\sigma_0$$

infatti $\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II} = (\sigma_c + R)^2 + (\sigma_c - R)^2 - (\sigma_c + R)(\sigma_c - R)$

$= \sigma_c^2 + R^2 + 2\cancel{\sigma_c}R + \cancel{\sigma_c^2} + R^2 - 2\cancel{\sigma_c}R - \cancel{\sigma_c^2} + R^2 = \sigma_c^2 + 3R^2$

$= \frac{\bar{\sigma}^2}{4} + 3\left(\frac{\bar{\sigma}^2}{4} + \bar{\tau}^2\right) = \bar{\sigma}^2 + 3\bar{\tau}^2$

resist. a taglio $\begin{cases} \tau_0^{T} = 0.5\,\sigma_0 \\ \tau_0^{vM} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 \\ \tau_0^{dSV} = \frac{1}{1+\nu}\sigma_0 \end{cases}$ (es. $\nu = \frac{1}{3}$ ⇝ $0.75\,\sigma_0$)

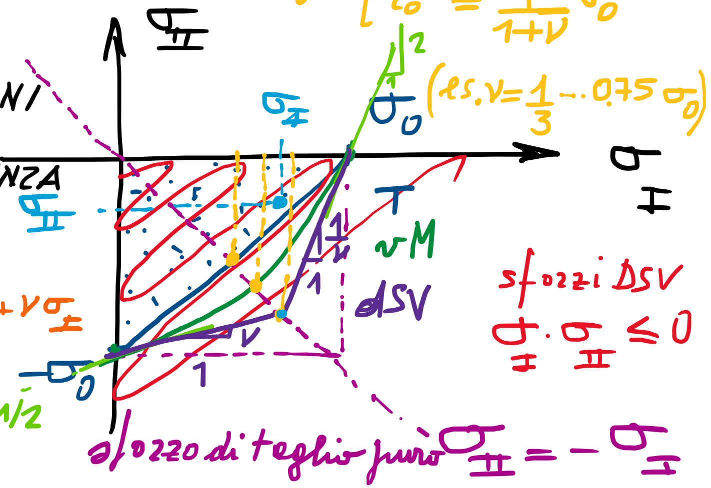
— Criterio di de Saint Venant: $\nu = \frac{E}{2G} - 1 < \frac{1}{2}$ coeff. di contraz. trasversale o di Poisson

$$\sigma_{eq}^{dSV} = \max\begin{cases} |\sigma_I - \nu\,\sigma_{II}| \\ |\sigma_{II} - \nu\,\sigma_I| \end{cases} \le \sigma_0$$

è < 0 ATT.!

$-\sigma_I = \sigma_{II} = -\sigma_0 + \nu\sigma_I$

$(1+\nu)\,\sigma_I = \sigma_0$



— Ordine di conservatività: $\sigma_{eq}^{T} \ge \sigma_{eq}^{vM} \ge \sigma_{eq}^{dSV}$ (dSV è il meno cautelativo)