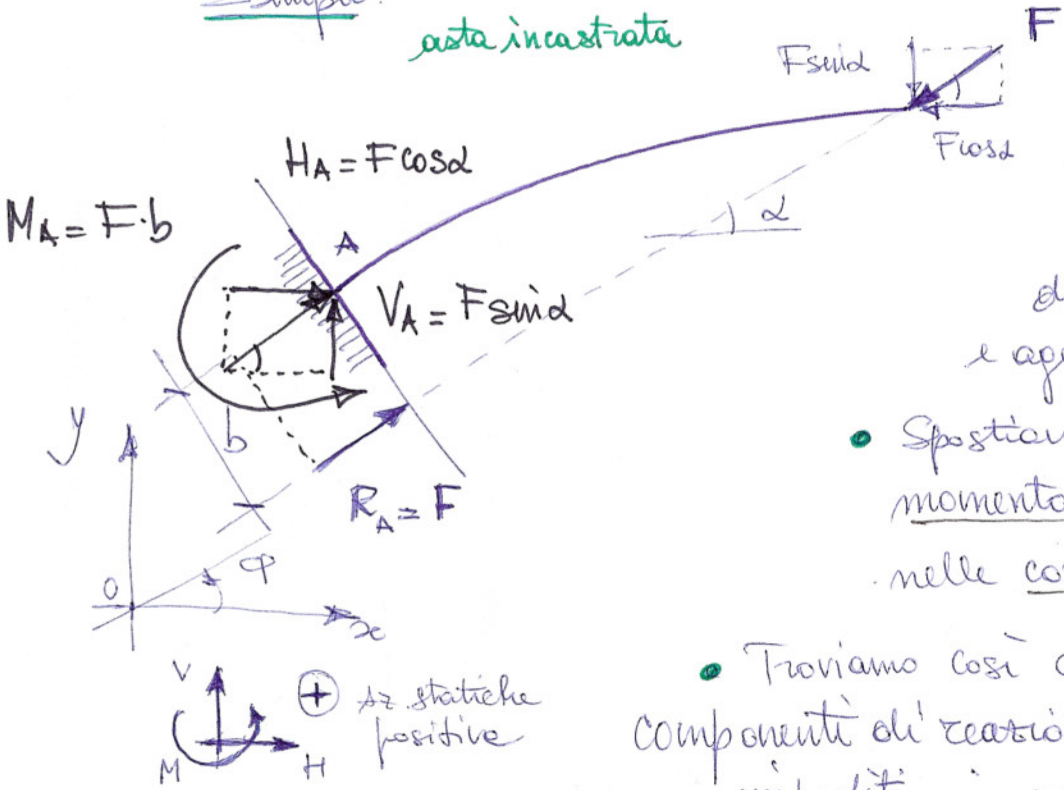
erizzi@unibg.it

Calcolo delle reazioni vincolari

Connotazione statica dei vincoli: postuliamo l'∃ di reazioni vincolari in corrispondenza dei gdv forniti (ossia dei gdl impediti)

Esempio: asta incastrata



- Poichè il vincolo incastro è in grado di rimuovere tutte le libertà del corpo rigido deve essere in grado di fornire RV uguale e contraria e agente lungo la stessa retta d'azione (R_A).
- Spostiamo in seguito R_A in A, introducendo un momento di trasporto $M_A = R_A \cdot b = F \cdot b$, e decomponiamola nelle componenti H_A e V_A (orizzontale e verticale).
- Troviamo così che l'incastro è in grado di esplicare tre componenti di reazione vincolare corrispondenti ai tre gradi di libertà impediti, in modo da poter imporre l'equilibrio.

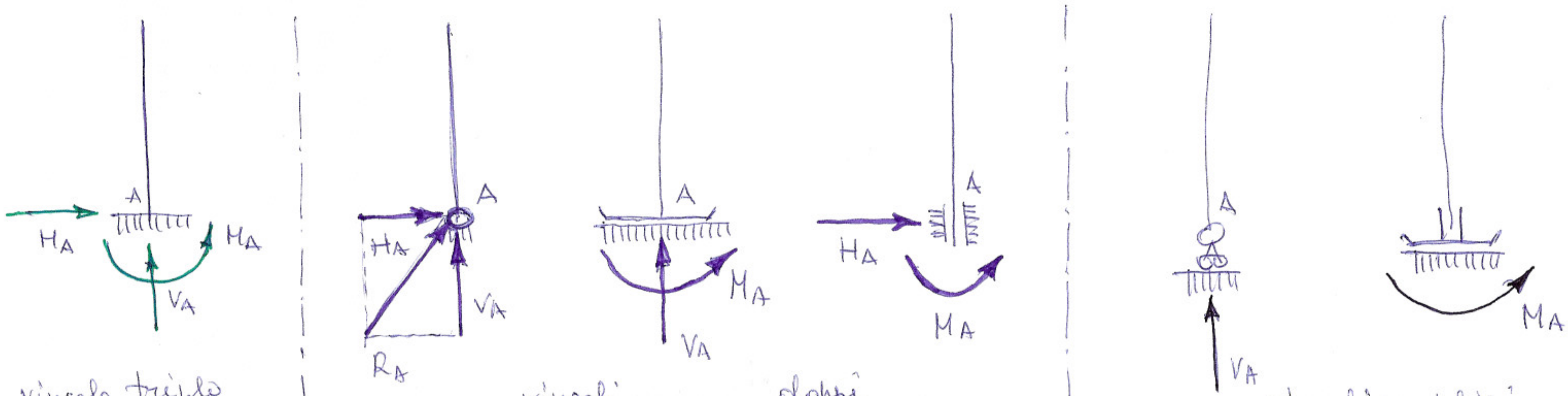
Equazioni cardinali della statica

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R} = \mathbb{0} \\ \mathbb{M}_0 = \mathbb{0} \end{array}\right\} \xrightarrow[2D]{} \begin{cases} \sum_i F_{x_i} = 0 & \text{equil. alla traslaz. h} \rightarrow -F\cos\alpha + H_A = 0 \\ \sum_i F_{y_i} = 0 & \text{" " " v} \rightarrow -F\sin\alpha + V_A = 0 \\ \sum_i M_{A_i} = 0 & \text{" " rotaz. rispetto ad A} \rightarrow -F \cdot b + M_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_A = F\cos\alpha \\ V_A = F\sin\alpha \\ M_A = F \cdot b \end{cases}$$

c.v.d.

(oppure tre equaz. di equil. alle rotazioni rispetto a tre p.ti non allineati)

- Componenti di reazione vincolare dei vincoli visti:

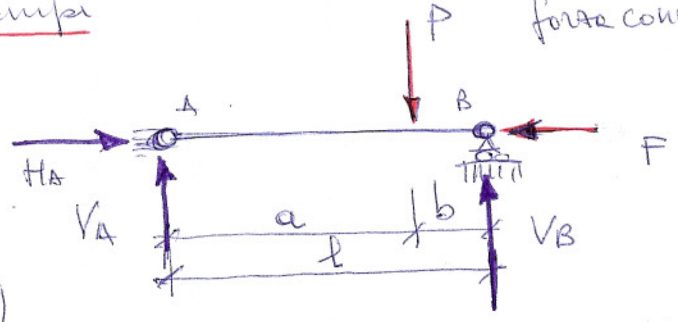


vincolo **triplo** (3 comp. di RV) | vincoli **doppi** (2 comp. di RV) | vincoli **semplici** (1 comp. di RV)

- Si evidenziano le RV incognite del sistema – la scrittura delle equazioni di equilibrio consentirà di determinarle (se la struttura non è labile e staticamente determinata).

- Esempi

forza concentrata



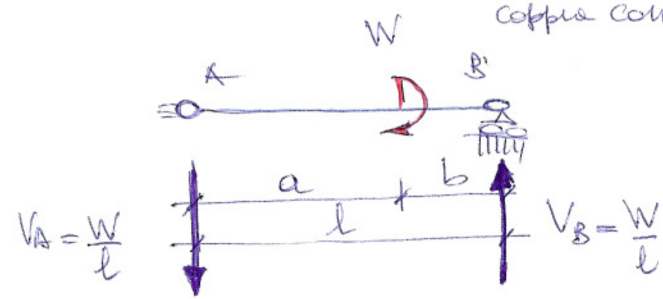
(es. $a \geq b$)

scelgo l'ordine che più mi conviene

$$\begin{cases} \Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot \ell - Pa = 0 \Rightarrow V_B = \dfrac{Pa}{\ell} \\ \Sigma M_B = 0 \Rightarrow -V_A \cdot \ell + Pb = 0 \Rightarrow V_A = P\dfrac{b}{\ell} \quad (\leq V_B \text{ qui}) \\ \Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A - F = 0 \Rightarrow H_A = F \end{cases}$$

- verifica $\left[\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P = 0 \Rightarrow P\dfrac{b}{\ell} + P\dfrac{a}{\ell} - P = 0 \checkmark \right]$

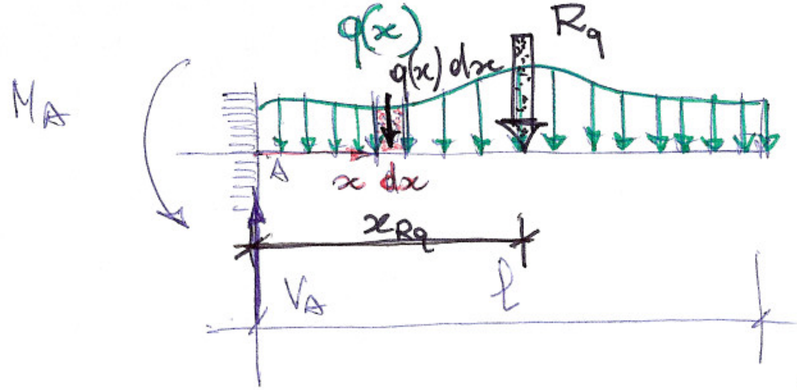
coppia concentrata



$$\begin{cases} \Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot \ell - W = 0 \Rightarrow V_B = \dfrac{W}{\ell} \\ \Sigma M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot \ell - W = 0 \Rightarrow V_A = \dfrac{W}{\ell} \end{cases}$$

$\left[\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V_A + V_B = 0 \Rightarrow -\dfrac{W}{\ell} + \dfrac{W}{\ell} = 0 \checkmark \right]$

• Mensola con carico distribuito



$[q] = \frac{[F]}{[L]}$ Carico per unità di lunghezza (es. peso proprio)

(Carico unif. distr. ⇒ $q(x) = q = \text{cost.}$)

✦ Risultante del carico: $R_q = \int_0^\ell q(x)\,dx$

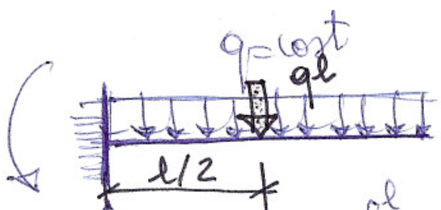
✦ Posizione del risultante $x_{R_q} = \frac{M_A}{R_q} = \frac{\int_0^\ell q(x)\,x\,dx}{\int_0^\ell q(x)\,dx}$ (Th. di Varignon)

✦ Per calcolo RV è sufficiente considerare il solo risultante (solo a tali fini!)

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - \int_0^\ell q(x)\,dx = 0 \Rightarrow V_A = R_q \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - \int_0^\ell q(x)\,x\,dx = 0 \Rightarrow M_A = \int_0^\ell q(x)\,x\,dx = R_q \cdot x_{R_q} \end{cases}$$

Casi particolari:

• carico uniformemente ripartito

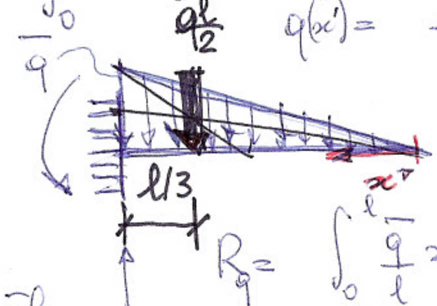


$M_A = R_q \cdot x_{R_q} = q\ell \cdot \frac{q\int_0^\ell x\,dx}{q\int_0^\ell dx} = \frac{q\ell^2}{2}$ ⌒ $\frac{\ell}{2}$

$V_A = R_q = q\int_0^\ell dx = q\ell$

• carico linearmente ripartito

$q(x') = \frac{\bar{q}}{\ell}x'$



$M_A = \frac{\bar{q}\ell^2}{6}$

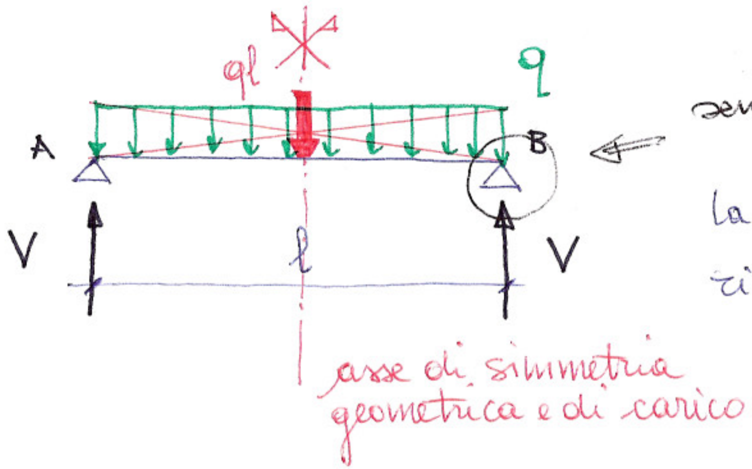
$V_A = \frac{\bar{q}\ell}{2}$

$R_q = \int_0^\ell \frac{\bar{q}}{\ell}x'\,dx' = \frac{\bar{q}}{\ell}\left.\frac{x'^2}{2}\right|_0^\ell = \bar{q}\frac{\ell}{2}$

$x_{R_q} = \frac{\int_0^\ell \frac{\bar{q}}{\ell}x'x'\,dx'}{\bar{q}\frac{\ell}{2}} = \frac{2}{\ell^2}\left.\frac{x'^3}{3}\right|_0^\ell = \frac{2}{3}\ell$

($x_{R_q} = \ell/3$)

Trave semplicemente appoggiata con carico uniformemente distribuito



semplice appoggio: è equivalente al carrello

La struttura è labile (alla traslazione orizzontale) ma risulta ipostatica per carichi verticali (può essere messa in equilibrio in tali condizioni).

Per la simmetria deve evidentemente risultare $V_A = V_B = V$ - le due reazioni vincolari verticali devono equilibrare (alla trasla+. verticale) il risultante del carico q:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2V = ql \Rightarrow V = \frac{ql}{2}$$

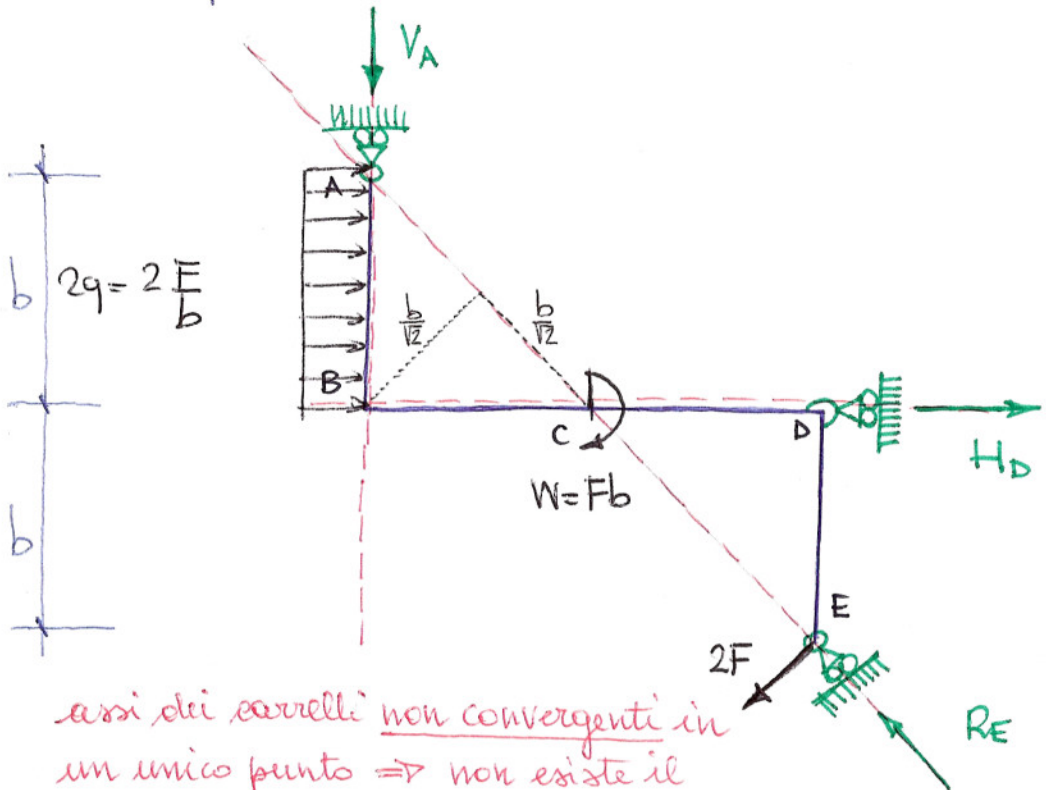
Effettivamente, la scrittura delle eq.ni di equilibrio alla rotazione rispetto ad A e rispetto a B, porta alla stessa conclusione:

procedura standard

$$\begin{cases} \Sigma M_B = 0 \Rightarrow V_A \cancel{l} = q\cancel{l}\frac{l}{2} \Rightarrow V_A = \frac{ql}{2} \\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_B \cancel{l} = q\cancel{l}\frac{l}{2} \Rightarrow V_B = \frac{ql}{2} \end{cases}$$

N.B: Si noti che la scrittura di due eq.ni di equilibrio alla rotazione (anziché una di equilibrio alla rotazione e una alla traslazione) consente di scrivere due eq.ni indipendenti, ciascuna in una singola incognita.

Esempio di asta tre-carrelli



assi dei carrelli non convergenti in un unico punto ⇒ non esiste il CIR dell'asta ⇒ asta fissa, non labile

Essendo la struttura isostatica è possibile calcolare le tre reazioni vincolari in corrispondenza dei tre carrelli mediante il solo equilibrio.

Al fine di scrivere tre eq.ni indipendenti, ciascuna in un'unica incognita, risulta conveniente imporre l'equilibrio alla rotazione rispetto ai punti in cui, a due a due, convergono gli assi dei carrelli:

- $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -\cancel{2}F\cdot\frac{b}{\cancel{2}} - Fb - \cancel{2}F\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\sqrt{2}b + R_E\frac{b}{\sqrt{2}} = 0$

  da cui: $R_E = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{b}}(2+3\sqrt{2})F\cancel{b}$

- $\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \cancel{2F\cdot\frac{b}{2}} - \cancel{Fb} - 2F\cdot 2\sqrt{2}b + H_D\cdot b = 0$

  da cui: $H_D = 4\sqrt{2}F$

- $\Sigma M_C = 0 \Rightarrow V_A b - \cancel{2}F\cdot\frac{b}{\cancel{2}} - Fb - 2F\sqrt{2}b = 0$

  da cui: $V_A = 2(1+\sqrt{2})F$

Verifiche:

$$\Sigma F_y \overset{?}{=} 0 \Rightarrow -V_A - \frac{2F}{\sqrt{2}} + \frac{R_E}{\sqrt{2}} = -\cancel{2F} - \cancel{2\sqrt{2}F} - \cancel{\sqrt{2}F} + \cancel{2F} + \cancel{3\sqrt{2}F} = 0 \checkmark \text{ ok}$$

$$\Sigma F_x \overset{?}{=} 0 \Rightarrow 2F + H_D - \frac{2F}{\sqrt{2}} - \frac{R_E}{\sqrt{2}} = \cancel{2F} + \cancel{4\sqrt{2}F} - \cancel{\sqrt{2}F} - \cancel{2F} - \cancel{3\sqrt{2}F} = 0 \checkmark \text{ ok}$$

erizzi@unibg.it