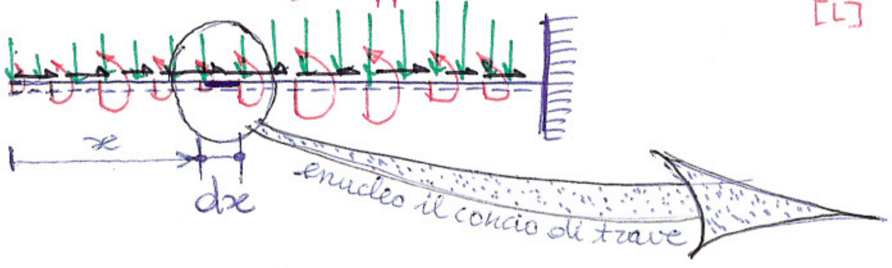
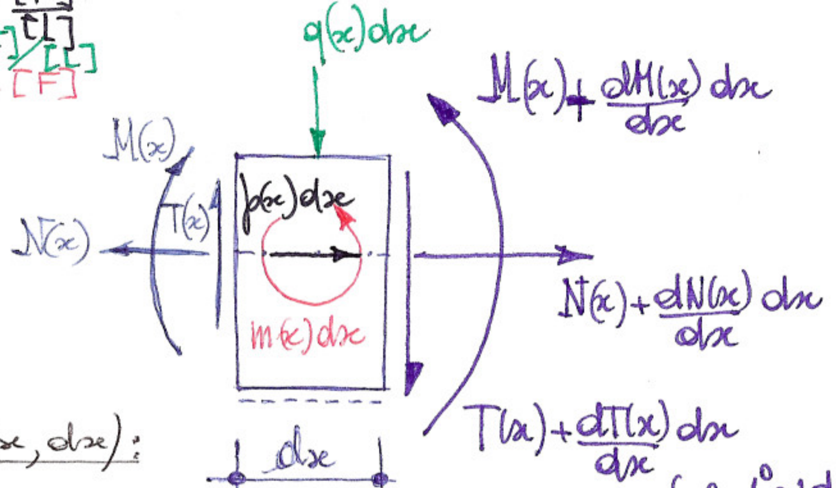
erizzi@unibg.it

Equazioni indefinite di equilibrio del concio di trave (rettilinea)

carichi
- $p(x)$ carico assiale distribuito $[p] = \frac{[F]}{[L]}$
- $q(x)$ carico trasversale distribuito $[q] = \frac{[F]}{[L]}$
- $m(x)$ coppie distribuite $[m] = \frac{[F \cdot L]}{[L]} = [F]$





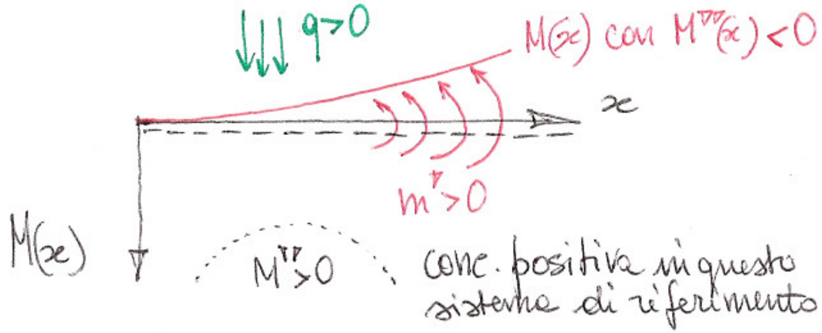
(al 1° ordine)

Equazioni di equilibrio del concio in sede indefinite ($\forall x, dx$):

$$\begin{cases} \sum F_x^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{N(x)} + \frac{dN(x)}{dx}\cancel{dx} - \cancel{N(x)} + p(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{N'(x) = \frac{dN(x)}{dx} = -p(x)} \\ \sum F_y^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{T(x)} + \frac{dT(x)}{dx}\cancel{dx} - \cancel{T(x)} + q(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{T'(x) = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)} \\ \sum M_{x+dx}^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{M(x)} + \frac{dM(x)}{dx}\cancel{dx} - \cancel{M(x)} + m(x)\cancel{dx} - T(x)\cancel{dx} + \underbrace{q(x)dx\frac{dx}{2}}_{o(dx^2)} \to 0 = 0 \Rightarrow \boxed{M'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = T(x) - m(x)} \end{cases}$$

[A rigore andrebbe fatto ragionamento al limite per $\Delta x \to 0$]

- Si noti che la derivata prima di M è pari al taglio (se $m=0$)
- Inoltre, derivando una volta l'ultima relazione: $M''(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} - \frac{dm(x)}{dx} = \boxed{-\left(q(x) + m'(x)\right) = M''(x)}$



Pertanto: la concavità di M è sempre nella direzione del carico q

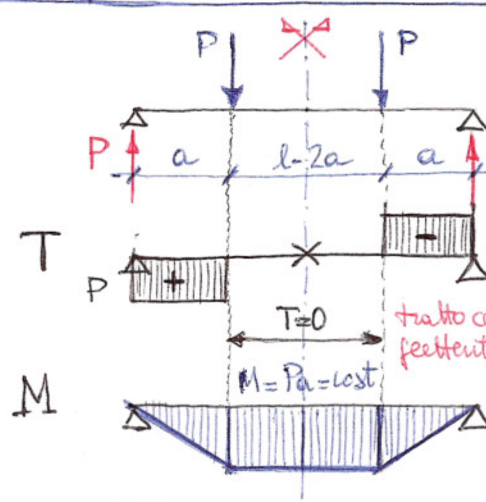
Casi particolari di interesse che possono manifestarsi in tratti di una struttura:

tratto con carico	N(x)	T(x)	M(x)
$p=0$, $q=0$, $m=0$ — tratto scarico	costante	costante	lineare * / costante
$p=$ cost., $q=$ cost., $m=$ cost. — tratto con carico uniform. distr.	lineare	lineare	quadratico / lineare
$p=$ lin., $q=$ lin., $m=$ lin. — tratto con carico linearm. distr.	quadratica	quadratico	cubico / quadratico

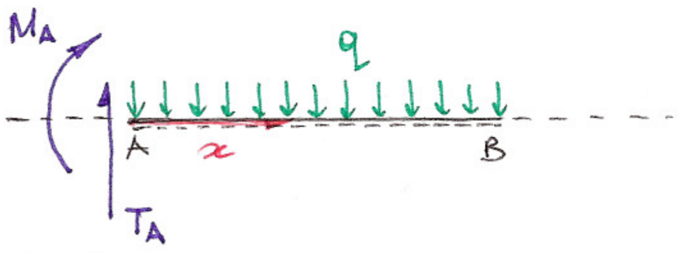
N.B.: Taglio e Momento sono collegati tra di loro tramite la relazione $M'(x) = T(x)$ [per $m=0$].

* Il caso lineare comprende naturalmente anche il caso costante (quando $T=0$ su un tratto). Esempio:

PROVA DI FLESSIONE SU QUATTRO PUNTI

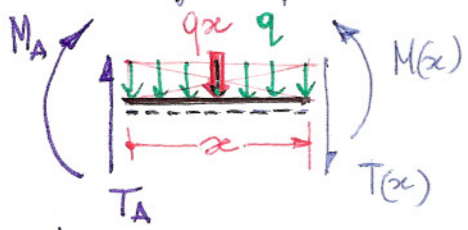


Determinazione del <u>momento max</u> su tratto con carico uniformemente distribuito



T, M : valori all'inizio del tratto A, B

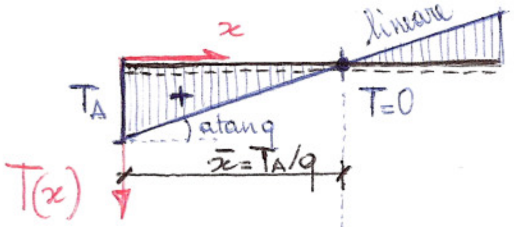
- Scrittura per equilibrio diretto del tratto x:



$$\begin{cases} \sum F_y^{Ax} = 0 \Rightarrow T_A - qx - T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = T_A - q\cdot x \quad \text{lineare} \\ \sum M_x^{Ax} = 0 \Rightarrow -M_A - T_A x + qx\cdot\frac{x}{2} + M(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(x) = M_A + T_A x - q\frac{x^2}{2} \quad \text{quadratico}$$

T



p.to di nullo del taglio:

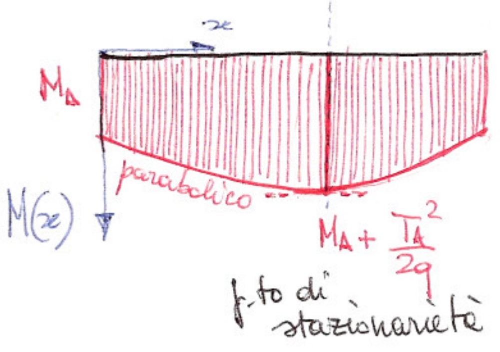
$T(\bar{x}) = T_A - q\bar{x} = 0$ per $\boxed{\bar{x} = \frac{T_A}{q}}$

è p.to di stazionarietà per $M(x)$ [in quanto $\frac{dM(x)}{dx} = T(x)$]

$$M_{max\,rel.} = M(\bar{x}) = M_A + T_A\bar{x} - q\frac{\bar{x}^2}{2}$$

$$= M_A + T_A\frac{T_A}{q} - \frac{\cancel{q}}{2}\frac{T_A^2}{q^{\cancel{2}}} = \boxed{M_A + \frac{1}{2}\frac{T_A^2}{q} = M_{max}}$$

M



- Scrittura indiretta tramite le eq.ni indefinite di equilibrio (per integrazione):

$$M''(x) = -q = \text{cost}$$

$$\int dx \quad M'(x) = -qx + C_1 = T(x)$$

$$\int dx \quad M(x) = -q\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

con C_1, C_2 costanti di integrazione tali per cui:

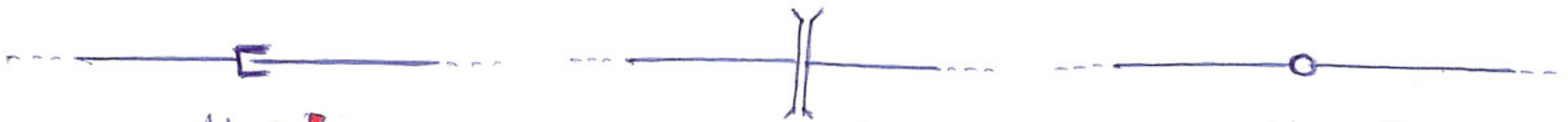
- $T(0) = \boxed{C_1 = T_A}$
- $M(0) = \boxed{C_2 = M_A}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(x) = T_A - q\cdot x \\ M(x) = M_A + T_A x - q\frac{x^2}{2} \end{cases}$$ come determinato in precedenza

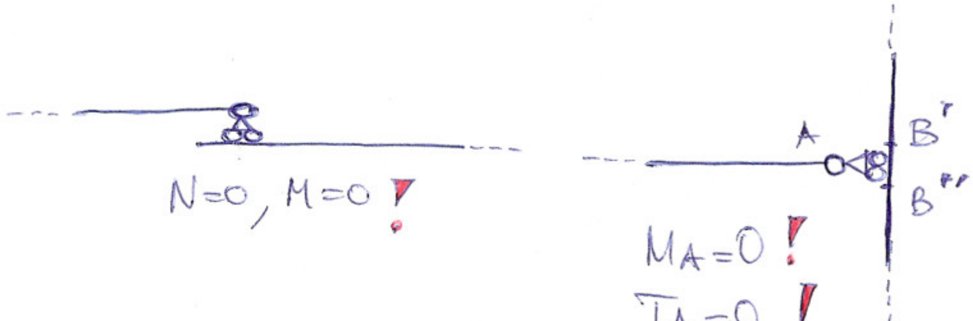
Verifiche importanti sulle Azioni Interne

- I vincoli interni (svincoli rispetto alla continuità) condizionano relativamente le Azioni Interne in corrispondenza di essi:

esempi:



$N=0$! $T=0$! $M=0$!



$N=0,\ M=0$!

$M_A=0$!

$T_A=0$!

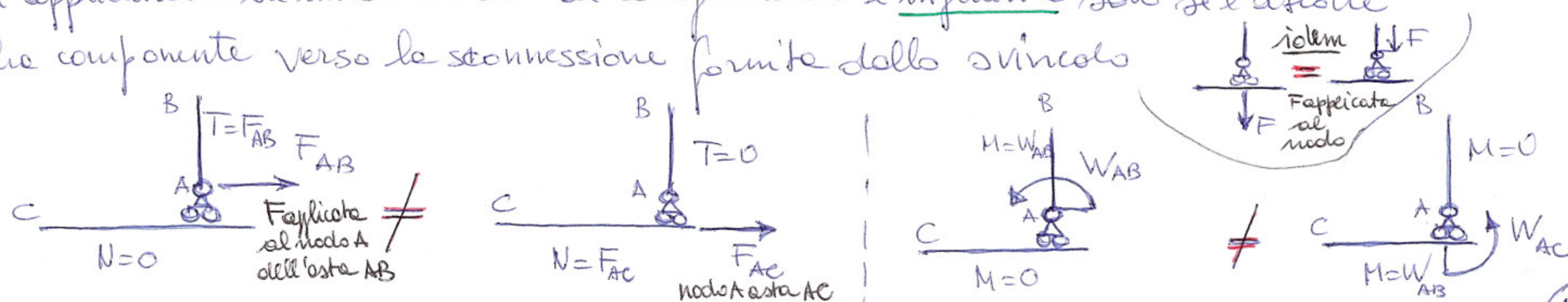
$N_{B'}=N_{B''}$

$M_{B'}=M_{B''}$

$(T_{B'} \neq T_{B''})$

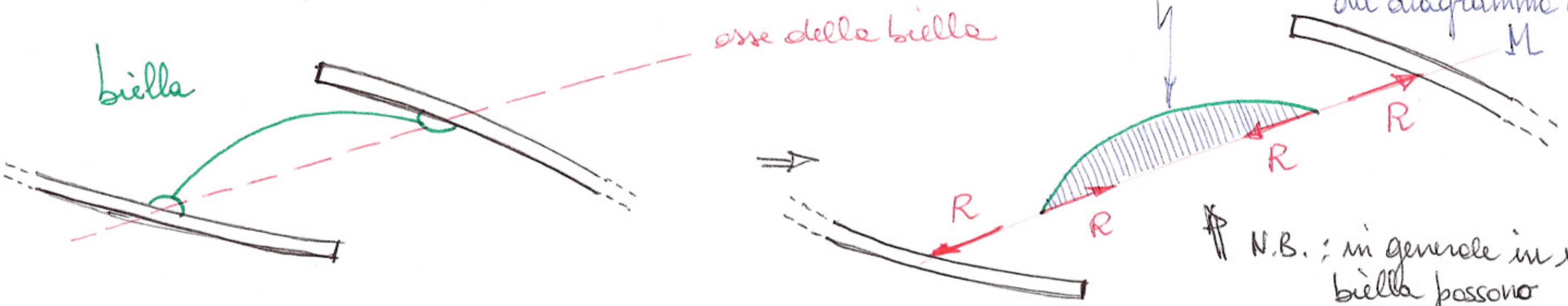
- Azioni concentrate ai nodi:

l'applicazione su una delle aste di collegamento è influente solo se l'azione ha componente verso la sconnessione fornita dallo svincolo

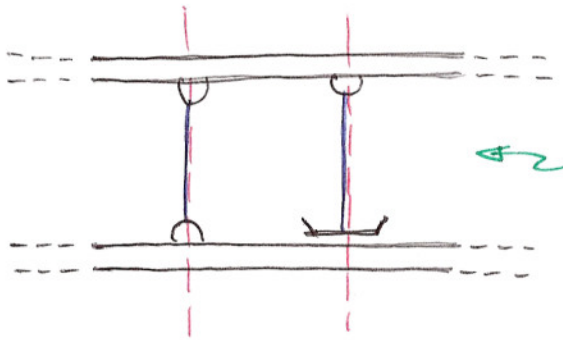


Riconoscere le bielle statiche (bielle senza carichi applicati lungo l'asta)

può semplificare il calcolo delle AI



N.B.: in generale in una biella possono essere presenti tutte e tre le A.I.



bielle sedi di sola azione assiale (in quanto gli assi delle bielle coincidono con le bielle stesse)

Verificare tutti gli equilibri nodali (in particolare quelli a tre o più vie):

si riportano sul nodo le azioni su di esso eventualmente agenti (forze, coppie) e le Azioni Interne alle estremità delle aste che confluiscono sul nodo, così come determinate dai diagrammi di azione interna. Si verifica che il nodo sia globalmente equilibrato alla traslazione (es. orizzontale e verticale) e alla rotazione.

erizzi@unibg.it