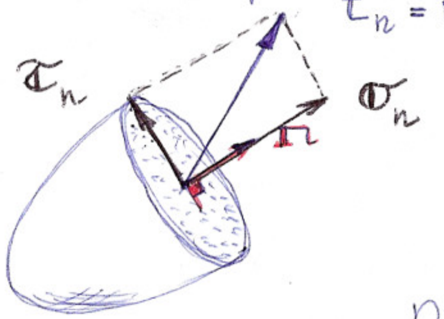
erizzi@unibg.it

Tensioni e direzioni principali di sforzo

- Definito il vettore sforzo di Cauchy $\mathbf{t}_n$, abbiamo notato che, in generale, $\mathbf{t}_n \not\parallel \mathbf{n}$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(T)} \cdot \mathbf{n}$$

posso omettere il trasposto poiché $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ (tensore simmetrico)



Possiamo quindi definire due componenti di $\mathbf{t}_n$:

- $\boldsymbol{\sigma}_n$: sforzo normale, $\parallel$ a $\mathbf{n}$
- $\boldsymbol{\tau}_n$: sforzo tangenziale, $\perp$ a $\mathbf{n}$

vettori

tali per cui $\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n$

Risulterà:

$$- \quad \boldsymbol{\sigma}_n = \underbrace{(\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n})}\, \mathbf{n} = \sigma_n \, \mathbf{n}$$

con $\sigma_n = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = n_i \sigma_{ij} n_j$

scalare!

$$- \quad \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_n \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}$$

ove $\mathbf{I}$: tensore identità del II ordine di componenti $I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Delta di Kronecker

tale per cui

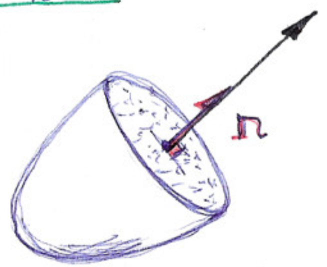
$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

matrice identità 3x3

- Ci chiediamo se $\exists$ delle direzioni particolari $\mathbf{n}$ (dette principali) tali per cui $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{0}$

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_n \mathbf{n}$$



Sulle facce $\perp$ a tali direzioni agiscono quindi solo sforzi normali e non sforzi tangenziali

$\mathbf{n}$ direzione principale di sforzo

- La condizione $\tau_n = \mathbb{0}$ conduce alla relazione $(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot n = \mathbb{0}$.

- Infatti $t_n = \sigma_n$ comporta:

$$t_n = \sigma_n$$

$$\sigma \cdot n = \sigma_n n = \sigma_n \mathbb{I} \cdot n \Rightarrow \sigma \cdot n - \sigma_n \mathbb{I} \cdot n = \mathbb{0}$$

$$\boxed{(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot n = \mathbb{0}}$$

cioè con $n \neq 0$

la ricerca delle soluzioni non banali di questa equazione costituisce un classico problema agli autovalori $[\, A \cdot x = \lambda x \,]$ notazione tipica in matematica : λ autovalori (lambda) x autovettori

- Il problema agli autovalori associato al tensore sforzo di Cauchy (simmetrico) fornisce:
  - σ_n autovalori $\rightarrow$ tensioni o sforzi principali
  - n autovettori $\rightarrow$ direzioni principali di sforzo.

- Sappiamo che il pb. agli autovalori ammette soluzioni non banali sse:

$$\det(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) = \det\left(\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{bmatrix} \right) = 0$$

componenti σ_{ij} di σ rispetto ad un sistema arbitrario.

- Sviluppando il determinante si ottiene l'equazione caratteristica:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{segno meno per comodità}}}{-}\det(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) = \underbrace{\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3}_{\text{polinomio caratteristico}} = 0$$

(equaz. di 3° grado nell'incognita σ_n)

ove i coefficienti del polinomio caratteristico si dicono invarianti di sforzo in quanto risultano indipendenti dal sistema di riferimento (vista la natura tensoriale di σ) e sono definiti come:

- invariante primo (o lineare)

$$I_1 = \overset{\text{traccia}}{\mathrm{tr}}\,\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

- invariante secondo (o quadratico)

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \mathrm{tr}^2\sigma\right)\left[= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\sigma^2) - (\mathrm{tr}\,\sigma)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2\right)$$

$$= -\begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33}\end{vmatrix}$$

$$= \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - \left(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}\right)$$

- invariante terzo (o cubico)

$$I_3 = \det(\sigma)$$

($\leftarrow$ nota che $\det(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) = I_3$ per $\sigma_n = 0$)

$$= \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma^3 - \mathrm{tr}\,\sigma\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \frac{1}{6}\mathrm{tr}^2\sigma\right)$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\,\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{22}$$

Sviluppo del determinante: $\quad -\det(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) = 0$

- $$-\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{vmatrix} = 0$$

- $$\begin{aligned} &-(\sigma_{11}-\sigma_n)\left[(\sigma_{22}-\sigma_n)(\sigma_{33}-\sigma_n)-\sigma_{23}^2\right] + \\ &+\sigma_{12}\left[\sigma_{12}(\sigma_{33}-\sigma_n)-\sigma_{13}\sigma_{23}\right] + \\ &-\sigma_{13}\left[\sigma_{12}\sigma_{23}-\sigma_{13}(\sigma_{22}-\sigma_n)\right] = 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &-(\sigma_{11}-\sigma_n)\left[\sigma_{22}\sigma_{33}-\sigma_{22}\sigma_n-\sigma_{33}\sigma_n+\sigma_n^2-\sigma_{23}^2\right] + \\ &+\sigma_{12}^2(\sigma_{33}-\sigma_n)-\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} + \\ &-\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}+\sigma_{13}^2(\sigma_{22}-\sigma_n) = 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &-\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_n+\sigma_{11}\sigma_{33}\sigma_n-\sigma_{11}\sigma_n^2+\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \\ &+\sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_n-\sigma_{22}\sigma_n^2-\sigma_{33}\sigma_n^2+\sigma_n^3-\sigma_{23}^2\sigma_n + \\ &+\sigma_{12}^2\sigma_{33}-\sigma_{12}^2\sigma_n-2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}+\sigma_{13}^2\sigma_{22}-\sigma_{13}^2\sigma_n = 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} &\sigma_n^3-(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\sigma_n^2-(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{22}\sigma_{33}-\sigma_{11}\sigma_{33})\sigma_n + \\ &-\underbrace{(\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}-\sigma_{12}^2\sigma_{33}-\sigma_{23}^2\sigma_{11}-\sigma_{13}^2\sigma_{22})} = 0 \end{aligned}$$

- $$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n - I_3 = 0$$

è necessariamente $\det\sigma$ poiché, per $\sigma_n = 0$ $\det(\sigma-\sigma_n\mathbb{I}) = I_3 = \det\sigma$

- le tre radici dell'equazione caratteristica sono le tre tensioni principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ e sono reali in quanto σ è reale e simmetrico.

- Si noti che a due radici distinte corrispondono autovettori mutuamente $\perp$.

Infatti: **DIM.**

Soluz. 1 $\quad n_{II} \cdot \left(\sigma \cdot n_I = \sigma_I \, n_I \right)$

Soluz. 2 $\quad n_I \cdot \left(\sigma \cdot n_{II} = \sigma_{II} \, n_{II} \right)$

premoltiplico scalarmente

$$\Longrightarrow \begin{cases} n_{II} \cdot \sigma \cdot n_I = \sigma_I \; n_{II} \cdot n_I \\ n_I \cdot \sigma \cdot n_{II} = \sigma_{II} \; n_I \cdot n_{II} \end{cases}$$

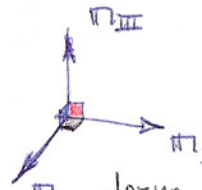
poichè $n_{II} \cdot \sigma \cdot n_I = n_I \cdot \sigma^{(T)} \cdot n_{II}$

e $n_{II} \cdot n_I = n_I \cdot n_{II}$ facendo la differenza si ottiene:

$$\boxed{0 = \underbrace{(\sigma_I - \sigma_{II})}_{\neq 0 \text{ per ip.}} \, n_I \cdot n_{II}}$$

poichè si assume che $\sigma_I \neq \sigma_{II}$

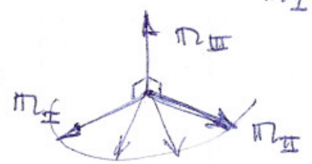
segue che $\boxed{n_I \cdot n_{II} = 0}$, cioè $n_I \perp n_{II}$



terna principale univocam. definita

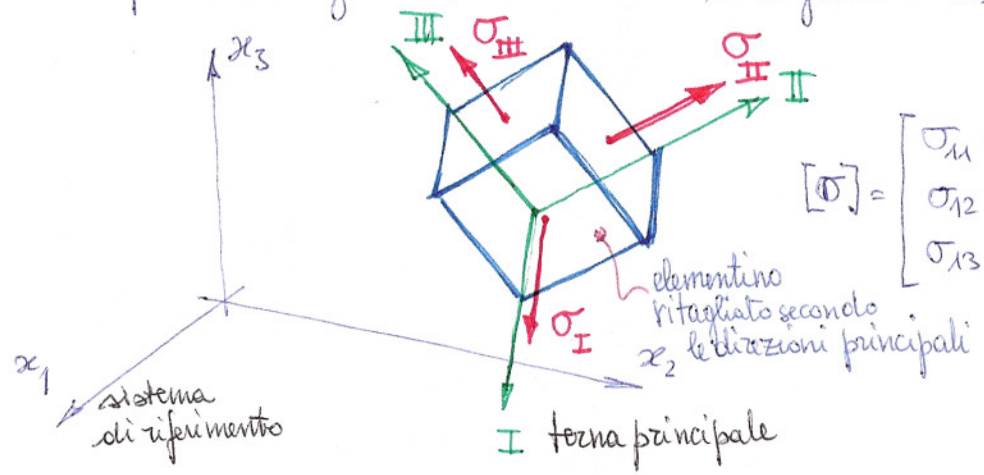
Molteplicità delle radici:

- 3 radici distinte: $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III} \Rightarrow$ 3 direzioni principali mutuamente $\perp$
- 2 radici distinte (2 " coincidenti): es. $\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III} \Rightarrow$ ogni vettore $\perp$ a n_{III} è direz. principale nel piano (I, II)
  [posso sceglierne due nel piano mutuamente perpendicolari]



- 3 radici coincidenti: $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} \Rightarrow$ ogni direzione nello spazio è direz. principale (sforzo isotropo o idrostatico) $\Rightarrow$ uguale in tutte le direzioni.
  [posso scegliere una terna cartesiana arbitraria] qualsiasi terna è terna principale

In ogni caso posso scegliere una terna ortogonale n_{I}, n_{II}, n_{III} detta <u>terna principale</u>



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{I} & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

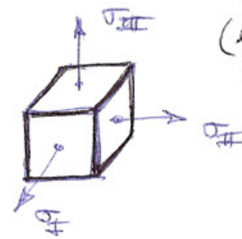
<u>diagonale nel riferimento principale</u> (solo sforzi normali!)

Invarianti: (espressi nella terna principale)

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{I} + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = -(\sigma_{I}\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{I}\sigma_{III}) \\ I_3 = \sigma_{I}\,\sigma_{II}\,\sigma_{III} \end{cases}$$

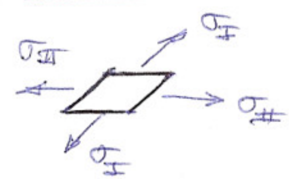
<u>Classificazione dello stato di sforzo</u>:

- 3D: $\sigma_{I} \neq 0$, $\sigma_{II} \neq 0$, $\sigma_{III} \neq 0 \Rightarrow$



(in generale lo stato di sforzo è <u>tridimensionale</u> o triassiale)

- 2D: una tens. princ. $= 0$, es. $\sigma_{III} = 0$: stato di sforzo piano, nel piano $(I, II) \Rightarrow$



sforzo <u>piano</u> o <u>bidimensionale</u> o biassiale

- 1D: un'unica tens. princ. $\neq 0$, es.: $\sigma_{I} \neq 0$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

sforzo <u>monodimensionale</u> o monoassiale

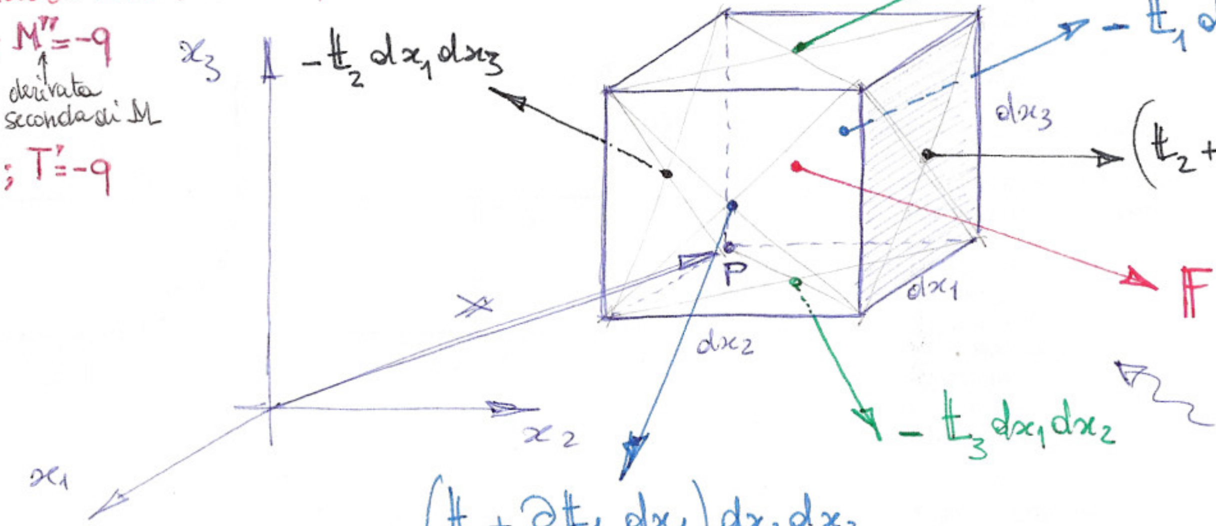
(ad esempio si era visto lo stato di sforzo in una prova di trazione $\Rightarrow$ si tratta di un caso di sforzo monodimensionale).

Equazioni indefinite di equilibrio dei mezzi continui

(Vedi analogia con le eq.ni indefinite di equilibrio del concio di trave rettilinea)

$M' = T$; $M'' = -q$ (derivata seconda di M)

e $N' = -p$; $T' = -q$



$[\mathbb{F}] = \frac{[F]}{[L]^3}$

forza per unità di volume

parallelepipedo n-esimo ritagliato nell'intorno di P con tutte le forze su di esso agenti

Equilibrio alla traslazione (sulle forze!):

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\cancel{\mathbb{t}_i} + \frac{\partial \mathbb{t}_i}{\partial x_i} dx_i\right) \cancel{dx_j dx_k} - \cancel{\mathbb{t}_i dx_j dx_k} + \mathbb{F}\, \cancel{dx_1 dx_2 dx_3} = \mathbb{0}$$

$\forall\, dV$!

i, j, k permutazione di indici

$$\frac{\partial \mathbb{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbb{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbb{t}_3}{\partial x_3} + \mathbb{F} = \mathbb{0} \iff \mathbb{t}_{i,i} + \mathbb{F} = \mathbb{0}$$

Sono 3 eq. di equilibrio scalari: $t_{ij,i} + F_j = 0$ $\quad j = 1,2,3$

poiché $t_{ij} = \sigma_{ij}$ $\quad \sigma_{ij,i} + F_j = 0$

$[\mathrm{div}\,\sigma] = \frac{[F/L^2]}{[L]} = \frac{[F]}{[L]^3}$ ok

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{div}\,\sigma + \mathbb{F} &= \mathbb{0} \\ \nabla \cdot \sigma + \mathbb{F} &= \mathbb{0} \end{aligned}}$$

div: operatore divergenza

scritture analoghe

nabla $\nabla(\ ) = \frac{\partial(\ )}{\partial \mathbf{x}}$ operatore gradiente

N.B. L'eq. alla rotazione conduce nuovamente alla simmetria del tensore sforzo di Cauchy:

$\sigma^T = \sigma$

derivate prime di σ ($\mathrm{div}\,\sigma = -\mathbb{F}$)

erizzi@unibg.it

- Scrittura più diretta delle eq. indef. di equil.:

$$\left(\sum_{i,1}\right) \frac{\partial \mathbb{t}_i}{\partial x_i} + \mathbb{F} = \mathbb{O} \qquad \text{(sottointesa la sommatoria sugli indici ripetuti)}$$

- poichè dalla relazione di Cauchy $\mathbb{t}_n = \mathbb{n} \cdot \sigma$:

$$\mathbb{t}_i = \mathbb{e}_i \cdot \sigma \qquad (\mathbb{e}_i : \text{versori degli assi cartesiani})$$

- sostituendo si ottiene:

$$\frac{\partial(\mathbb{e}_i \cdot \sigma)}{\partial x_i} + \mathbb{F} = \mathbb{O} \qquad (\mathbb{e}_i \text{ cost.})$$

$$\mathbb{e}_i \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \mathbb{F} = \mathbb{O} \rightarrow \left(\mathbb{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \sigma + \mathbb{F} = \mathbb{O}$$

- Definendo l'operatore gradiente: $\nabla() = \frac{\partial()}{\partial x_i} \mathbb{e}_i$

$$\underbrace{\nabla \cdot \sigma}_{\text{div } \sigma \text{, per sua definizione}} + \mathbb{F} = \mathbb{O}$$

erizzi@unibg.it