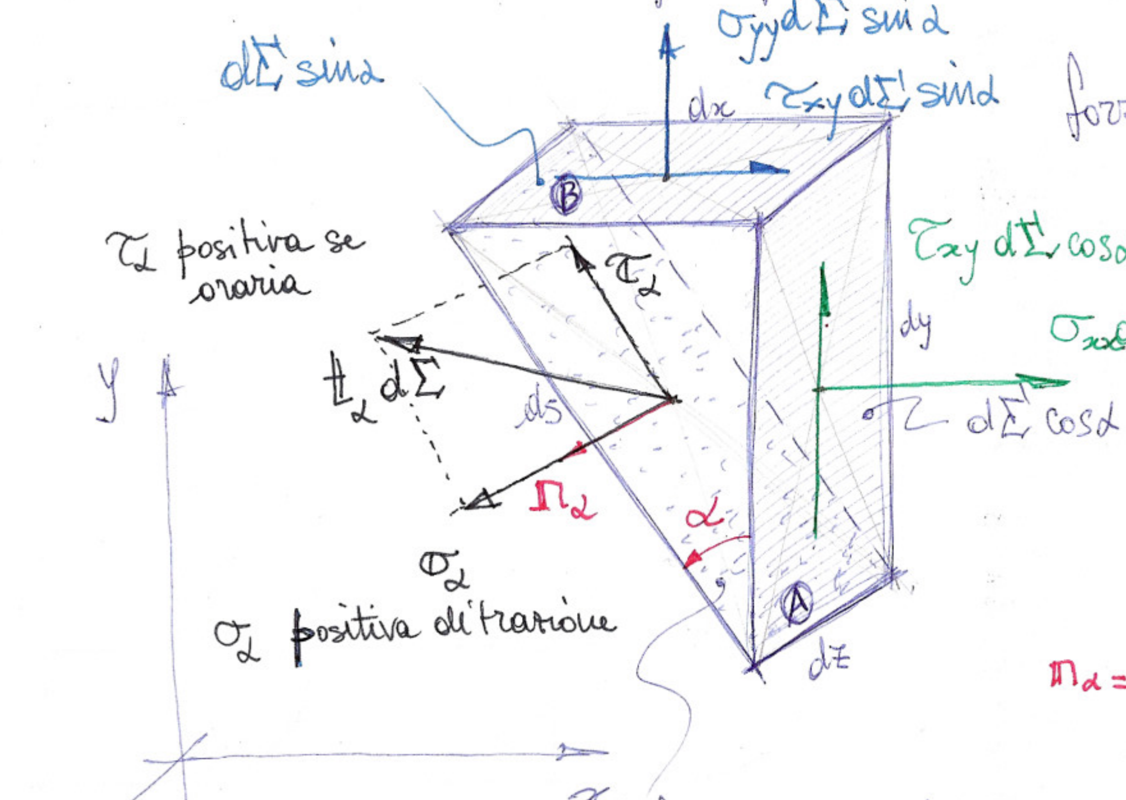
erizzi@unibg.it

Cerchio di (Culmann) - Mohr
[1866] [1882]

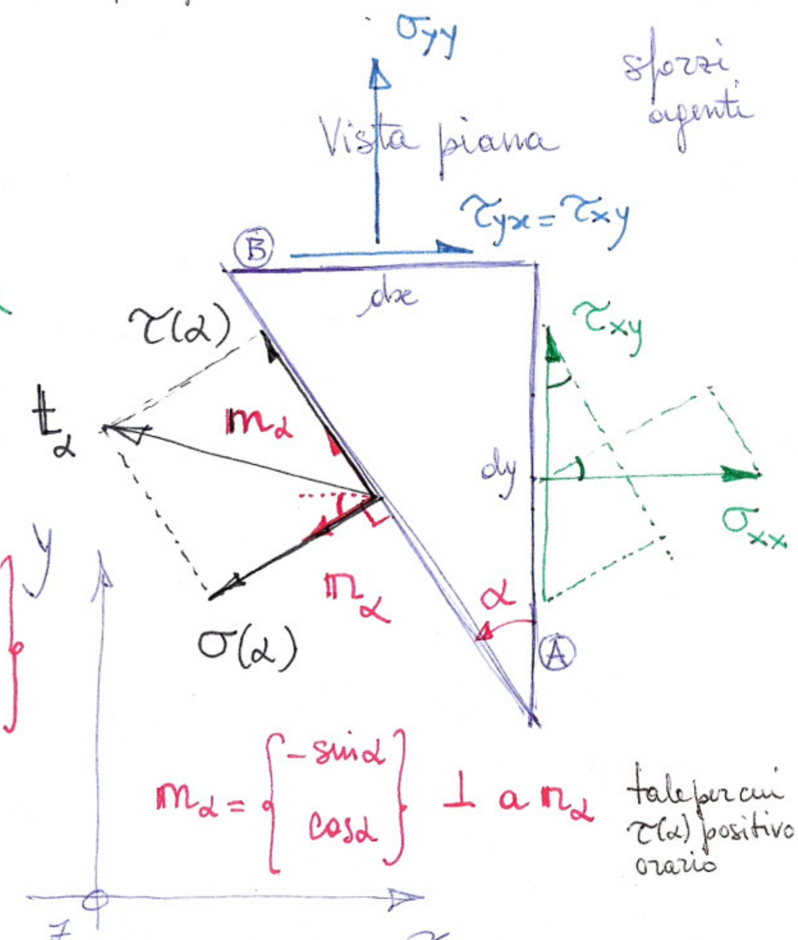
Si tratta di una rappresentazione grafica delle componenti di sforzo normale e tangenziale agenti su faccia di giacitura arbitraria nel piano, in presenza di stato di sforzo piano.
Si consideri uno stato di sforzo piano (ad es. con $\sigma_{III}=0$; $III = z$; $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$)
z è direz. principale



$$\begin{cases} dx = ds\cos\alpha \\ dy = ds\sin\alpha \end{cases}$$

faccia inclinata di area $d\Sigma$ e normale n_α nel piano (x,y)
$(d\Sigma = ds\,dz)$

$$n_\alpha = \begin{Bmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{Bmatrix}$$



$$m_\alpha = \begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} \perp \text{ a } n_\alpha$$ tale per cui $\tau(\alpha)$ positivo orario

(N.B.: $n_\alpha \cdot m_\alpha = \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0$)

- Equilibrio alla traslazione nelle direzioni m_α e m_α: (Valide in sede indefinita, $\forall d\Sigma$)

$$\begin{cases} \sigma(\alpha)\, d\Sigma = \sigma_{xx}\, d\Sigma \cos\alpha \cos\alpha + \sigma_{yy}\, d\Sigma \sin\alpha \sin\alpha + \tau_{xy}\, d\Sigma \cos\alpha \sin\alpha + \tau_{xy}\, d\Sigma \sin\alpha \cos\alpha \\ \tau(\alpha)\, d\Sigma = \sigma_{xx}\, d\Sigma \cos\alpha \sin\alpha - \sigma_{yy}\, d\Sigma \sin\alpha \cos\alpha - \tau_{xy}\, d\Sigma \cos\alpha \cos\alpha + \tau_{xy}\, d\Sigma \sin\alpha \sin\alpha \end{cases}$$

$\forall d\Sigma$:

$$\begin{cases} \sigma(\alpha) = \sigma_{xx} \cos^2\alpha + \sigma_{yy} \sin^2\alpha + \tau_{xy}\, 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \tau(\alpha) = \frac{\sigma_{xx}}{2}\, 2 \sin\alpha \cos\alpha - \frac{\sigma_{yy}}{2}\, 2 \sin\alpha \cos\alpha - \tau_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{cases}$$

- Ricorda le relazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} = 1 - 2\sin^2\alpha \\ = -1 + 2\cos^2\alpha \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} & [\alpha = \frac{\pi}{2} \to \frac{1-(-1)}{2} = 1, \text{ok}] \\ \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} & [\alpha = \frac{\pi}{2} \to \frac{1+(-1)}{2} = 0, \text{ok}] \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\cos 2\alpha}{2}} + \cancel{\frac{\cos 2\alpha}{2}} = 1 \quad \text{ok}$$

- Sostituendo si ottengono le leggi di variazione delle componenti σ e τ (in funzione dell'angolo 2α):

$$\begin{cases} \sigma(\alpha) = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau(\alpha) = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

Si tratta delle equazioni parametriche di una circonferenza di

centro $C = \left(\sigma_C = \dfrac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} ,\ 0 \right)$

raggio $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Infatti

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \cos^2 2\alpha + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\alpha + \cancel{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha} +$$

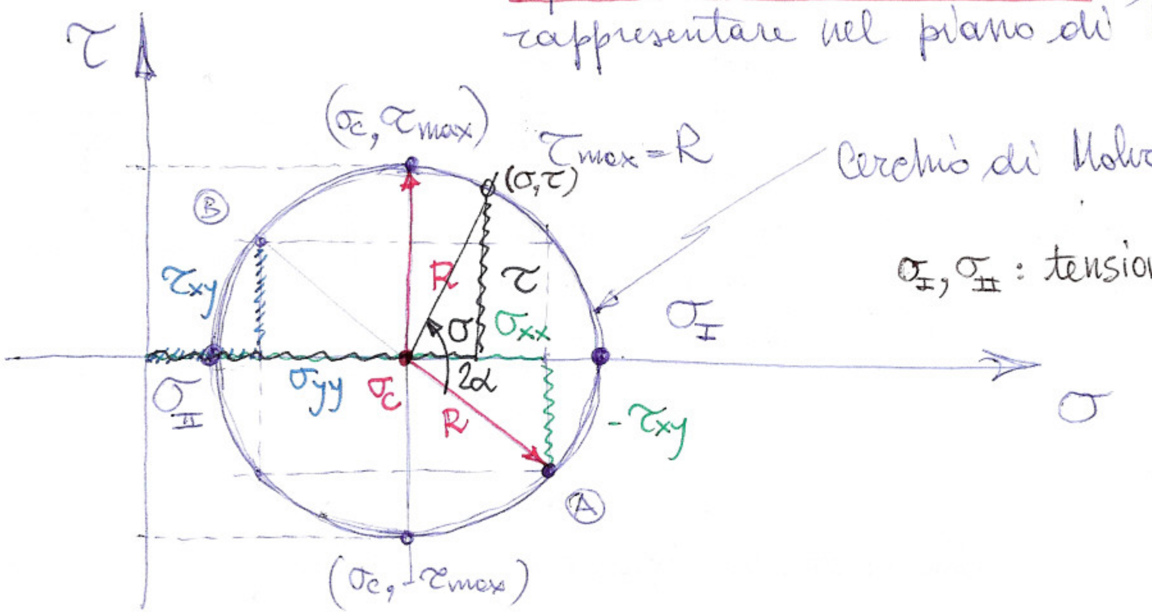
$$\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 \sin^2 2\alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha - \cancel{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha \cos 2\alpha} =$$

$$= \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma - \sigma_C)^2 + \tau^2 = R^2$$

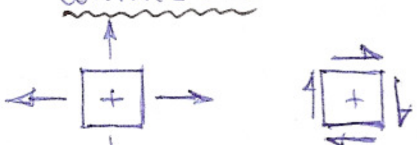
Eq. del cerchio di Mohr, che possiamo rappresentare nel piano di Mohr (σ, τ):

PIANO DI MOHR



σ_I, σ_{II} : tensioni principali nel piano

Convenzioni



σ trazioni $\qquad \tau$ orarie

• Derivazione alternativa sfruttando la relazione di Cauchy (che avevamo già ricavato imponendo l'equilibrio alla traslazione):

$$\mathbf{t}_{n} = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 \underbrace{\cancel{n_3}}_{\to 0}$$ (in quanto $n_\alpha \perp (x,y)$)

$n = n_\alpha$ $\begin{cases} n_1 = -\cos\alpha \\ n_2 = -\sin\alpha \end{cases}$ $m = m_\alpha$ $\begin{cases} m_1 = -\sin\alpha \\ m_2 = \cos\alpha \end{cases}$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz}(=0) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz}(=0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\sigma = \mathbf{t}_n \cdot n &= (\mathbf{t}_1 \cdot n)\, n_1 + (\mathbf{t}_2 \cdot n)\, n_2 \\
&= \left[\sigma_{xx}(-\cos\alpha) + \tau_{xy}(-\sin\alpha)\right](-\cos\alpha) + \\
&+ \left[\tau_{xy}(-\cos\alpha) + \sigma_{yy}(-\sin\alpha)\right](-\sin\alpha) \\
&= \sigma_{xx}\cos^2\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{yy}\sin^2\alpha \\
&= \sigma_{xx}\cos^2\alpha + \sigma_{yy}\sin^2\alpha + \tau_{xy}\, 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \underline{\text{ok}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau = \mathbf{t}_n \cdot m &= (\mathbf{t}_1 \cdot m)\, n_1 + (\mathbf{t}_2 \cdot m)\, n_2 \\
&= \left[\sigma_{xx}(-\sin\alpha) + \tau_{xy}\cos\alpha\right](-\cos\alpha) + \\
&+ \left[\tau_{xy}(-\sin\alpha) + \sigma_{yy}\cos\alpha\right](-\sin\alpha) \\
&= \sigma_{xx}\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xy}\cos^2\alpha + \tau_{xy}\sin^2\alpha - \sigma_{yy}\sin\alpha\cos\alpha \\
&= \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2}\, 2\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \quad \underline{\text{ok}}
\end{aligned}$$

Osservazioni

- I punti A e B, rappresentativi di stati di sforzo agenti su facce mutuamente $\perp$ risultano diametralmente opposti sul cerchio di Mohr.

  Infatti, se tra le due facce vi sono 90°, l'angolo al centro ni corrispondente dei punti A e B deve risultare il doppio, cioè 180°.

- le tensioni principali σ_I, σ_{II} rappresentano i valori max e min della componente normale σ al variare di tutte le giaciture nel piano.

  Risulta:

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R$$

$$= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

formula per calcolare le tensioni principali nel caso di sforzo piano (la terza tensione principale è nulla, $\sigma_{III}=0$)

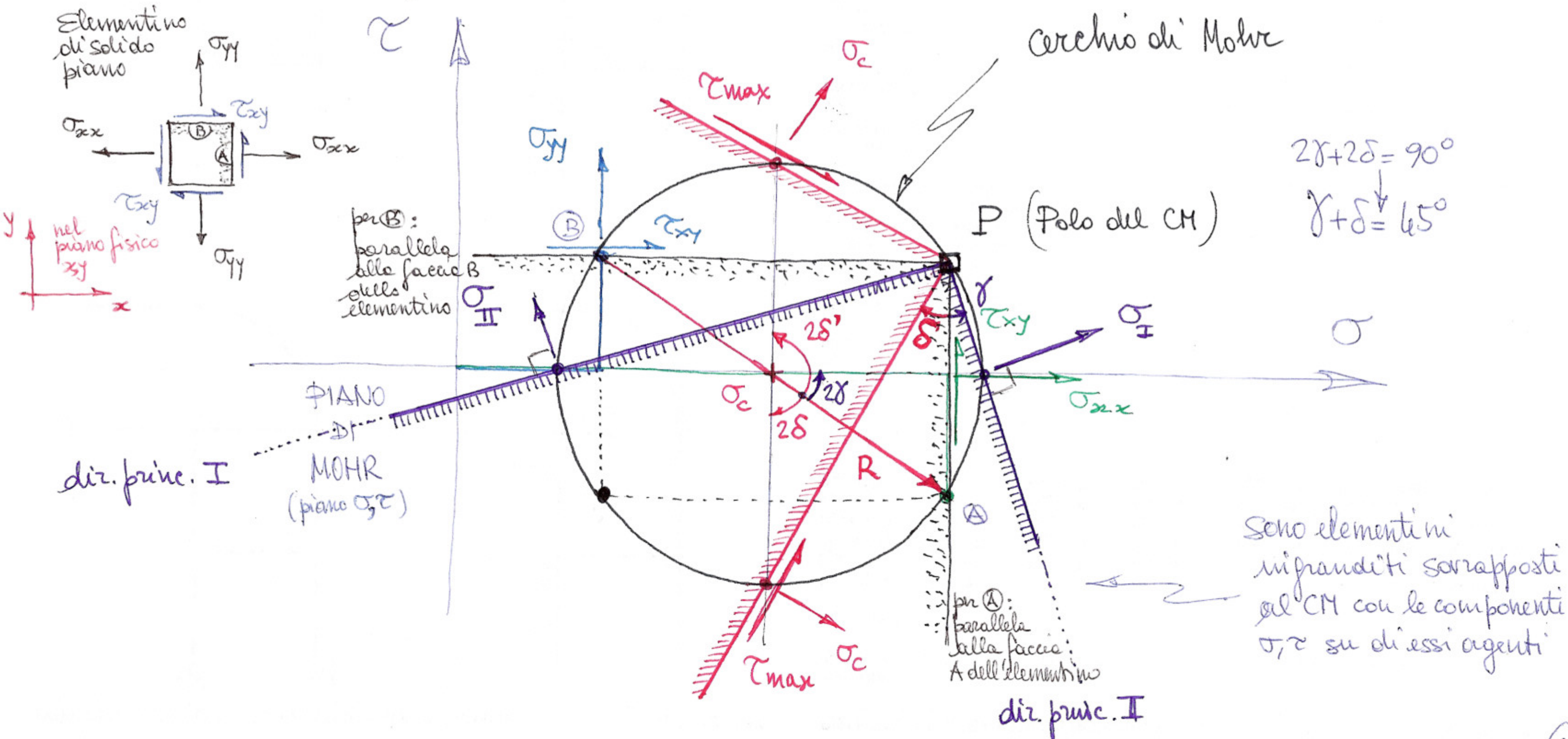
- la τ_{max} nel piano si registra in corrispondenza di σ_c e vale:

$$\tau_{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Rotazioni α nel piano fisico sono espresse da rotazioni 2α nel piano di Mohr. Esse si rappresentano convenientemente usando il cosiddetto Polo del Cerchio di Mohr.

Polo del Cerchio di Mohr

- Ha la seguente proprietà: la retta passante per esso (P) e il p.to (σ,τ) rappresenta la direzione della faccia su cui agisce lo sforzo (σ,τ), o meglio le componenti di sforzo (σ,τ) [lo stato di sforzo dato è unico! Variano le sue componenti al variare della giacitura della faccia nel piano].



Commenti:

- Il Polo del cerchio di Mohr consente di rappresentare graficamente agevolmente le direzioni principali secondo le quali agiscono le tensioni principali σ_I e σ_{II}, nonché le direzioni secondo cui agisce la τ_{max} nel piano (x,y) (insieme allo sforzo normale medio $\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$).

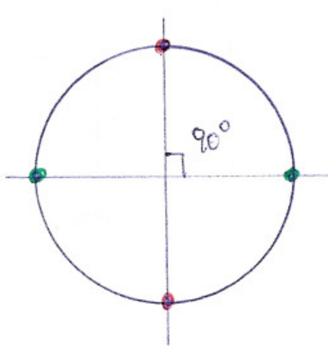
- Inclinazione delle direzioni principali: (rispetto al sistema di riferimento x,y)

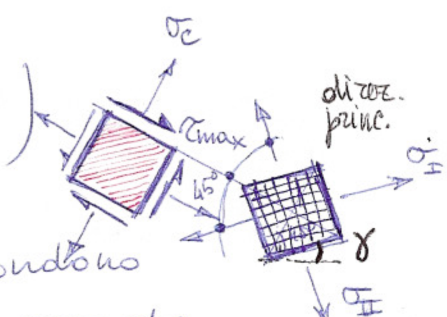
$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \qquad (\text{ove } \tau = 0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{2}\,\mathrm{atan}\,\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}}$$

- Inclinazione delle direzioni secondo cui agisce la τ_{max}: sono sempre a 45° rispetto alla direzioni principali: $\gamma + \delta = 45^\circ$

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = -\frac{1}{\tan 2\delta^P} \qquad \left(2\delta^P = 2\gamma + \frac{\pi}{2}\right)$$



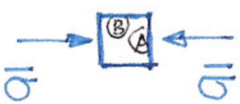


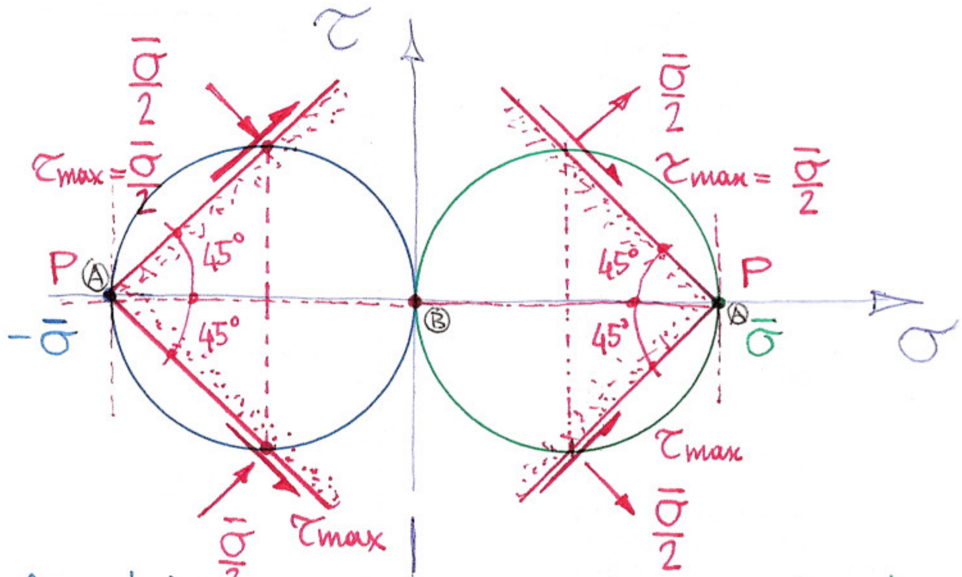
90° nel piano di Mohr (doppio dell'angolo fisico), corrispondono a 45° nel piano fisico [tra le diret. principali e quelle secondo cui agisce la τ_{max}].

Casi tipici

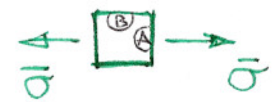
τ_{max} a 45°

• Sforzo di pura compressione





• Sforzo di pura trazione

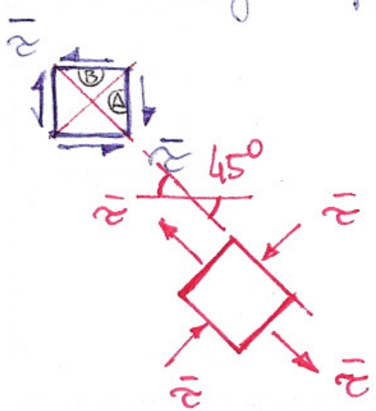


CM tutto contenuto nel semipiano $\sigma \leq 0$

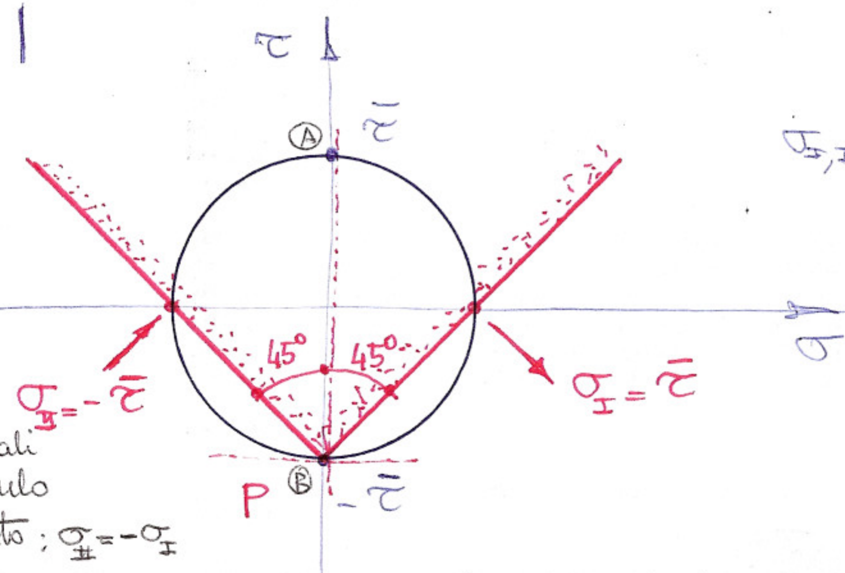
CM tutto contenuto nel semipiano $\sigma \geq 0$

— o —

• Sforzo di taglio puro

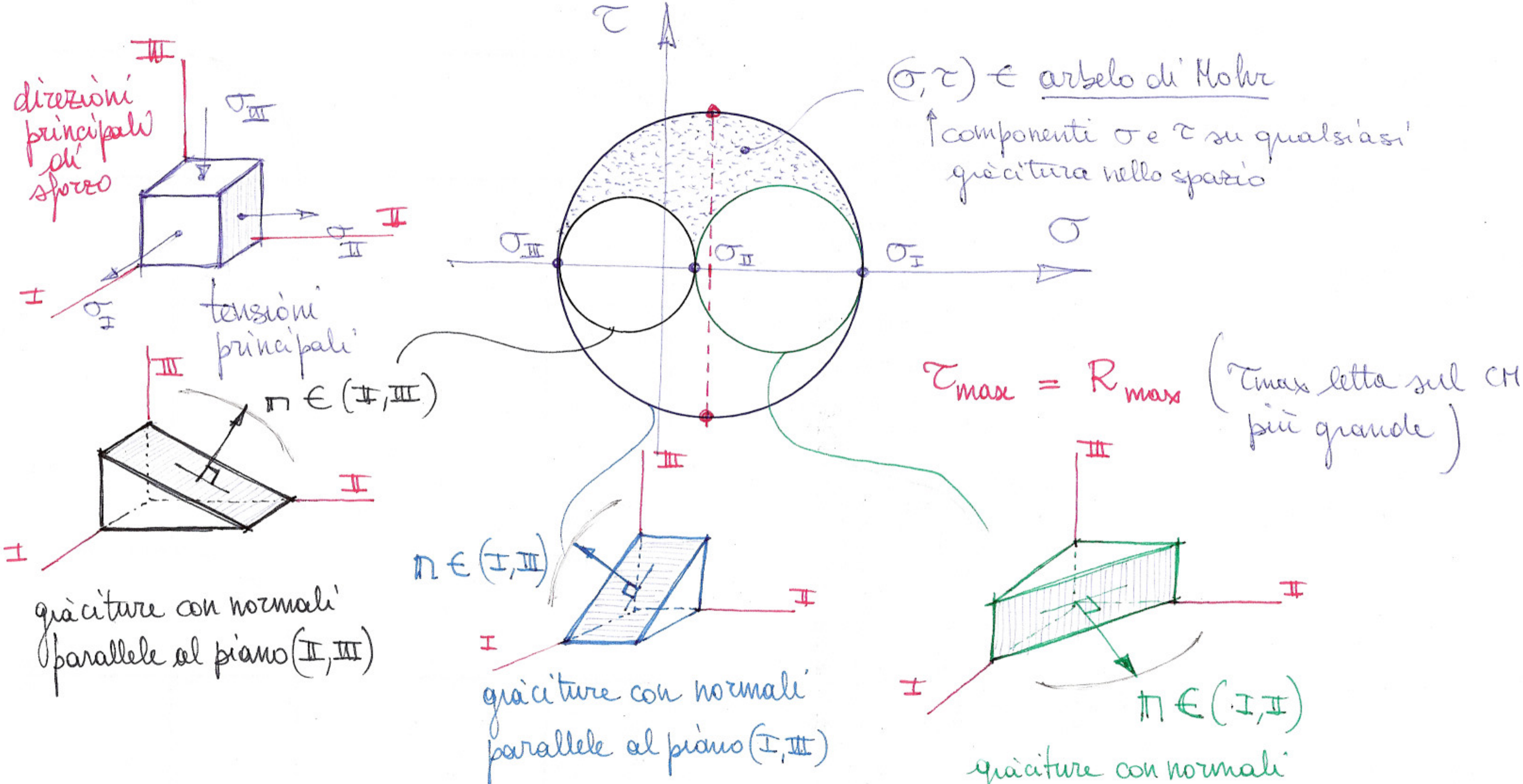


$\sigma_{I,II}$ a 45°



tensioni principali uguali in modulo e di segno opposto; $\sigma_{II} = -\sigma_I$

Sforzo 3D ⇒ Cerchi e arbelo di Mohr



giaciture con normali parallele al piano (I, II)

Per n generica nello spazio il punto (σ, τ) descrive l'area compresa tra le tre circonferenze (ove $\tau \geq 0$), detta arbelo di Mohr.

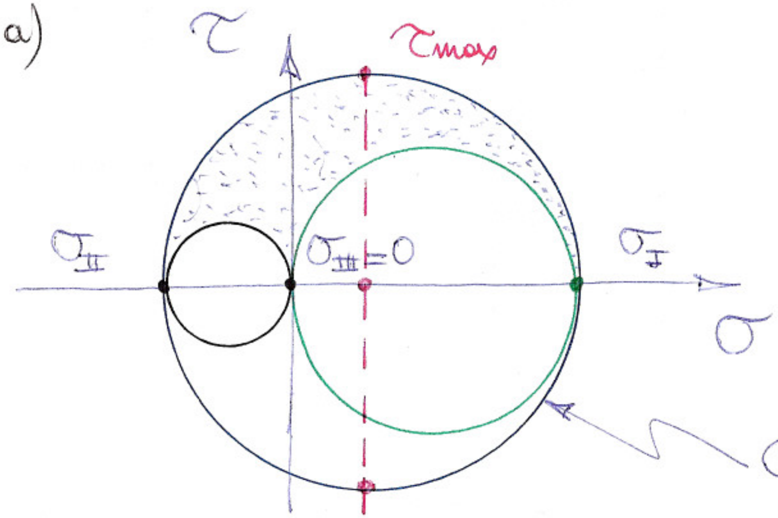
τ intrinsecamente positiva in 3D (non è possibile assegnarle un segno come fatto nel caso piano)

$\tau_n^2 = t_n^2 - \sigma_n^2 \rightarrow \tau_n$ è nota in modulo

- Si è notato che la τ_{max} si registra in corrispondenza del cerchio di Mohr più grande.

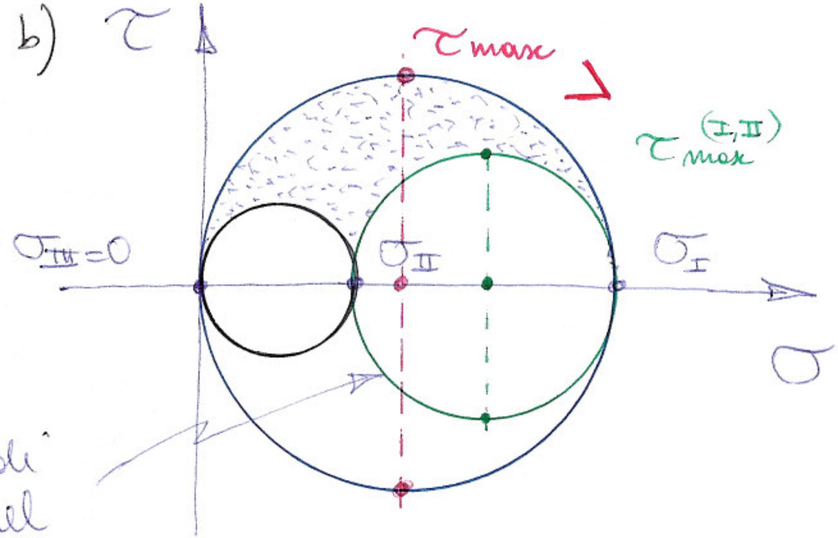
- Nel caso di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$) - Attenzione: due casi,

a)



Cerchio di Mohr nel piano

b)



Se $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$

τ_{max} nel piano (I, II)

(Tensioni principali di segno opposto)

se $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \geq 0$

τ_{max} fuori piano (I, II)

(Tensioni principali di segno uguale)

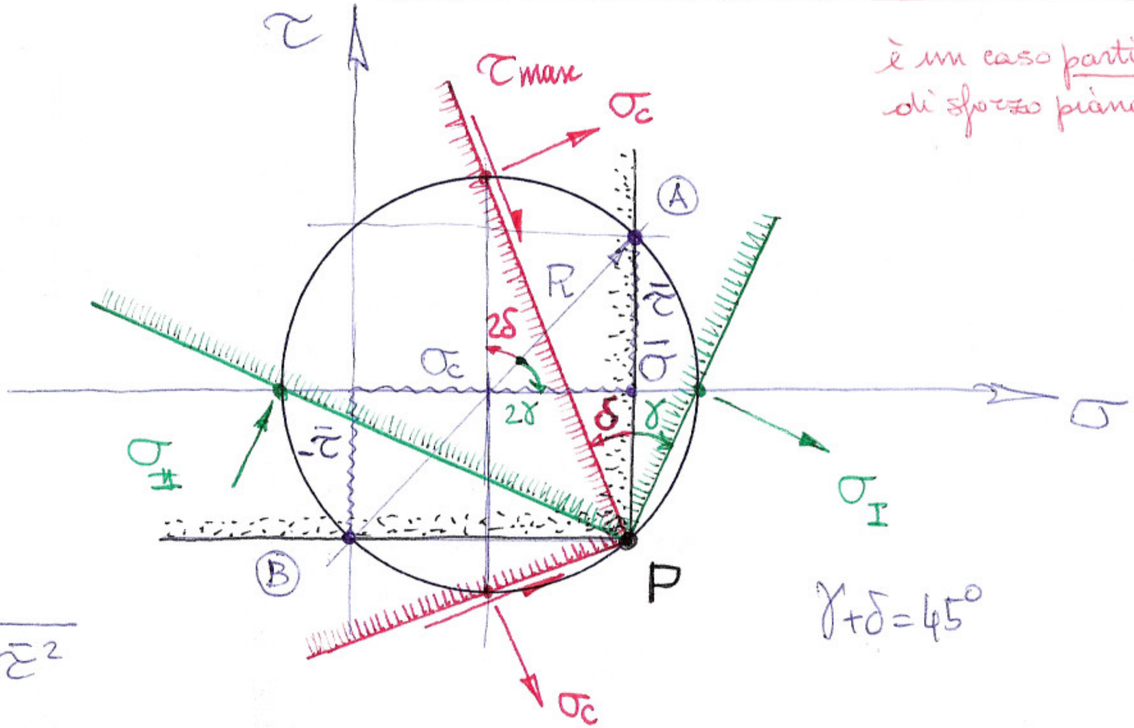
In questi caso la $\tau_{max}^{(I,II)}$ nel piano non è quella massima

Cerchio di Mohr per stato di sforzo (piano) alla De Saint Venant

(presenti nel solido del pb. di De Saint Venant).

È sforzo piano caratterizzato dall'avere una componente di sforzo normale nulla.

è un caso particolare di sforzo piano



$$\begin{cases} \sigma_c = \dfrac{\sigma_{xx} + \cancelto{0}{\sigma_{yy}}}{2} = \dfrac{\bar{\sigma}}{2} \\ R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\dfrac{\bar{\sigma}^2}{4} + \bar{\tau}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \dfrac{\bar{\sigma}}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\bar{\sigma}^2}{4} + \bar{\tau}^2} \\ \mathrm{tg}\, 2\gamma = \dfrac{2\tau}{\sigma} \Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{2} \operatorname{atan} \dfrac{2\tau}{\sigma} \\ \qquad\qquad \delta = \dfrac{\pi}{4} - \gamma \end{cases}$$

$\gamma + \delta = 45°$

Nota che, sempre, $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$ (tensioni principali sempre di segno opposto).

Infatti: $\sigma_I \cdot \sigma_{II} = \sigma_c^2 - R^2 =$
$= \cancel{\dfrac{\bar{\sigma}^2}{4}} - \cancel{\dfrac{\bar{\sigma}^2}{4}} - \bar{\tau}^2 \leq 0$

erizzi@unibg.it