Analisi dei sistemi di travi deformabili

erizzi@unibg.it

Si considerano ora le aste deformabili al fine di:

- valutare la deformazione di strutture (iso- e iperstatiche)
- risolvere strutture iperstatiche (mediante condizioni di congruenza)

• **Deformazioni elementari elastiche del concio di trave** (per effetto di A.I. N, T, M) [vedi pb. di DSV al termine del corso]

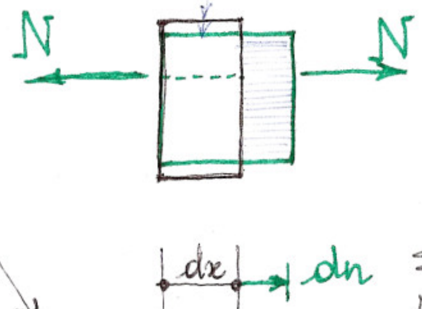
[vedi prova di trazione:

$\varepsilon = \frac{dn}{dx}$ deformaz. long.

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ legge di Hooke

$\sigma = \frac{N}{A}$ sforzo normale]

Contrazione trasversale controllata dal coeff. di Poisson ν



spostamento assiale relativo tra le due sezioni del concio

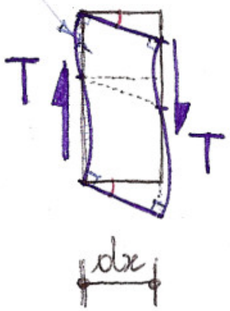
$$dn = \varepsilon\, dx = \frac{N\,dx}{EA}$$

EA : rigidezza assiale $[EA]=[F]$
- area della sezione trasversale
- modulo di elasticità longitudinale

(aste assialmente inestensibili per $EA \to \infty$)

ingobbamento fuori piano della sezione (dovuto a distribuzione non costante di deformaz. e sforzi di taglio)

$\bar{\gamma}$ scorrimento angolare medio



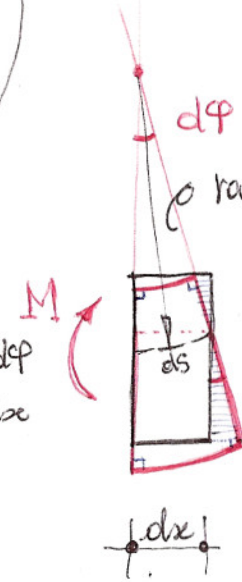
scorrimento relativo tra le sezioni

$$dt = \bar{\gamma}\, dx = \mu \frac{T\,dx}{GA}$$

GA : rigidezza tagliante $[GA]=[F]$
- area della sez. trasv.
- modulo di elasticità tagliante

(aste indeformabili a taglio per $GA \to \infty$)

$\mu \geq 1$: fattore di taglio (param. geometrico della sezione trasversale)



ρ raggio di curvatura dell'asse della trave

$ds = \rho\, d\varphi$

$ds \simeq dx$

Curvatura $\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds} \simeq \frac{d\varphi}{dx}$

rotazione relativa tra le sezioni

$$d\varphi = \chi\, dx = \frac{M\,dx}{EJ}$$

EJ : rigidezza flessionale
- momento d'inerzia della sez.
- modulo di Young

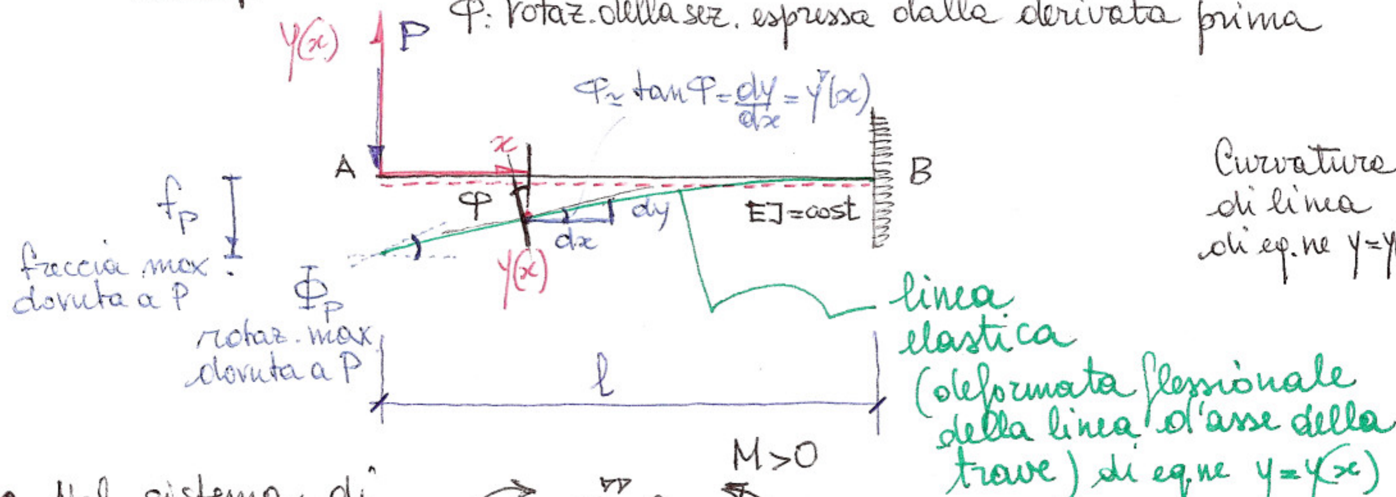
$[EJ]=[F][L]^2$

(è solitamente la deformaz. prevalente se sono presenti effetti flessionali)

Metodo della linea elastica

$$\underset{\text{chi}}{\chi} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EJ} \iff EJ\,\chi = M$$ Legge di Eulero-Bernoulli-Navier
(esprime proporzionalità diretta tra curvatura e momento)

Esempio:



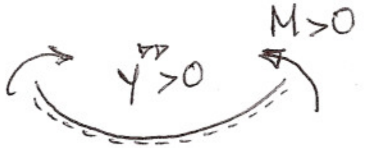
Si trascurano dn e dt elastici (sola deformabilità flessionale)

Curvatura di linea di eq.ne $y=y(x)$ $\quad \chi = \dfrac{y''(x)}{[1+y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} \simeq y''(x)$

$|y'(x)| \ll 1$ si assumono piccole rotazioni

[Con tale approssimazione: $\varphi = y'(x) \rightarrow \varphi' = y'' = \chi$]

- Nel sistema di riferimento scelto



$$y''(x) = +\frac{M(x)}{EJ}$$

- Supporremo spesso EJ=cost a tratti

eq.ne differenziale della linea elastica $\rightarrow$

$$EJ\,y''(x) = M(x) = -Px$$ (è differenziale ordinaria del II ordine)

procedo con una doppia integrazione

$\int dx$
$$EJ\,y'(x) = -P\frac{x^2}{2} + A_1$$
$\int dx$
$$EJ\,y(x) = -P\frac{x^3}{6} + \underbrace{A_1 x + A_2}$$

ove A_1, A_2: costanti di integrazione (due $\forall$ campo di integrazione)
esprimono una componente di moto rigido

- le costanti di integrazione si determinano imponendo le condizioni al contorno relative al campo di integrazione.

L'incastro in B pone infatti: $\begin{cases} v_B = 0 \\ \varphi_B = 0 \end{cases} \Rightarrow$ c.c. $\begin{cases} y(\ell) = 0 \\ y'(\ell) = 0 \end{cases}$

- Imposizione delle c.c.:

$$y'(\ell)=0 \Rightarrow 0 = EJ\,y'(\ell) = -P\frac{\ell^2}{2} + A_1 \Rightarrow \boxed{A_1 = P\frac{\ell^2}{2}}$$

$$y(\ell)=0 \Rightarrow 0 = EJ\,y(\ell) = -P\frac{\ell^3}{6} + P\frac{\ell^2}{2}\ell + A_2 \Rightarrow A_2 = \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)P\ell^3 \Rightarrow \boxed{A_2 = -P\frac{\ell^3}{3}}$$

- Si ottiene l'eq.ne della linea elastica finale: (è una cubica per tratto scarico)

$$\boxed{EJ\,y(x) = -P\frac{x^3}{6} + P\frac{\ell^2}{2}x - P\frac{\ell^3}{3}}$$

(notare tutti i termini omogenei in $\sim [F][L]^3$)

spostamenti trasversali all'asse della trave

$$EJ\,y'(x) = -P\frac{x^2}{2} + P\frac{\ell^2}{2}$$

rotazioni delle sezioni della trave

- Parametri caratteristici della deformazione

valore positivo — positivi spost. vs. l'alto

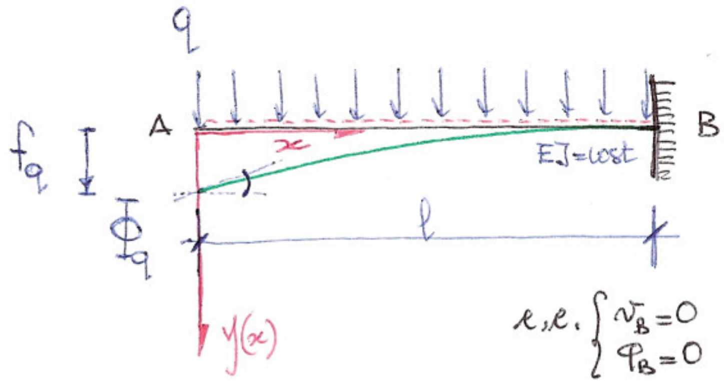
coefficienti di influenza ("spostamenti" di A dovuti a P agente in A)

$$\begin{cases} f_P = -v_A = -y(0) = \dfrac{1}{3}\dfrac{P\ell^3}{EJ} \\ \Phi_P = \varphi_A = y'(0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{P\ell^2}{EJ} \end{cases}$$

notare il fattore EJ a denominatore ∇ da non dimenticare!

Infatti il gruppo dimensionale $\dfrac{P\ell^3}{EJ}$ esprime uno spostamento $[L]$ mentre $\dfrac{P\ell^2}{EJ}$ esprime una rotazione $[1]$

Mensola con carico uniformemente distribuito



Nel riferimento scelto: $y''(x) = + \frac{M(x)}{EJ}$

$$EJ\, y''(x) = M(x) = q\frac{x^2}{2}$$
$$EJ\, y'(x) = q\frac{x^3}{6} + A_1$$
$$EJ\, y(x) = q\frac{x^4}{24} + A_1 x + A_2$$

c.c. $\begin{cases} v_B = 0 \\ \varphi_B = 0 \end{cases}$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} y'(l) = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = -q\frac{l^3}{6}} \\ y(l) = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{ql^4}{24} + \frac{ql^3}{6}\cdot l \Rightarrow \boxed{A_2 = q\frac{l^4}{8}} \end{cases}$$

L.E. finale:

$$\boxed{EJ\, y(x) = \frac{qx^4}{24} - \frac{ql^3}{6}x + \frac{ql^4}{8}}$$

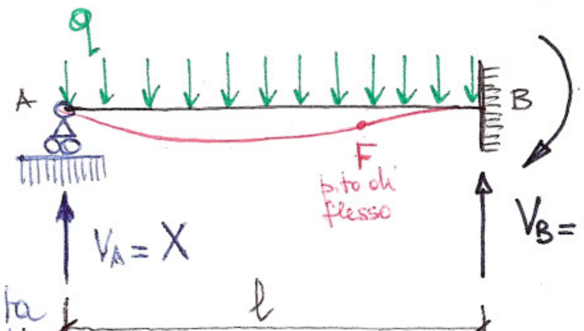
di 4° grado per tratto con q = cost

$$\begin{cases} f_q = y(0) = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EJ} \\ \Phi_q = -y'(0) = \frac{1}{6}\frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$

positive rotazioni antiorarie →

Struttura iperstatica (aggiungo vincolo iperstatico carrello in A)

1 volta iperst.
I=1



$$M_B = \frac{ql^2}{2} - Xl$$

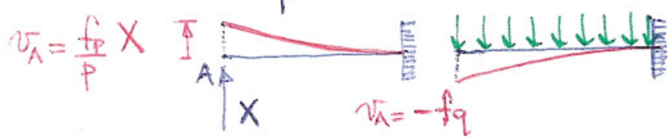
incognita iperstatica

Si determina imponendo la condizione di congruenza

$v_A = 0$

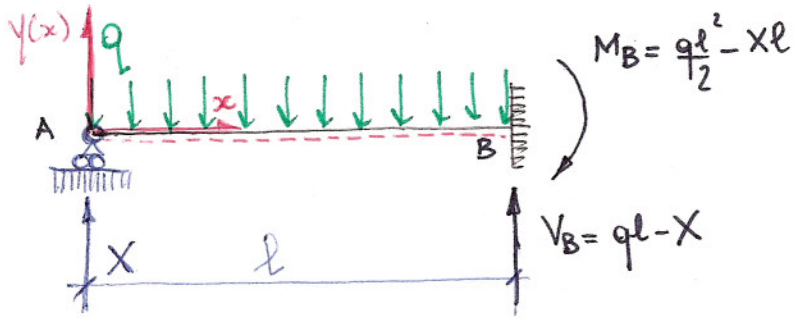
- Si opera col Metodo delle Forze ponendo in evidenza delle incognite statiche (forze, coppie).
- Le RV si determinano con l'equilibrio ma non sono univocamente determinate: RV = RV(q, X)
- Utilizzando il Principio di Sovrapposizione degli Effetti

$$v_A = \frac{f_P}{P}X - f_q = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{\frac{f_P}{P}} = \frac{\frac{1}{8}\frac{ql^4}{EJ}}{\frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}} = \boxed{\frac{3}{8}ql = X}$$



Qualsiasi metodo che fornisca f_P, f_q consente di calcolare X

Soluzione diretta col metodo della linea elastica



$$EJ\, y''(x) = M(x) = -q\frac{x^2}{2} + X x$$

$$EJ\, y'(x) = -q\frac{x^3}{6} + X\frac{x^2}{2} + A_1$$

$$EJ\, y(x) = -q\frac{x^4}{24} + X\frac{x^3}{6} + A_1 x + A_2$$

- Incognite: A_1, A_2, X → due costanti di integrazione più l'incognita iperstatica
- Occorrono $2 \cdot 1$ tratto di integrazione + $I = 1$ incognita iperst. = 3 c.c. ⇒ $\begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $y(l)=0$, $y'(l)=0$: come le precedenti per l'incastro in B; $y(0)=0$: rispetto del vincolo iperstatico in A — CONDIZIONE DI CONGRUENZA
- Imponendo le c.c. si ottiene:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{A_2 = 0} \\ y'(l) = 0 \Rightarrow -\frac{ql^3}{6} + X\frac{l^2}{2} + A_1 = 0 \quad (\cdot l) \Rightarrow A_1(X) = \frac{ql^3}{6} - X\frac{l^2}{2} \\ y(l) = 0 \Rightarrow -\frac{ql^4}{24} + X\frac{l^3}{6} + A_1 l = 0 \quad - \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) ql^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) X l^3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} X = \frac{1}{8} ql \Rightarrow \boxed{X = \frac{3}{8} ql}$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{3}{8}\right) ql^3 = \frac{8-9}{24}\frac{ql^3}{2} = \boxed{-\frac{1}{48} ql^3 = A_1}$$

- Linea elastica finale:

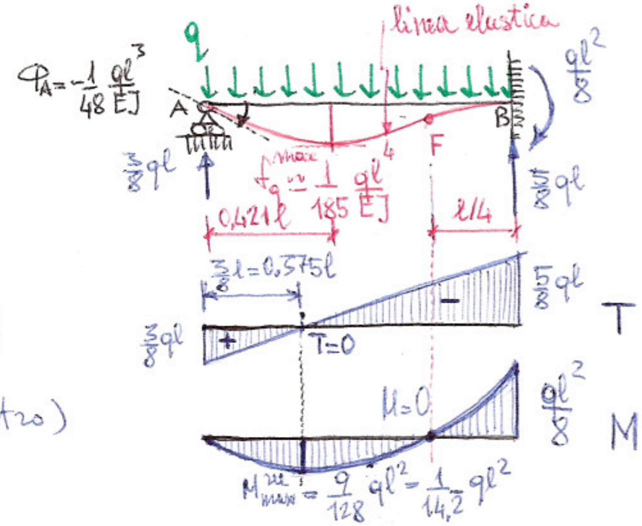
$$EJ\, y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{ql}{16}x^3 - \frac{ql^3}{48}x \rightarrow EJ\, y'(x) = -q\frac{x^3}{6} + \frac{3}{16} ql x^2 - \frac{ql^3}{48}$$

$$= \frac{q}{48}\left(-8x^3 + 9lx^2 - l^3\right)$$

$$= \frac{q}{48}\left(-8x^2 + lx + l^2\right)(x - l)$$

$$\left.\begin{aligned} M_B &= \frac{ql^2}{2} - \frac{3}{8}ql^2 = \frac{ql^2}{8} \\ V_B &= ql - \frac{3}{8}ql = \frac{5}{8}ql \end{aligned}\right\} \text{RV finali}$$

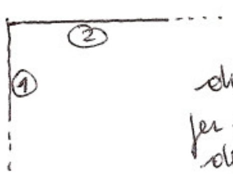
p.ti di stazionarietà della linea elastica ⇒ $y' = 0$ per $x = l$ (deve essere per l'incastro) e per $x = \frac{1+\sqrt{33}}{16} l \cong 0{,}421\, l$



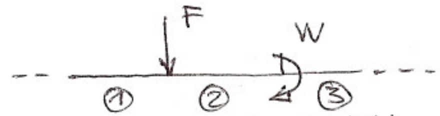
Quadro generale del Metodo della Linea Elastica

- Suddivisione della struttura in un numero n di campi di integrazione in cui la relazione differenziale $EJ_i \, y_i''(x_i) = \pm M_i(x_i)$, $i = 1, 2 \ldots n$ è descritta da una stessa eq.ne.

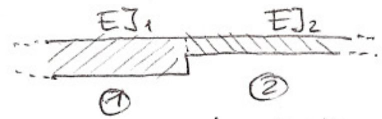
es.:



due campi per deviazione della linea d'asse;



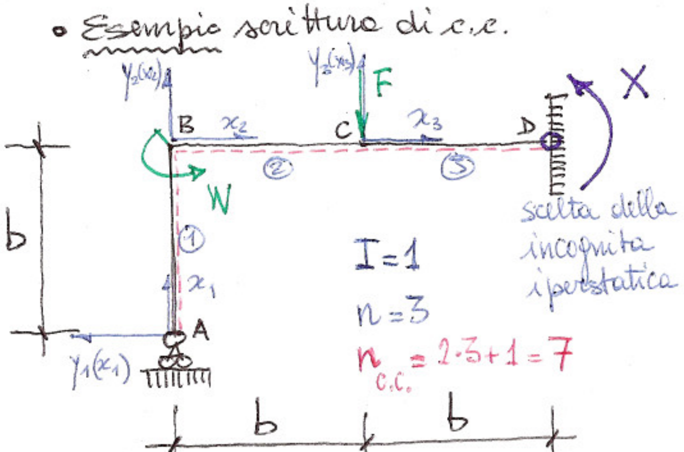
tre campi poiché M ha ≠ eq.ni nei tre campi;



due campi poiché $EJ_1 \neq EJ_2$; ecc.

- Scelta dei sistemi di riferimento per i vari campi, scrittura delle eq.ni dei momenti flettenti (ev. dipendenti dalle incognite iperstatiche scelte).
- Integrazione delle n eq.ni differenziali di 2° grado. Questa operazione introduce $2 \cdot n$ costanti di integrazione.
- Scrittura e imposizione delle condizioni al contorno in numero pari a: $n_{c.c.} = 2 \cdot n + I$
  - I: grado di iperstaticità
  - n: n° di campi di integrazione
- Soluzione, scrittura delle LE finali, rappr. dei diagrammi N, T, M, calcolo di "spostamenti".

- Esempio scrittura di c.c.



7 c.c.
- $y_1(b) = 0$ ($EA_2 \to \infty$ + $EA_3 \to \infty$ + incastro in D)
- $y_1'(b) = y_2'(0)$ (continuità alla rotazione nel nodo B)
- $y_2(0) = 0$ ($EA_1 \to \infty$ + carrello orizzontale in A)
- $y_2(b) = y_3(0)$ (continuità allo spostamento trasversale in C)
- $y_2'(b) = y_3'(0)$ (continuità alla rotazione in C)
- $y_3(b) = 0$ (incastro in D)
- $\boxed{y_3'(b) = 0}$ con la scelta fatta di X assume il significato di eq.ne di congruenza

N.B.: in genere si trascura la deformabilità assiale delle aste a fronte di quella flessionale (aste assialmente rigide)

erizzi@unibg.it