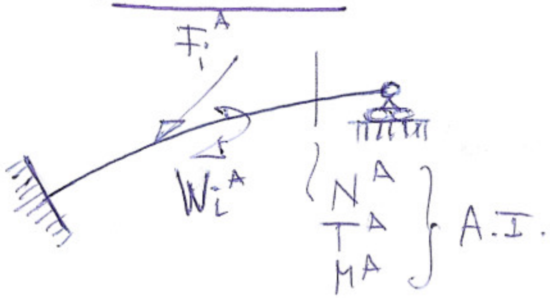
Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

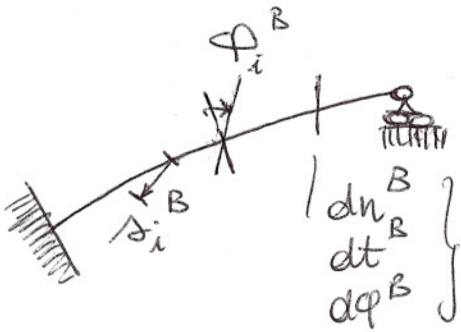
erizzi@unibg.it

- Si pongono le seguenti definizioni:

Ⓐ sistema staticamente ammissibile: famiglie di quantità statiche (forze, azioni interne) equilibrate



Ⓑ Sistema cinematicamente ammissibile: famiglie di quantità cinematiche ("spostamenti" e "deformazioni") congruenti e compatibili con i vincoli



Def. generalizzate del concio di trave (in generale somma di un contributo elastico ed uno anelastico, vedi ad es. coazioni termiche imposte)

- Enunciato del PLV (CN. di equilibrio e congruenza):

Per ogni coppia di sistemi Ⓐ e Ⓑ, rispettivamente staticamente e cinematicamente ammissibili, vale l'identità dei lavori virtuali mutui esterno ed interno:

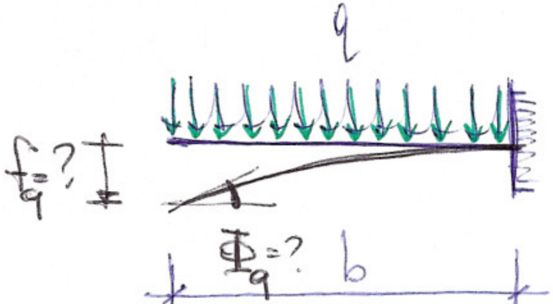
$$\underbrace{\mathcal{L}_e^{AB}}_{\text{lavoro esterno}} = \sum_i F_i^A s_i^B + W_i^A \varphi_i^B = \int_{\text{strutt.}} N^A dn^B + T^A dt^B + M^A d\varphi^B = \underbrace{\mathcal{L}_i^{AB}}_{\text{lavoro interno}}$$

strutt. (integrale esteso a tutta la struttura)

Commenti:

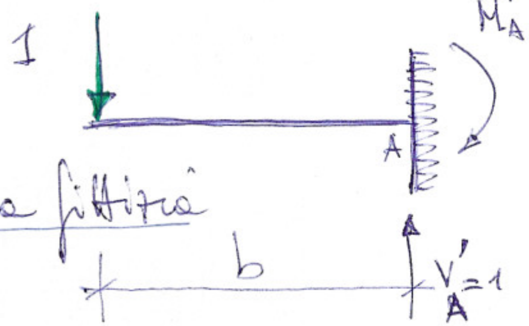
- lavori virtuali poiché i sistemi Ⓐ e Ⓑ non sono necessariamente quelli reali. Essi quindi non si corrispondono necessariamente in un rapporto di causa/effetto.
- Pertanto la validità del PLV prescinde dal comportamento del materiale [vedi C.d.S.d.C.]
- Si tratta di un teorema dimostrabile. Qui è assunto come postulato, principio.
- Nel nostro caso considereremo essenzialmente i soli contributi elastici di deformazione. Inoltre trascureremo sempre [negli esercizi] i contributi assiali e taglianti du_{el}, dt_{el} a fronte di quelli flessionali, $d\varphi_{el}$.
- Grazie alla flessibilità dei sistemi Ⓐ e Ⓑ, in generale virtuali, il **PLV** può essere utilizzato quale metodo per:
  - determinare componenti di spostamento delle strutture (iso. o iperstatiche)
  - risolvere strutture staticamente indeterminate (iperstatiche) col metodo delle forze. Qui il PLV consente di scrivere materialmente la condizione di congruenza richiesta per il calcolo dell'incognita iperstatica (idem per strutture più volte iperstatiche).

Esempio (calcolo di componenti di spostamento):



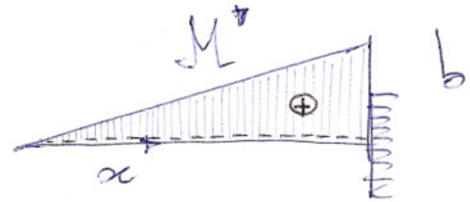
Voglio calcolare f_q e Φ_q

Calcolo di f_q Assumo struttura fittizia o ausiliaria con carico 1 unitario in corrispondenza della componente di spostamento da calcolare.



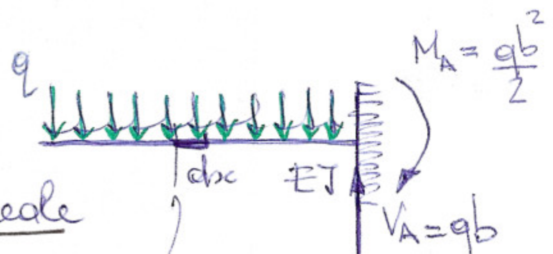
Struttura fittizia

(A)



$M^*(x) = 1 \cdot x$

Momento flettente nella struttura fittizia



Struttura reale

(B)

$M(x) = q\frac{x^2}{2}$

Momento flettente nella struttura reale

$d\varphi = \frac{M\,dx}{EJ}$ ← curvatura flessionale conseguente nella struttura reale

N.B.: scrivo le due eq.ni nello stesso sistema di riferimento, possibilmente quello più conveniente per entrambe le strutture

• Scrittura del PLV:

Assumo come sistema Ⓐ la struttura fittizia (equilibrata) e come sistema Ⓑ la struttura reale (congruente) –

Scrivo l'identità dei lavori virtuali:

$$\mathcal{L}_e^{AB} = 1\cdot f_q + \underbrace{V_A' \cdot 0 + M_A' \cdot 0}_{\text{vincoli perfetti (non cedevoli)}} = \int_{Strut.} M' \frac{M\,dx}{EJ} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

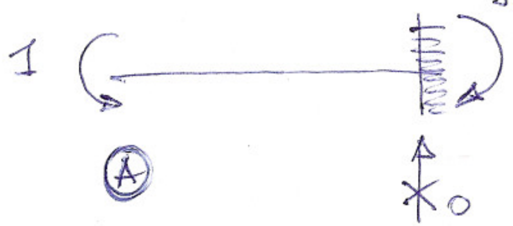
ci consente di calcolare f_q:

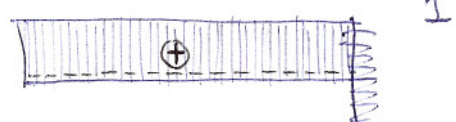
$$f_q = \int_{Strutt.} M' \frac{M\,dx}{EJ} = \int_0^b x\,\frac{qx^2}{2}\frac{dx}{EJ} = \frac{q}{2EJ}\,\frac{b^4}{4} = \boxed{\frac{1}{8}\,\frac{qb^4}{EJ} = f_q}$$

• Per calcolare Φ_q procedo in modo analogo:

Nuova struttura fittizia:

$M_A'' = 1$





$M''(x) = 1$

Momento nella seconda struttura fittizia

Prendendo sempre come sistema Ⓑ la struttura reale, la scrittura del PLV pone:

$$\mathcal{L}_e^{AB} = 1\cdot \Phi_q = \int_{Str.} M'' \frac{M\,dx}{EJ} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

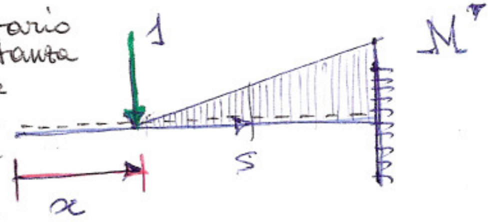
$$\Phi_q = \int_0^b 1\,\frac{qx^2}{2}\frac{dx}{EJ} = \frac{q}{2EJ}\,\frac{b^3}{3} = \boxed{\frac{1}{6}\,\frac{qb^3}{EJ} = \Phi_q}$$

- Notiamo che il PLV fornisce gli stessi risultati ottenuti con il metodo della linea elastica.
L'informazione è più mirata e i calcoli sono molto più semplici – [si determina solo il parametro che si intende calcolare]

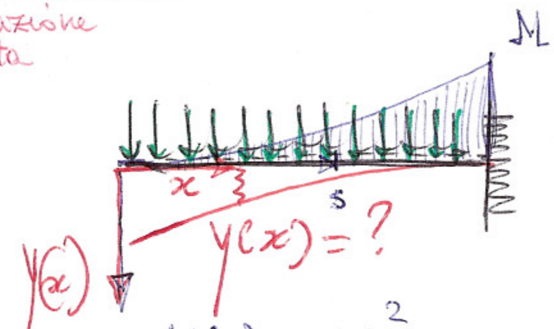
- Volendo, è anche possibile ricavare l'eq. della linea elastica tramite il PLV:

determinazione indiretta

carico unitario posto a distanza x variabile nel p.to in cui si vuole calcolare lo spost. trasv. y(x)



Ⓐ Struttura fittizia



Ⓑ Struttura reale

$M^r(s) = 0 \quad 0 \le s \le x$

$M^r(s) = 1 \cdot (s - x) \quad x \le s \le b$

coordinata che descrive la struttura

posizione del carico unitario

$M(s) = \frac{qs^2}{2}$

Scrittura del PLV:

integrale in ds!

$$1 \cdot y(x) = \int_{Str} M^r \frac{M\,ds}{EJ} = \int_x^b (s-x)\frac{qs^2}{2}\frac{ds}{EJ}$$

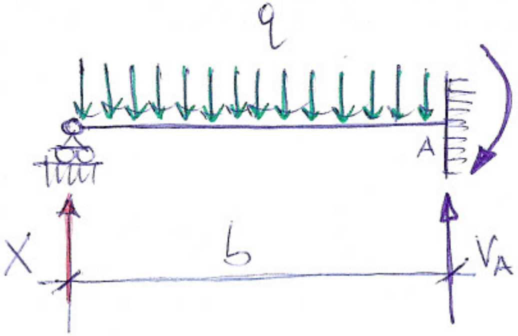
$$= \frac{q}{2EJ}\left[\frac{s^4}{4} - x\frac{s^3}{3}\right]_x^b =$$

$$= \frac{q}{2EJ}\left[\frac{b^4}{4} - x\frac{b^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x\frac{x^3}{3}\right] =$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{qb^4}{8} - \frac{qb^3}{6}x + \frac{1}{24}x^4\right]}$$

come ottenuto con LE.

Esempio: Soluzione di struttura iperstatica



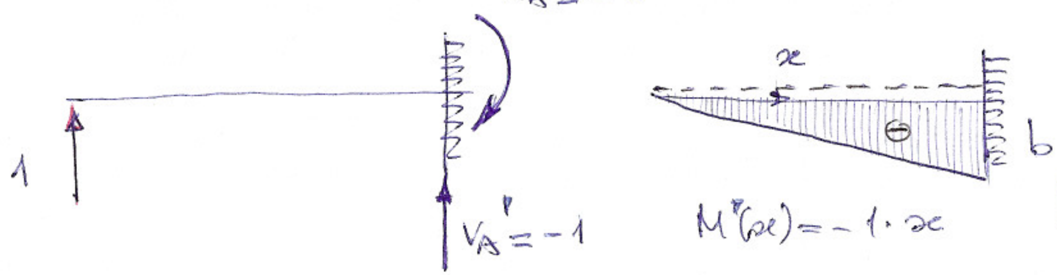
$M_A = \frac{qb^2}{2} - Xb$

$RV = RV(q, X)$

$V_A = qb - X$

incognita iperstatica

- Struttura fittizia (isostatica): Caricata solo con l'iperstatica posta uguale a 1

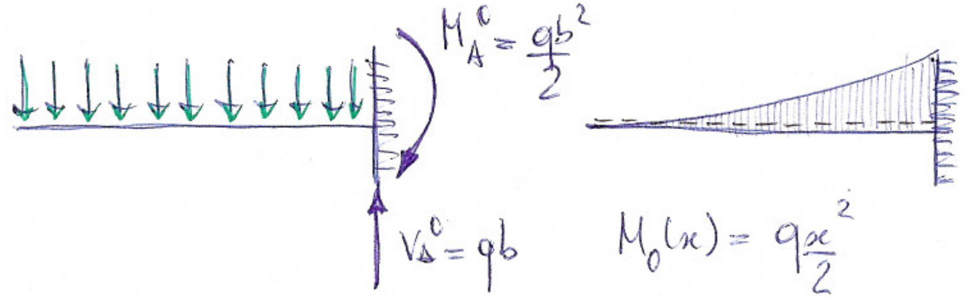


$M'_A = -b$

$V'_A = -1$

$M'(x) = -1 \cdot x$

- struttura principale isostatica: caricata solo con i carichi esterni e senza X



$M_A^0 = \frac{qb^2}{2}$

$V_A^0 = qb$

$M_0(x) = q\frac{x^2}{2}$

Evidentemente per la struttura reale: $M = M_0 + X M'$; $RV = RV_0 + X\, RV'$

(Sovrapposizione degli effetti)

- **Scrittura del PLV**: Ⓐ struttura fittizia equilibrata ; Ⓑ struttura reale congruente

$$\mathcal{L}_e^{AB} = 1 \cdot \underset{\text{congruenza!}}{0} + RV^{\nabla} \cdot 0 = \int_{Str} M^{\nabla} \frac{M\,dx}{EJ} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

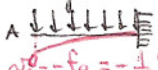
(Il PLV consente di scrivere indirettamente l'eq.ne di congruenza corrispondente alla incognita iperstatica scelta)

$$0 = \int_{Str.} M^{\nabla}(M_0 + X M^{\nabla}) \frac{dx}{EJ}$$

È un'equazione nell'incognita X:

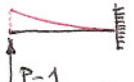
- Significato fisico degli integrali:

$$\int_{Str.} M^{\nabla} M_0 \frac{dx}{EJ} = -f_q$$



$v_A^0 = -f_q = -\frac{1}{8}\frac{qb^4}{EJ}$

$$\int_{Str.} M^{\nabla 2} \frac{dx}{EJ} = \frac{f_P}{P}$$



$P=1$

$v_A^{\nabla} = \frac{f_P}{P} = f_{(P=1)} = \frac{1}{3}\frac{b^3}{EJ}$

- Eq. di congruenza: $v_A = v_A^0 + v_A^{\nabla} X$

$v_A = \frac{f_P}{P} X - f_q = 0 \Rightarrow X = \frac{f_q}{\frac{f_P}{P}} = -\frac{-f_q}{\frac{f_P}{P}}$

$$X = -\frac{\displaystyle\int_{Str.} M^{\nabla} M_0 \frac{dx}{EJ}}{\displaystyle\int_{Str.} M^{\nabla 2} \frac{dx}{EJ}}$$

[Se $EJ = \text{cost}$

$$X = -\frac{\displaystyle\int_{Str.} M^{\nabla} M_0\, dx}{\displaystyle\int_{Str.} M^{\nabla 2}\, dx}$$]

Calcolo degli integrali:

qui $EJ = \text{cost}$!

- $$\int M^{\nabla} M_0\, dx = \int_0^b (-x)\left(q\frac{x^2}{2}\right) dx = -\frac{q}{2}\frac{b^4}{4}$$ ← qui mi. i tratti ove $M^{\nabla} M_0 \neq 0$ e il segno relativ. a M^{∇} e M_0

- $$\int M^{\nabla 2}\, dx = \int_0^b (-x)^2\, dx = \frac{b^3}{3}$$ ← qui mi. i tratti ove $M^{\nabla} \neq 0$ (segno irrilevante)

Sostituendo: $$X = -\frac{-\frac{qb^4}{8}}{\frac{b^3}{3}} = \boxed{\frac{3}{8} qb = X}$$ come ottenuto con LE

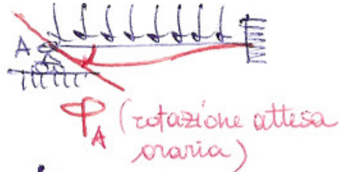
- Quindi il PLV ha consentito la soluzione di una struttura (I=1 volta) iperstatica mediante la scrittura indiretta di un'equazione di congruenza e la soluzione di due strutture isostatiche (I+1 in generale).

grado di iperstaticità

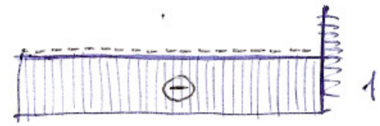
- Ottenuto il valore di X lo si sostituisce nelle RV(X) determinate in precedenza e si ottengono le RV finali – Quindi si possono tracciare i diagrammi delle azioni interne nella struttura iperstatica. => N, T, M

- Volendo poi determinare parametri di spostamento si può procedere come in precedenza per ripetute applicazione del PLV.

- Ad es., per il calcolo della rotazione della sezione d'estremità:



(A) Nuova struttura fittizia



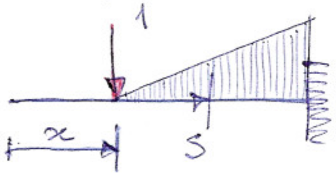
$M^{\triangledown\triangledown} = -1$

Momento nella struttura reale (noto per la X determinata)

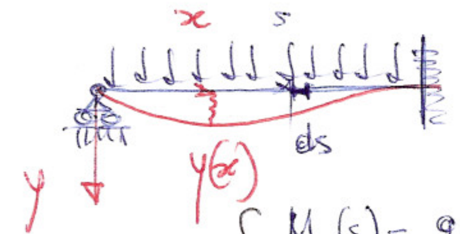
PLV: $$1 \cdot \phi_A = \int_{str.} M^{\triangledown\triangledown}\left(M_0 + X M^{\triangledown}\right)\frac{dx}{EJ}$$

$$\phi_A = \int_0^b (-1)\left(q\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}qb(-x)\right)\frac{dx}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{q}{2}\frac{b^3}{3} + \frac{3}{8}qb\frac{b^2}{2}\right) = \frac{qb^3}{EJ}\,\frac{-8+9}{48} = \frac{1}{48}\frac{qb^3}{EJ}$$

- Se volessi l'espressione della linea elastica:



M''' (A) Nuova struttura fittizia



(B) Struttura reale

$$\begin{cases} M'''(s) = 0 & 0 \le s \le x \\ M'''(s) = (s-x) & x \le s \le b \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0(s) = \dfrac{qs^2}{2} \\ M'(s) = -s \end{cases} \qquad X = \frac{3}{8} qb$$

$$1 \cdot y(x) = \int_{Str.} M''' \overbrace{\left(M_0 + X M'\right)}^{M} \frac{ds}{EJ}$$

(s è la variabile di integrazione)

$$= \int_x^b (s-x)\left(\frac{qs^2}{2} - \frac{3}{8} qbs\right) \frac{ds}{EJ}$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[q\frac{s^4}{8} - \frac{\cancel{3}}{8} qb \frac{s^3}{\cancel{3}} - q\frac{s^3}{6}x + \frac{3}{8} qb \frac{s^2}{2} x \right]_x^b$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\cancel{\frac{qb^4}{8}} - \cancel{\frac{qb^4}{8}} - \frac{qb^3}{6}x + \frac{3}{16} qb^3 x - q\frac{x^4}{8} + \frac{qb}{8}x^3 + q\frac{x^4}{6} - \frac{3}{16} qbx^3 \right]$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{6}\right) qb^3 x + \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{16}\right) qbx^3 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) qx^4 \right]$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{9-8}{48} qb^3 x + \frac{2-3}{16} qbx^3 + \frac{4-3}{24} qx^4 \right]$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{48} qb^3 x - \frac{1}{16} qbx^3 + \frac{1}{24} qx^4 \right]}$$

erizzi@unibg.it