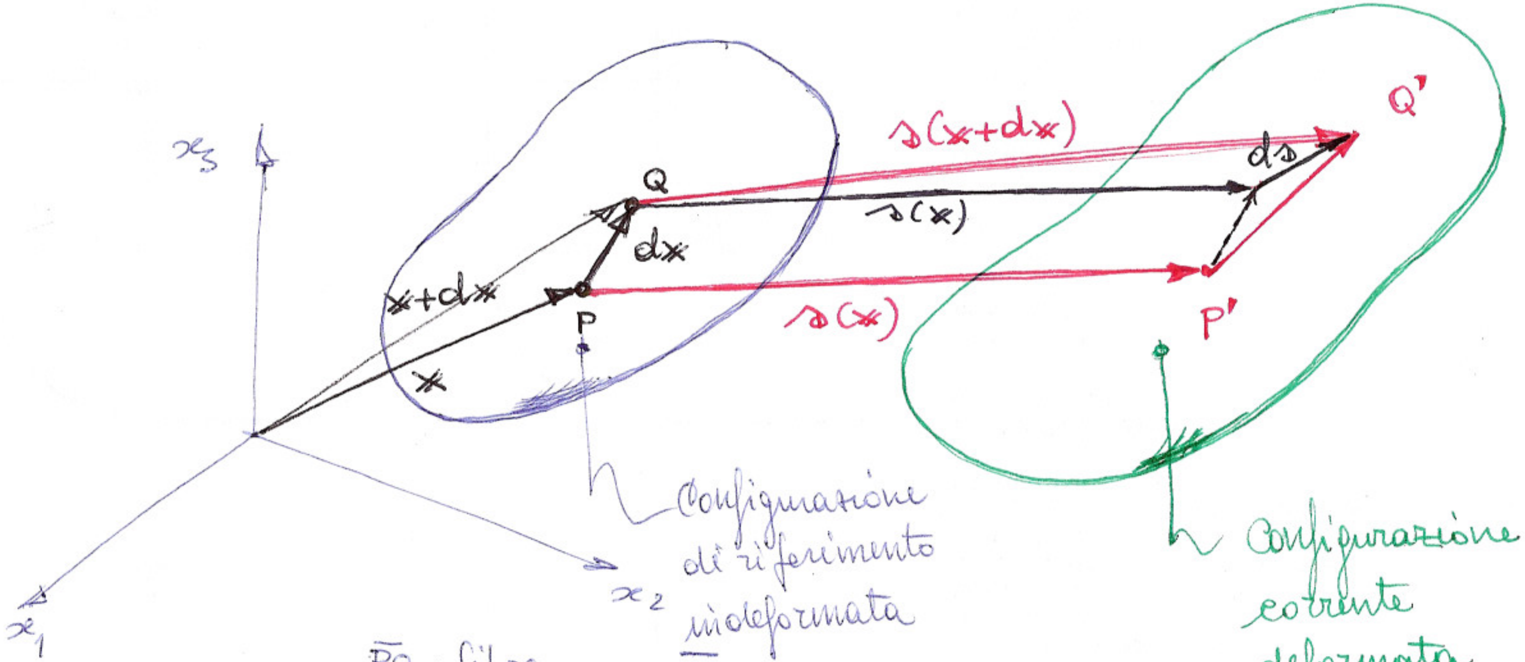
SdC XIV

erizzi@unibg.it

Cinematica dei continui: definizione e misura della (piccola) deformazione in ambito tridimensionale.



$\mathbf{s}(\mathbf{x})$: vettore spostamento in $P(\mathbf{x})$

$\overline{PQ}$: fibra indeformata nell'intorno di $P(\mathbf{x})$

$\overline{P'Q'}$: fibra (ideale) deformata

- Variazione dello spostamento nell'intorno di P (al I ordine):

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) + d\mathbf{s}$$

$$= \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}$$

oppure $d\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \underbrace{\Psi(\mathbf{x})}\cdot d\mathbf{x}$

$\mathbf{s}(\mathbf{x})$: esprime una componente di traslazione rigida nello intorno di P

$\frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$: derivata parziale del vettore $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ rispetto ad $\mathbf{x}$

$\Psi(\mathbf{x})$: deve evidentemente contenere le informazioni necessarie a definire la deformaz. pura nell'intorno di P

Tensore gradiente di spostamento (tensore del II ordine): $\underset{\text{psi}}{\Psi}(\mathbf{x}) = \underset{\text{nabla}}{\nabla}\mathbf{s}$ $\quad \left(\Psi_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right)$

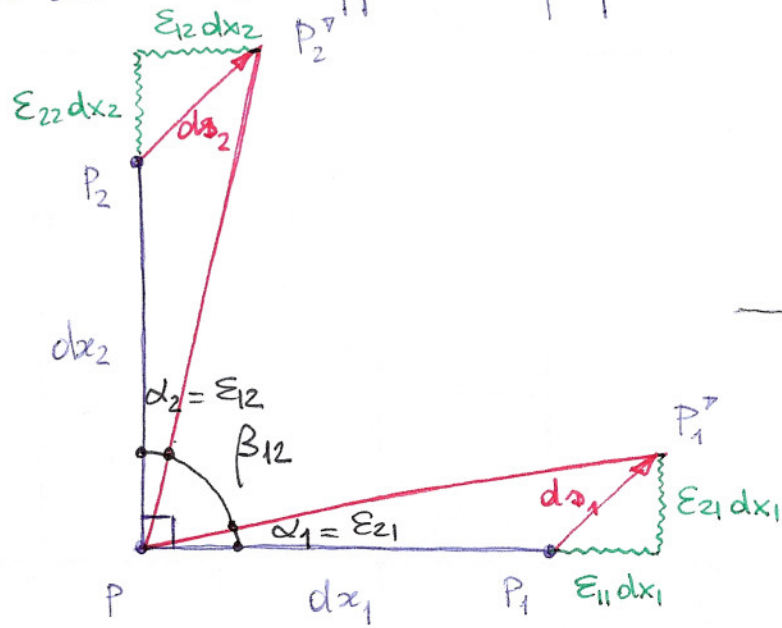
Decomposizione additiva di Ψ (sempre possibile):

$$\Psi = \mathcal{E} + \vartheta \quad \text{ove} \begin{cases} \underset{\text{epsilon}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\left(\Psi + \Psi^T\right) & \text{parte } \underline{\text{simmetrica}} \text{ di } \Psi \quad (\mathcal{E}^T = \mathcal{E};\ \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}) \\ + \\ \underset{\text{theta}}{\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\Psi - \Psi^T\right) & \text{parte } \underline{\text{emisimmetrica}} \text{ di } \Psi \quad (\vartheta^T = -\vartheta;\ \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}) \\ = \end{cases}$$

infatti $\mathcal{E} + \vartheta = \frac{1}{2}\left(\Psi + \cancel{\Psi^T} + \Psi - \cancel{\Psi^T}\right) = \Psi$

- Tensore delle piccole deformazioni –

Vediamo ora che $\mathcal{E}$ rappresenta proprio la deformazione pura infinitesima.



fibre inizialmente $\perp$ tra di loro nel piano

poniamo sia nulla la componente ϑ

Sia $\Psi = \mathcal{E}$ ($\vartheta = 0$) con stato piano di deform.

$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ds = \mathcal{E} \cdot dx$$

- Per P_1 $\left(dx_1 = \begin{Bmatrix} dx_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\right)$, $ds_1 = \mathcal{E} \cdot dx_1$

$$\begin{cases} ds_{11} = \varepsilon_{11}\,dx_1 \\ ds_{12} = \varepsilon_{21}\,dx_1 \\ ds_{13} = \varepsilon_{31}\,dx_1 = 0 \end{cases}$$

- Per P_2 $\left(dx_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ dx_2 \\ 0 \end{Bmatrix}\right)$, $ds_2 = \mathcal{E} \cdot dx_2$

$$\begin{cases} ds_{21} = \varepsilon_{12}\,dx_2 \\ ds_{22} = \varepsilon_{22}\,dx_2 \\ ds_{23} = \varepsilon_{32}\,dx_2 = 0 \end{cases}$$

- <u>Allungamento specifico</u> delle fibre $\overline{P_1P}$ e $\overline{P_2P}$, $\left(\text{tipo } \frac{\Delta l}{l_0}\right)$ nelle direzioni stesse:

$$\overline{P_1P}: \quad \frac{(\cancel{dx_1}+\varepsilon_{11}\cancel{dx_1})-\cancel{dx_1}}{\cancel{dx_1}} = \varepsilon_{11} \quad , \text{ idem } \quad \overline{P_2P} = \frac{(\cancel{dx_2}+\varepsilon_{22}\cancel{dx_2})-\cancel{dx_2}}{\cancel{dx_2}} = \varepsilon_{22}$$

Quindi le componenti di ε ad indici uguali rappresentano precisamente gli allungamenti specifici di fibre inizialmente parallele agli assi coordinati

$$\varepsilon_{ij} \text{ per } i=j \Rightarrow \varepsilon_{(ii)} = \frac{\partial s_i}{\partial x_{(i)}} \qquad \text{(no sum on } i\text{)}$$

- <u>Scorrimento angolare</u> tra le due fibre $\overline{P_1P}$ e $\overline{P_2P}$ inizialmente perpendicolari:

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \beta_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\text{ove } \alpha_1 \simeq \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\varepsilon_{21}\cancel{dx_1}}{(1+\underbrace{\varepsilon_{11}}_{0})\cancel{dx_1}} \simeq \varepsilon_{21} \quad , \text{ idem } \alpha_2 \simeq \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\varepsilon_{12}\cancel{dx_2}}{(1+\underbrace{\varepsilon_{22}}_{0})\cancel{dx_2}} \simeq \varepsilon_{12}$$

piccolo rispetto ad 1 (piccole deformazioni)

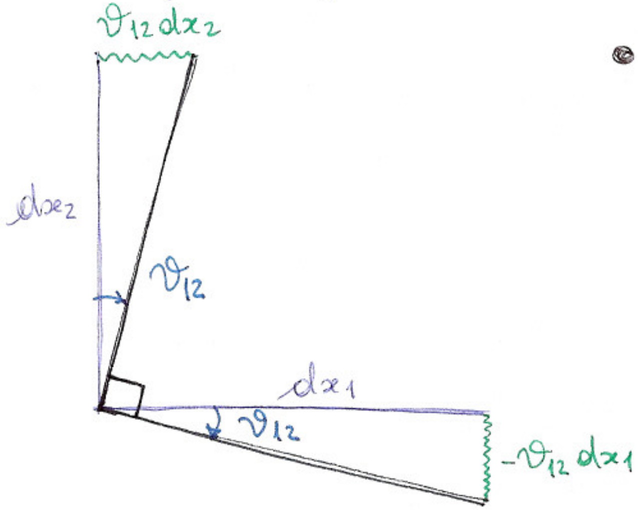
$$\text{poichè } \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \Rightarrow \boxed{\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}}$$

Le componenti di ε ad indici diversi rappresentano la metà degli scorrimenti angolari subiti da fibre inizialmente $\perp$ fra di loro e parallele agli assi coordinati

$$\varepsilon_{ij} \text{ per } i\neq j \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{ij} \quad ; \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

Tensore delle piccole rotazioni

Si può mostrare ora agevolmente che la parte emisimmetrica ϑ rappresenta una rotazione rigida infinitesima



poniamo sia nulla la componente ε

• Sia $H = \vartheta$ $(\varepsilon = 0)$ per stato piano

$$[\vartheta] = \begin{bmatrix} \vartheta_{11}=0 & \vartheta_{12} & 0 \\ \vartheta_{21}=-\vartheta_{12} & \vartheta_{22}=0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ds = \vartheta \cdot dx$$

N.B.: dovendo essere $\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$ per $i=j \rightarrow \vartheta_{ii} = 0$

$$\begin{cases} ds_{11} = \vartheta_{11}\, dx_1 = 0 \\ ds_{12} = \vartheta_{21}\, dx_1 = -\vartheta_{12}\, dx_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ds_{21} = \vartheta_{12}\, dx_2 \\ ds_{22} = \vartheta_{22}\, dx_2 = 0 \end{cases}$$

Riassumendo:

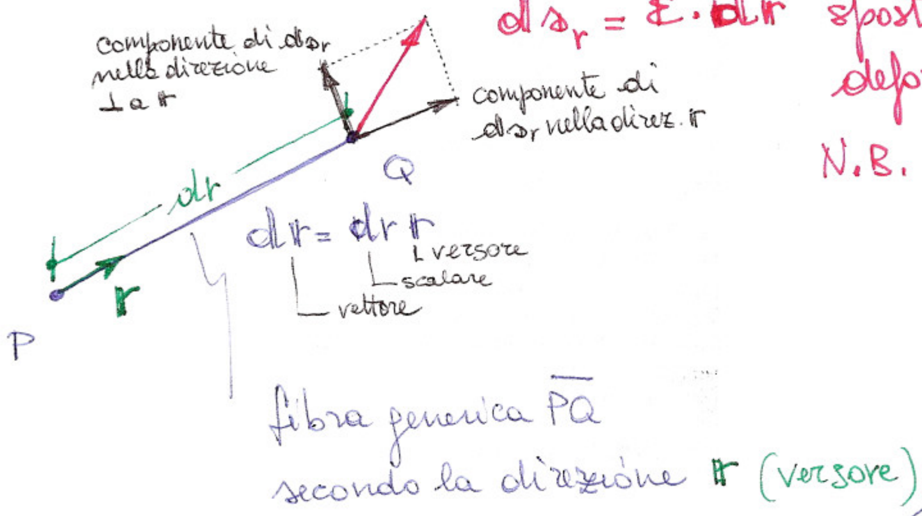
- il campo di spostamento contiene informazioni sulla deformazione pura, ma solo attraverso il suo gradiente (uno spostamento rigido non causa deformazione)
- il gradiente di spostamento contiene ancora una parte (la sua parte emisimmetrica) che rappresenta una rotazione rigida ocesima.
- depurato il gradiente di tale parte rimane la sua parte simmetrica, tensore delle piccole deformazioni, che rappresenta la deformazione pura:

ε descrive e misura le piccole deformazioni!

Proprietà del tensore delle piccole deformazioni $\mathbb{E}$

- In quanto tensore del II ordine simmetrico, duale cinematico del tensore sforzo di Cauchy (statico), $\mathbb{E}$ possiede caratteristiche analoghe a quelle già individuate per σ.

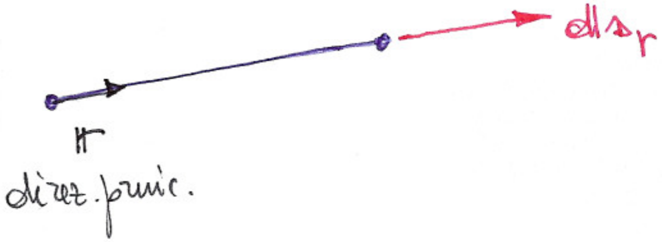
- Deformazioni e direzioni principali di deformazione



$d\mathbf{s}_r = \mathbb{E} \cdot d\mathbf{r}$ spostamento relativo tra $\overline{PQ}$ (per effetto della deformazione pura $\mathbb{E}$)

N.B.: in generale ci si attende $d\mathbf{s}_r$ non parallelo a $\mathbf{r}$.

Se $d\mathbf{s}_r$ risulta // a $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ viene detta direzione principale di deformazione. Ciò porta a definire un pb. agli autovalori per il tensore $\mathbb{E}$ (simile a quello visto per σ):



la fibra subisce in questo caso un puro allungamento nella direzione principale

$\Rightarrow d\mathbf{s}_r = ds_r\,\mathbf{r}$ con $ds_r = \varepsilon_r\,dr$

$\mathbb{E} \cdot d\mathbf{r} = \varepsilon_r\,dr\,\mathbf{r}$

$\mathbb{E} \cdot \mathbf{r}\,\cancel{dr} = \varepsilon_r\,\cancel{dr}\,\mathbf{r} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E} \cdot \mathbf{r} = \varepsilon_r\,\mathbf{r}}$

pb. agli autovalori per $\mathbb{E}$

ε_r : autovalori $\Rightarrow$ deformazioni principali

$\mathbf{r}$: autovettori $\Rightarrow$ direzioni principali di deformazione

$(\mathbb{E} - \varepsilon_r \mathbb{I}) \cdot \mathbb{n} = \mathbb{0}$ sistema lineare omogeneo

ammette soluzioni non banali $(\mathbb{n} \neq \mathbb{0})$ sse:

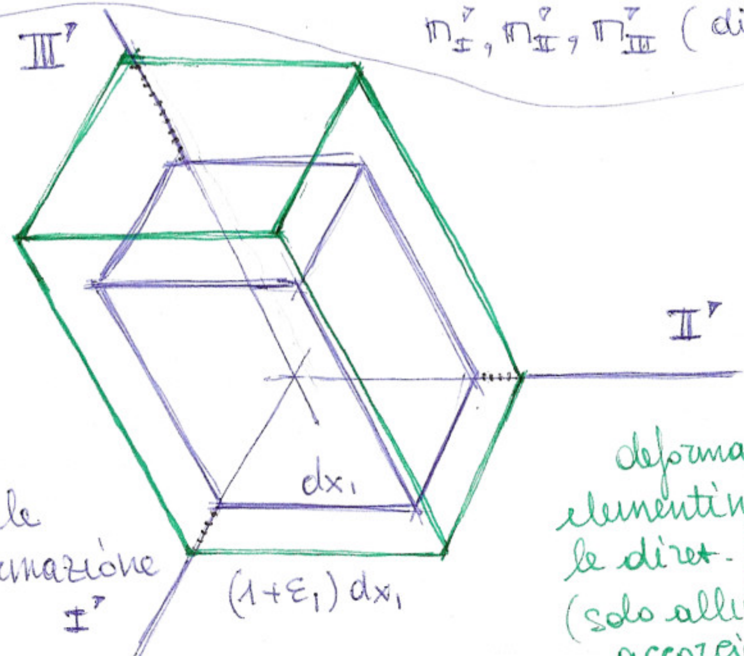
$$-\det(\mathbb{E} - \varepsilon_r \mathbb{I}) = \varepsilon_r^3 - I_1' \varepsilon_r^2 - I_2' \varepsilon_r - I_3' = 0 \quad (\text{equaz. caratteristica di } \mathbb{E})$$

<u>invarianti di deformazione</u>: (vedi def. analoga per gli invarianti di sforzo I_i)

targo con apice ' gli invarianti di deformazione

$$\begin{cases} \text{primo} & I_1' = \mathrm{tr}\,\mathbb{E} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ \text{secondo} & I_2' = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 - \mathrm{tr}^2\mathbb{E}\right) = \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} \\ \text{terzo} & I_3' = \det \mathbb{E} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{31}^2\varepsilon_{22} \\ & \quad = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^3 + \frac{1}{6}\mathrm{tr}^3\mathbb{E} - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathbb{E}\,\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^2 \end{cases}$$

Tre radici <u>reali</u>: $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ (deformazioni principali) associate a $\mathbb{n}_I', \mathbb{n}_{II}', \mathbb{n}_{III}'$ (direzioni principali di deformazione).



terna principale di deformazione

deformazione di elementino ritagliato secondo le diret. princ. di deformaz. (solo allungamenti o accorciamenti, forma costante)

Deformazione volumetrica:

$$v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{(1+\varepsilon_I)\cancel{dx_I}(1+\varepsilon_{II})\cancel{dx_{II}}(1+\varepsilon_{III})\cancel{dx_{III}} - \cancel{dx_I\, dx_{II}\, dx_{III}}}{\cancel{dx_I\, dx_{II}\, dx_{III}}} =$$

variazione specifica di volume

$$= (1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II})(1+\varepsilon_{III}) - 1 =$$

$$= (1+\varepsilon_I)(1+\varepsilon_{II}+\varepsilon_{III}+\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}) - 1 =$$

$$= \cancel{1} + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_I + \varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_I\varepsilon_{III} + \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III} - \cancel{1} =$$

$$= (\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}) + (\varepsilon_I\varepsilon_{II} + \varepsilon_{II}\varepsilon_{III} + \varepsilon_{III}\varepsilon_I) + \varepsilon_I\varepsilon_{II}\varepsilon_{III}$$

$$= I_1' - \underbrace{I_2'}_{o(\varepsilon^2)} + \underbrace{I_3'}_{o(\varepsilon^3)} \simeq \boxed{I_1' = \mathrm{tr}\,\mathbb{E} = v}$$

piccole deformaz.

significato fisico di I_1'

Componenti volumetrica e deviatorica di $\boldsymbol{\varepsilon}$:

È sempre possibile eseguire la seguente decomposizione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_V + \boldsymbol{\varepsilon}_D \quad \text{ove} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_V = \dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}}{3}\,\mathbb{I} = \dfrac{v}{3}\,\mathbb{I} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_D = \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_V \\ \qquad = \boldsymbol{\varepsilon} - \dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}}{3}\,\mathbb{I} \end{cases}$$

altra notaz. usata (sinonimo di $\boldsymbol{\varepsilon}_D$)

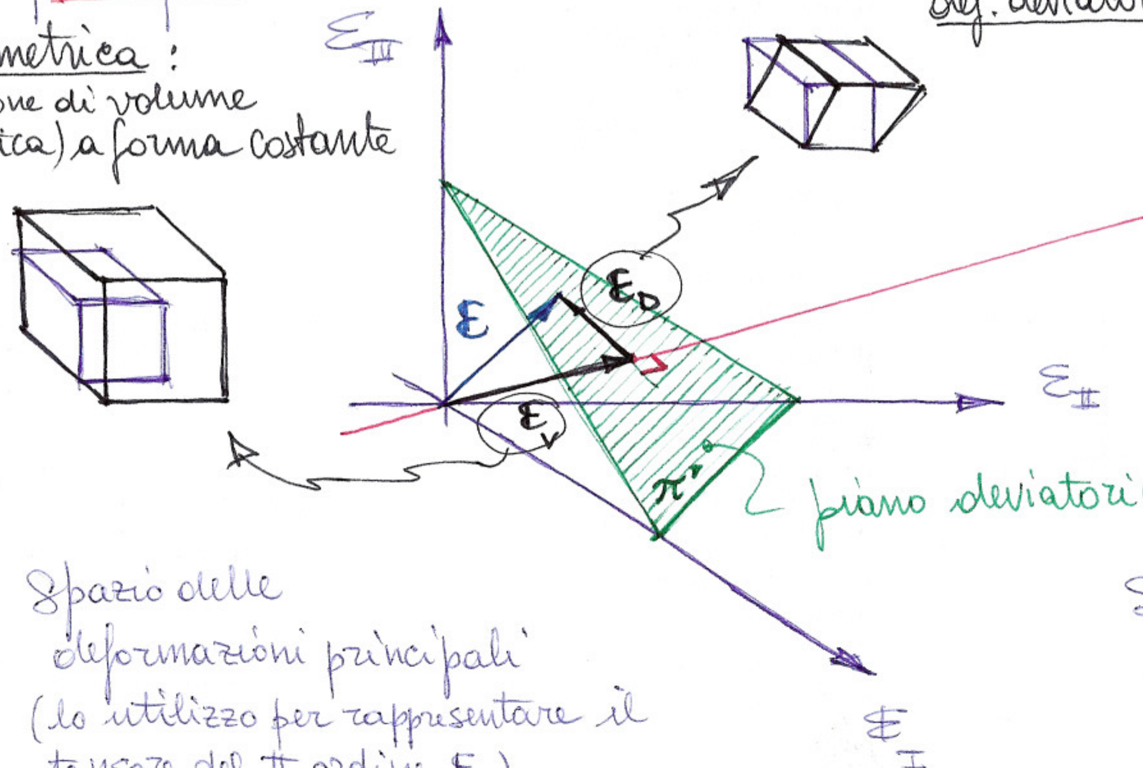
$\boldsymbol{\varepsilon}_V$: componente volumetrica di $\boldsymbol{\varepsilon}$ (v: deformazione volumetrica)

$\boldsymbol{\varepsilon}_D$: componente deviatorica di $\boldsymbol{\varepsilon}$

Significato e rappresentazione delle componenti nello spazio delle deformazioni principali:

def. volumetrica: variazione di volume (omotetica) a forma costante

def. deviatorica: cambiamento di forma a volume costante



$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} = \varepsilon_{III}$
asse idrostatico
(trisettrice del I ottante)

piano deviatorico ($\perp$ all'asse idrostatico)

Spazio delle deformazioni principali (lo utilizzo per rappresentare il tensore del II ordine $\boldsymbol{\varepsilon}$)

Si noti che $\boldsymbol{\varepsilon}_D \perp \boldsymbol{\varepsilon}_V$, cioè:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_V : \boldsymbol{\varepsilon}_D = \boldsymbol{\varepsilon}_D : \boldsymbol{\varepsilon}_V = \varepsilon^V_{ij}\,\varepsilon^D_{ij} \equiv 0$$

(somma su i e j=1,2,3)

prodotto interno con contrazione di due indici

- Rappresentazione matriciale delle due componenti:

$$[\mathcal{E}_V] = \overbrace{\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3}}^{v}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad ; \quad [\mathcal{E}_D] = \begin{bmatrix}\varepsilon_{11}-\frac{v}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22}-\frac{v}{3} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33}-\frac{v}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\varepsilon_{11}-\frac{\varepsilon_{22}}{3}-\frac{\varepsilon_{33}}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ & \frac{2}{3}\varepsilon_{22}-\frac{\varepsilon_{11}}{3}-\frac{\varepsilon_{33}}{3} & \varepsilon_{23}\\ \text{simm.} & & \frac{2\varepsilon_{33}}{3}-\frac{\varepsilon_{11}}{3}-\frac{\varepsilon_{22}}{3}\end{bmatrix}$$

volumetrica ; deviatorica

- Invarianti della componente deviatorica:

(indico con J gli invarianti deviatorici, con ᴰ gli invar. di deformaz.)

$$\begin{cases} J_1^D = \operatorname{tr}\mathcal{E}_D = \cancel{\operatorname{tr}\mathcal{E}} - \cancel{\frac{\operatorname{tr}\mathcal{E}}{3}}\,\underbrace{\cancel{\operatorname{tr}\mathbb{I}}}_{3} = 0 \\ J_2^D = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathcal{E}_D^2 \\ J_3^D = \det\mathcal{E}_D = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathcal{E}_D^3 \end{cases}$$

$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$

dim.

per definizione ⇒ una componente deviatorica ha sempre traccia nulla

Qui, coerentemente, significa che la def. volumetrica associata alla componente deviatorica è nulla ($\mathcal{E}_D$ rappresenta deformazioni (piccole) a volume costante)

Infatti:

$$\varepsilon_{D_i}^3 - \cancel{J_1^D}^{\,0}\,\varepsilon_{D_i}^2 - J_2^D\,\varepsilon_{D_i} - J_3^D = 0 \quad ; \quad i = \mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$$

(eq. caratteristica del deviatore di deformazione)

Sommo le tre equazioni:

$$\underbrace{\varepsilon_{D\mathrm{I}}^3+\varepsilon_{D\mathrm{II}}^3+\varepsilon_{D\mathrm{III}}^3}_{\operatorname{tr}\mathcal{E}_D^3} - J_2^D\,\underbrace{\cancel{(\varepsilon_{D\mathrm{I}}+\varepsilon_{D\mathrm{II}}+\varepsilon_{D\mathrm{III}})}}_{J_1^D=0} - 3J_3^D = 0$$

$$\operatorname{tr}\mathcal{E}_D^3 - 3J_3^D = 0 \Rightarrow J_3^D = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathcal{E}_D^3$$

Decomposizione analoga si può anche definire per il tensore sforzo:

$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D \quad \text{ove} \quad \begin{cases} \sigma_V = \dfrac{tr\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} = p\,\mathbb{I} \\ \\ \sigma_D = \underset{\text{sinonimo di } \sigma_D}{\mathbb{S}} = \sigma - \sigma_V \\ \qquad = \sigma - \dfrac{tr\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} \end{cases}$$

sforzo volumetrico, idrostatico o sferico – p: pressione o tensione media

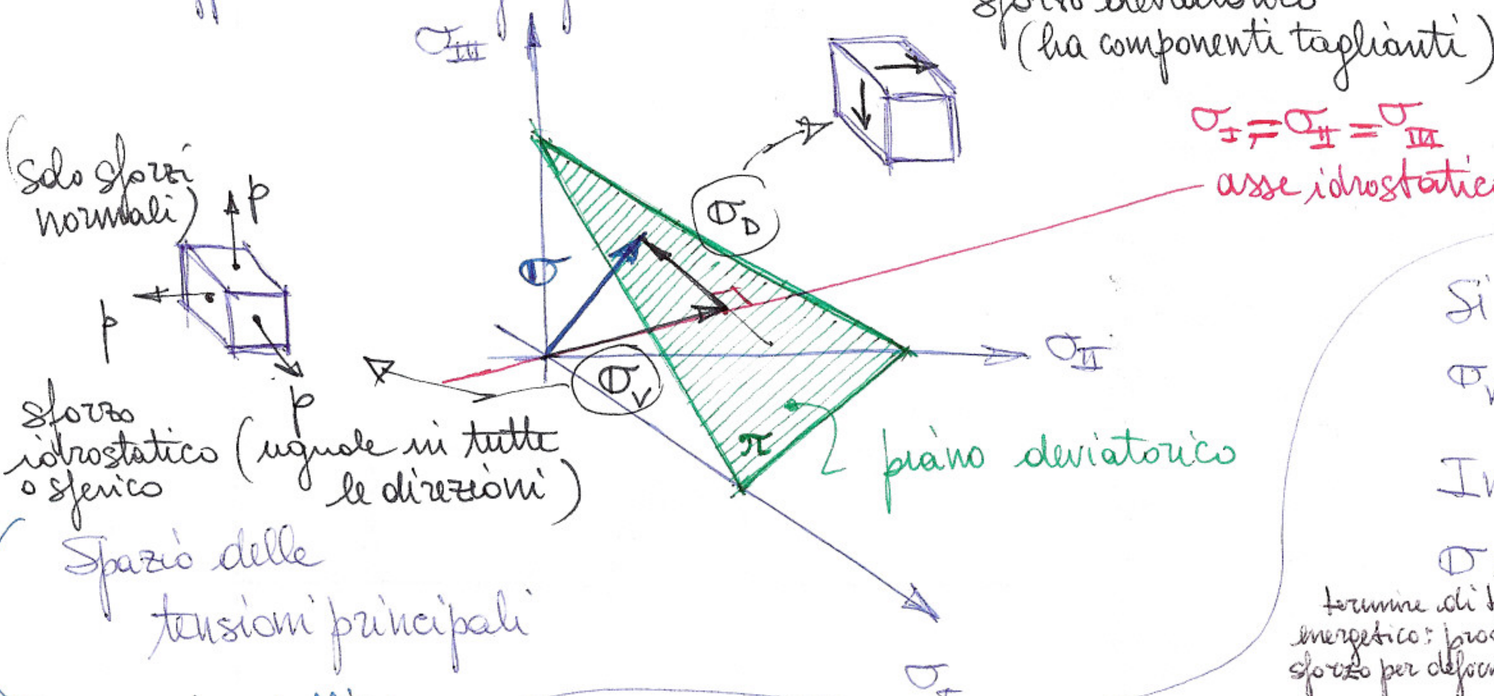
sforzo deviatorico o deviatore di sforzo

con invarianti

$$\begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = \dfrac{1}{2}\,tr\,\sigma_D^2 \\ J_3 = \dfrac{1}{3}\,tr\,\sigma_D^3 \end{cases}$$

$\leftarrow$ imp. nella teoria della plasticità (vedi criterio di von Mises)

Rappresentazione grafica:



Si noti che:

$$\sigma_V : \sigma_D = \sigma_D : \sigma_V = \sigma^V_{ij}\,\sigma^D_{ij} = 0$$

Inoltre:

$$\sigma : \varepsilon = (\sigma_V + \sigma_D) : (\varepsilon_V + \varepsilon_D) =$$

termine di tipo energetico: prodotto sforzo per deformazione

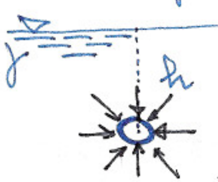
$$= \sigma_V : \varepsilon_V + \sigma_D : \varepsilon_D$$

$$= \boxed{p\,v + \sigma_D : \varepsilon_D = \sigma : \varepsilon}$$

$\Rightarrow$ in quanto $\sigma_D : \varepsilon_V = \sigma_V : \varepsilon_D = 0$

e $\sigma_V : \varepsilon_V = p\,\mathbb{I} : \dfrac{v}{3}\,\mathbb{I} = p\,v\,\dfrac{3}{3}$

esempio: pallina immersa in un liquido



$p = \gamma h$ in tutte le direzioni

un tensore deviatorico è sempre $\perp$ ad un tensore sferico

erizzi@unibg.it