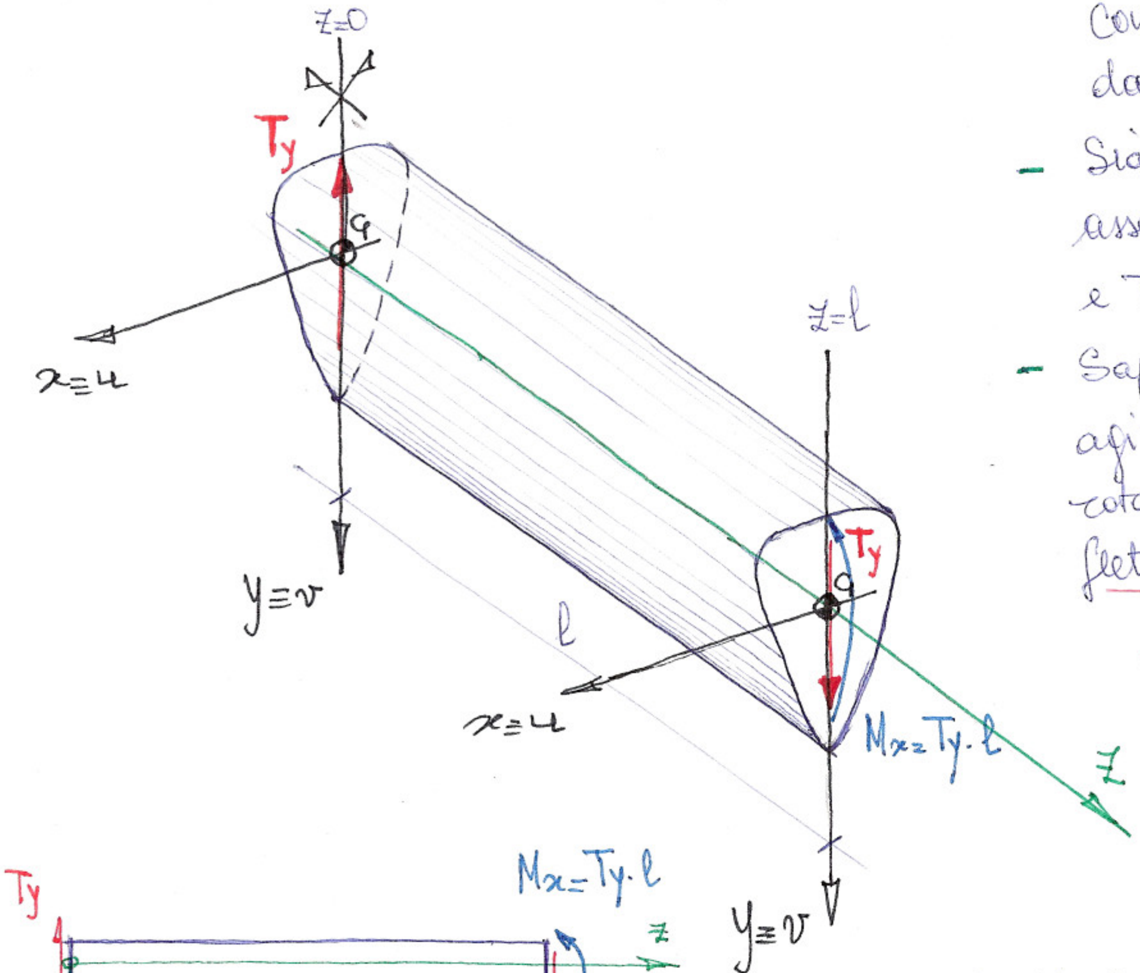
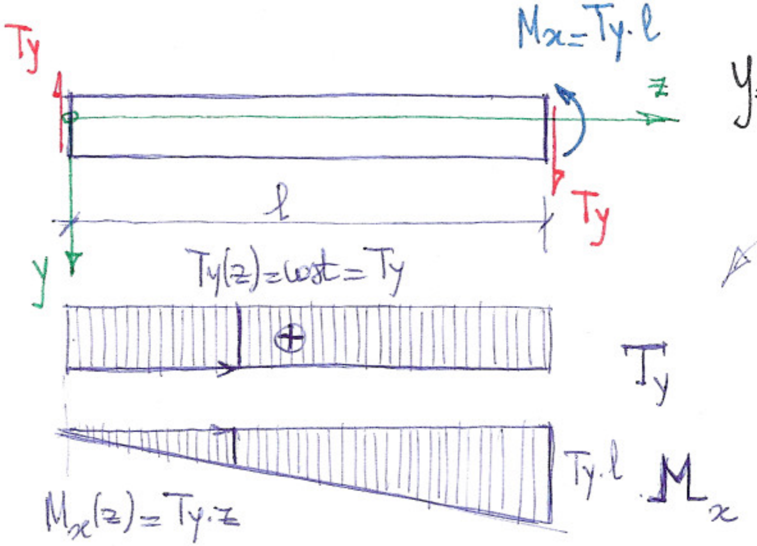
erizzi@unibg.it

CASI DI DSV:

3) Taglio (o flessione composta)



- Consideriamo il solo caso di prisma di DSV con sezioni simmetriche e simmetricamente caricate da un'azione tagliante T.
- Sia ad es. y un asse di simmetria retta, quindi asse principale d'inerzia della sezione trasversale, e T agente secondo tale asse: $T = T_y$.
- Sappiamo che T_y = cost lungo il prisma non può agire da sola, in quanto, per l'equilibrio alla rotazione è necessariamente presente anche momento flettente M_x agente nel piano di simmetria.
  - Supponendo agente la sola T_y sulla base $z=0$ dovrà quindi essere presente una coppia $M_x = T_y \cdot l$ sulla base $z = l$. In tal modo il sistema di forze agenti sulle basi del prisma risulta autoequilibrato.



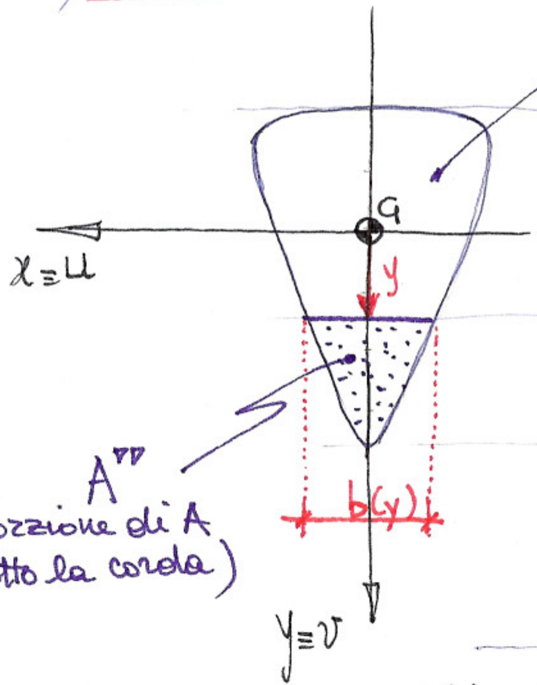
- Il taglio risulta quindi costante lungo il prisma mentre il momento ha andamento lineare in z.
- Ci attendiamo che il taglio T_y produca tensioni tangenziali τ_{zx}, τ_{zy} nel piano della sezione, mentre $M_x(z)$ produce uno sforzo normale

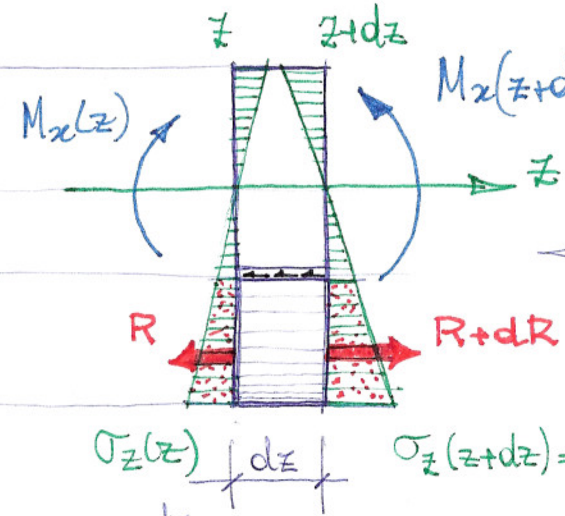
$$\sigma_z(z,y) = \frac{M_x(z)}{J_x}\, y = \frac{T_y \cdot z}{J_x} \cdot y$$

- Trattazione approssimata secondo D.J. JOURAWSKY (~1856)

- la soluzione analitica del pb. di DSV del taglio non si presenta in generale agevole. Si è affermata la soluzione approssimata proposta dall'ingegnere russo Jourawsky, fondata sul ragionamento di equilibrio seguente.

- Si considera una corda di taglio ⊥ all'asse y posta a quota generica y tale da enucleare una porzione di un concio di prisma di lunghezza dz. Si valuta l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse z di tale porzione.

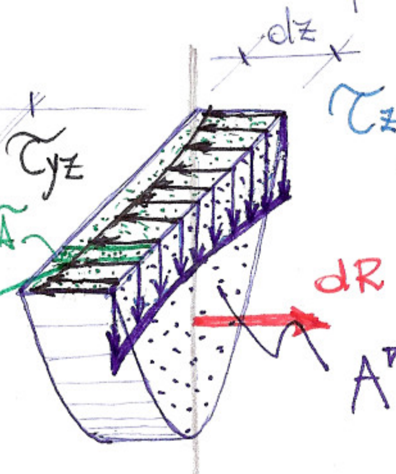




$dM_x = T_y \cdot dz$

Concio di prisma soggetto alla distribuzione di sforzo normale dovuta a M_x

$$d\sigma_z = \frac{dM_x}{J_x}\, y = \frac{T_y\, dz}{J_x}\, y$$



larghezza della corda di taglio $b(y)$

$\tilde{A} = b(y)\, dz$

$d\tilde{A} = dx\, dz$

$\tau_{zy} = \tau_{yz}$ (poichè $\sigma^T = \sigma$, tensore sforzo simmetrico)

la risultante delle τ_{yz} su $\tilde{A}$ deve equilibrare la risultante dR

- L'equilibrio alla traslazione in direzione z impone:

$$\int_{\tilde{A}} \tau_{yz}\, d\tilde{A} = dR$$

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$

$$\int_{\tilde{A}} \tau_{zy}\, dx\, \cancel{dz} = \int_{A''} d\sigma_z\, dA'' = \int_{A''} \frac{T_y \cancel{dz}}{J_x}\, y\, dA'' \qquad \forall dz$$

Definendo con $\bar{\tau}_{zy}$ il valor medio di τ_{zy} lungo la corda di larghezza b:

$$\bar{\tau}_{zy} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zy}\, dx}{b} \quad ; \quad b\,\bar{\tau}_{zy} = \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zy}\, dx$$

e notando che l'integrale $\int_{A''} y\, dA''$ esprime il momento statico della porzione d'area A'' rispetto all'asse x baricentrico dell'intera sezione si ottiene:

τ_{zy} media lungo la corda $\rightarrow$

$$\boxed{\bar{\tau}_{zy} = \frac{T_y\, S_x''(y)}{J_x\, b(y)}}$$

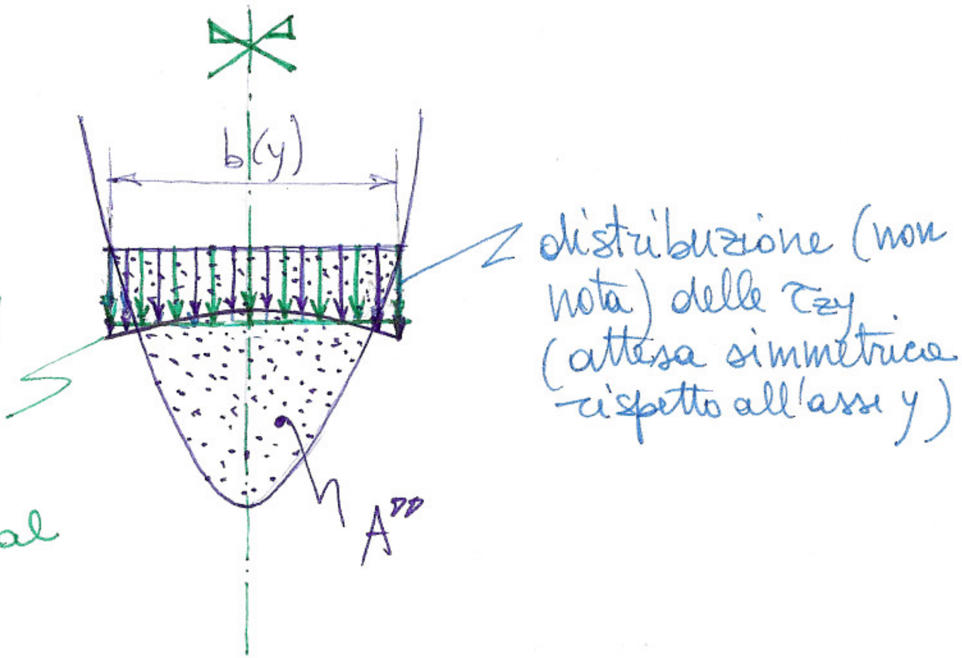
FORMULA DI JOURAWSKY

ove

- T_y: Taglio applicato (secondo l'asse y)
- J_x: Momento d'inerzia dell'intera sezione rispetto all'asse x
- $S_x''(y)$: Momento statico dell'area A'' rispetto all'asse x
- $b(y)$: Larghezza della corda di taglio

- Sin qui nessuna approssimazione. L'imposizione dell'equilibrio ha consentito di determinare il valor medio delle τ_{zy} lungo la corda. L'approssimazione consiste nell'assumere in seguito che le τ_{zy} siano costanti lungo la corda e pari al loro valore medio:

$$\tau_{zy}(x,y) \underset{\text{approssimazione}}{=} \bar{\tau}_{zy}(y) = \frac{T_y\, S_x^{\triangleright\triangleright}(y)}{J_x\, b(y)}$$



- Si noti inoltre che, poichè il momento statico dell'intera sezione rispetto all'asse x (baricentrico) è nullo, risulta:

$$S_x = S_x^{\triangleright} + S_x^{\triangleright\triangleright} = 0 \Rightarrow \boxed{S_x^{\triangleright\triangleright} = -S_x^{\triangleright}}$$

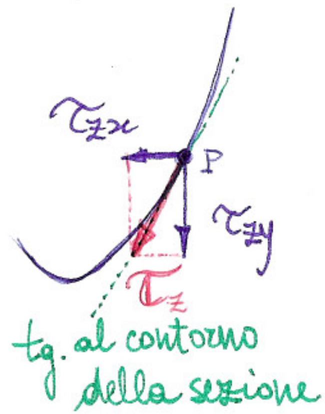
- Quindi le $\bar{\tau}_{zy}(y)$ possono essere espresse indifferentemente dalle due formule:

$$\bar{\tau}_{zy}(y) = \frac{T_y\, S_x^{\triangleright\triangleright}(y)}{J_x\, b(y)} = -\frac{T_y\, S_x^{\triangleright}(y)}{J_x\, b(y)}$$

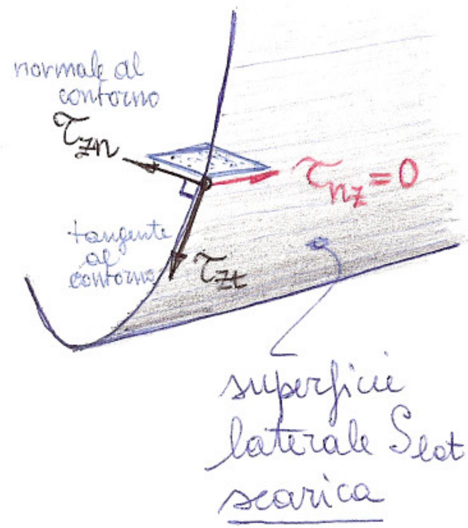
$S_x^{\triangleright}$: momento statico di $A^{\triangleright}$ risp. a x

$S_x^{\triangleright\triangleright}$: momento statico di $A^{\triangleright\triangleright}$ risp. a x

- Nei punti del contorno della sezione ove esso risulta inclinato rispetto all'asse di simmetria y nasce necessariamente anche una componente τ_{zx} tale per cui il vettore risultante $\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$ risulti tangente al contorno della sezione.



Altrimenti si produrrebbe anche una τ_{zn} normale al contorno, quindi anche una $\tau_{nz} = \tau_{zn}$ sulla sup. laterale del prisma che, invece, è scarica per ipotesi. $\Rightarrow$



- Le $\tau_{zx}(x,y)$ lungo la corda a quota y dovranno avere un andamento antisimmetrico rispetto all'asse y, con valore nullo sull'asse di simmetria. Si dimostra inoltre, per mezzo della 3ª eq.ne indefinita di equilibrio, che tale andamento, secondo la soluzione approssimata di Jourawsky, deve risultare lineare.

$$\operatorname{div} \sigma + F = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \cancel{F_j} = 0 \underset{j=z}{\Rightarrow} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad [\text{ove } \tau_{xz} = \tau_{zx};\ \tau_{yz} = \tau_{zy}]$$

0 per hp. (prisma di DSV privo di forze di volume)

Derivando una volta rispetto ad x si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \tau_{zy}(y)}{\partial x \partial y}} + \cancel{\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(y,z)}{\partial x \partial z}} = 0 \Rightarrow \tau_{zx} \text{ lineare in } x$$

0: τ_{zy} cost. in x secondo Jourawsky

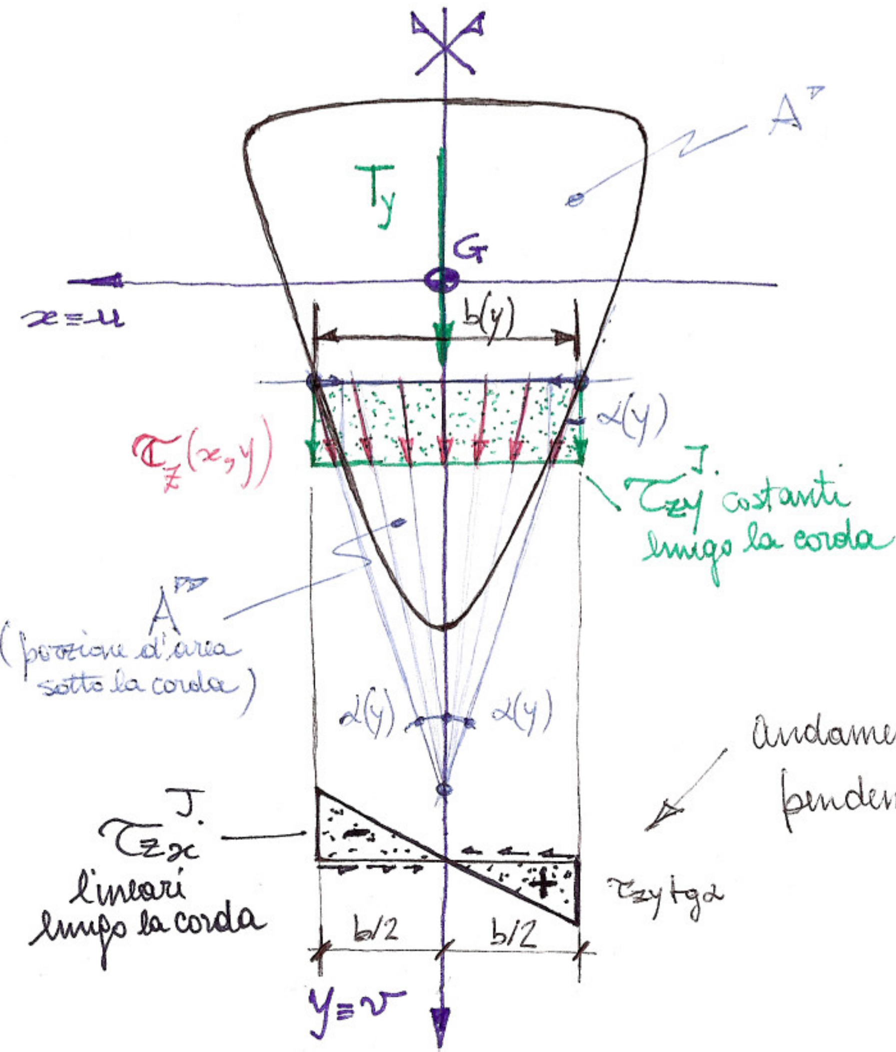
0: σ_{zz} cost. in x alla quota y secondo form. di Navier

- In base a tale osservazioni l'espressione delle $\tau_{zx}(x,y)$ secondo Jourawsky è presto determinata. Indicando con $\alpha(y)$ l'angolo di inclinazione della tangente al contorno alla quota y, si ottiene:

$$\tau_{zx}\left(x=-\frac{b}{2},\, y\right) = \operatorname{tg}\alpha(y)\ \tau_{zy}(y)$$

secondo la formula di Jourawsky

- Si determina quindi l'andamento lineare antisimmetrico delle $\tau_{zx}(x,y)$:



$$\begin{cases} \tau_{zy}^{J.}(y) = \dfrac{T_y\ S_x''(y)}{J_x\ \ b(y)} \\[2ex] \tau_{zx}^{J.}(x,y) = -2\ \dfrac{\operatorname{tg}\alpha(y)}{b(y)}\ \tau_{zy}^{J.}(y)\cdot x \end{cases}$$

(è max ove $\dfrac{S_x''(y)}{b(y)}$ è max)

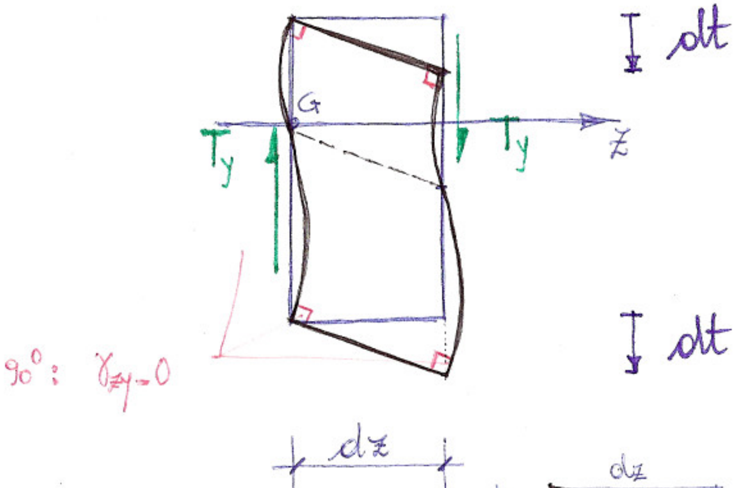
τ_{zx} positiva (nella direz. x) per $x<0$

(è max in y ove $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha(y)}{b(y)}\tau_{zy}^{J.}(y)$ è max. e, ovviamente, in $x=\pm\dfrac{b(y)}{2}$, nei p.ti del contorno)

andamento lineare con pendenza $\dfrac{\tau_{zy}\operatorname{tg}\alpha}{\frac{b}{2}} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha\ \tau_{zy}}{b}$

N.B.: Se il contorno è tutto // all'asse y, $\tau_{zx}\equiv 0$ ovunque nella sezione ed è presente la sola τ_{zy} secondo Jourawsky

- Deformazione del concio di trave dovuta al taglio:



In ragione della variabilità sulla sezione delle deformazioni taglianti, direttamente proporzionali alle tensioni tangenziali, si produce:

- uno scorrimento medio dt relativo tra le due sezioni poste a distanza dz;
- un'ingobbamento fuori piano della sezione.

Ogni ipotetica strisciolina dy, dz si deforma con def. tagliante differente secondo la diversa quota y. Riassemblandole si ottiene l'ingobbamento fuori piano.

questa sarebbe anche la def. globale del concio se le γ_z fossero costanti sulla sezione

- Si può valutare lo scorrimento relativo medio mediante il PLV: $\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$

forza per spost.to — integrale di sforzi per deformazioni

$$\cancel{T_y} \cdot dt = \int_A \left(\tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{zy}\gamma_{zy}\right) dA\, dz \qquad \text{con } \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},\quad \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

$$= \frac{1}{G}\int_A \left(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2\right) dA\, dz = \frac{1}{G}\int_A \tau_{zy}^2 \left(1 + \frac{\tau_{zx}^2}{\tau_{zy}^2}\right) dA\, dz = \frac{1}{G}\int_A \frac{T_y^2\, S_x^{**2}}{J_x^2\, b^2}\left(1 + \frac{4\, tg^2\alpha}{b^2}\, x^2\right) dA\, dz$$

$$= \frac{1}{G}\, \frac{T_y^{\cancel{2}}\, dz}{A}\, \underbrace{\frac{A}{J_x^2}\int_A \frac{S_x^{**2}}{b^2}\left(1 + 4\frac{tg^2\alpha}{b^2}\, x^2\right) dA}_{\mu\,:\ \text{fattore di taglio}}$$

è puro parametro geometrico della sezione trasversale - Si dim. che è sempre ≥ 1

Si ottiene:

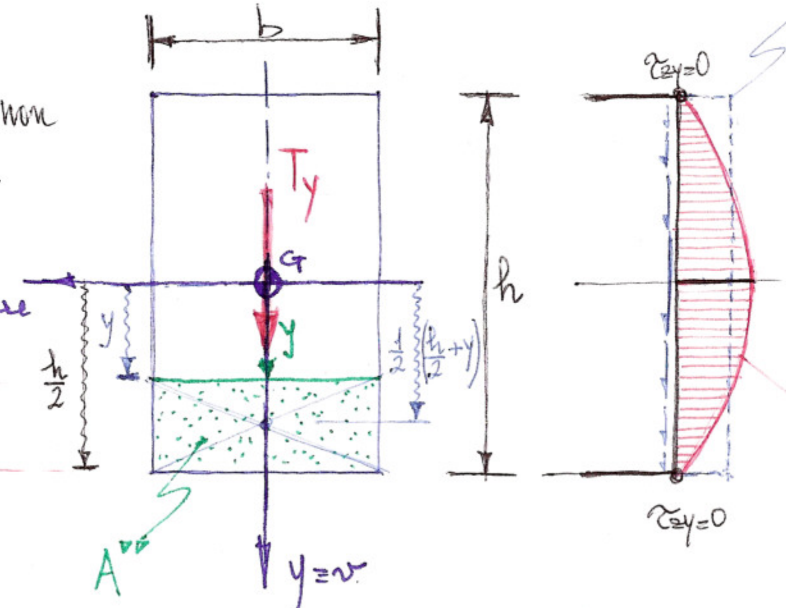
$$\boxed{dt = \mu \frac{T_y}{GA}\, dz = \frac{T_y}{GA^*}\, dz}$$

$A^* = \frac{A}{\mu}$: area ridotta secondo la quale si misura lo scorrimento medio dt

Caso della sezione rettangolare

N.B.: poichè $\alpha(y) \equiv 0$ non c'è τ_{zx}

$J_x = \frac{1}{12} b h^3$



$\tau_{zy}^{media} = \frac{T_y}{A}$ (media sulla sezione, in y)

$$\tau_{zy}^{m} = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\, dy}{h} = \frac{T_y}{A} \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{2}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)\frac{dy}{h}}_{1}$$

$\tau_{zy}^{max} = \frac{3}{2}\frac{T_y}{A}$ (nel baricentro)

andamento parabolico delle $\tau_{zy}(y)$, con p.to di stazionarietà in corrispondenza di G.

$$S_x^{**}(y) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

formula di J.

$$\tau_{zy}(y) = \frac{T_y \; \frac{\cancel{b}}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{1}{\cancel{12}_{6}} b h^3 \; \cancel{b}} = \frac{T_y}{bh}\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{h^2}}\frac{\cancel{h^2}}{\cancel{4}_2}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\tau_{zy}(y) = \frac{3}{2}\frac{T_y}{A}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)}$$

N.B. $\tau_{zy} = 0$ per $y = \pm \frac{h}{2}$

$$\frac{dS_x^{**}(y)}{dy} = \frac{b}{2}(-2y) = -by = 0 \text{ per } y = 0$$

essendo b = cost τ_{zy}^{max} ove S_x^{**} è max

$$S_x^{**}(y=0) = \frac{bh^2}{8}$$

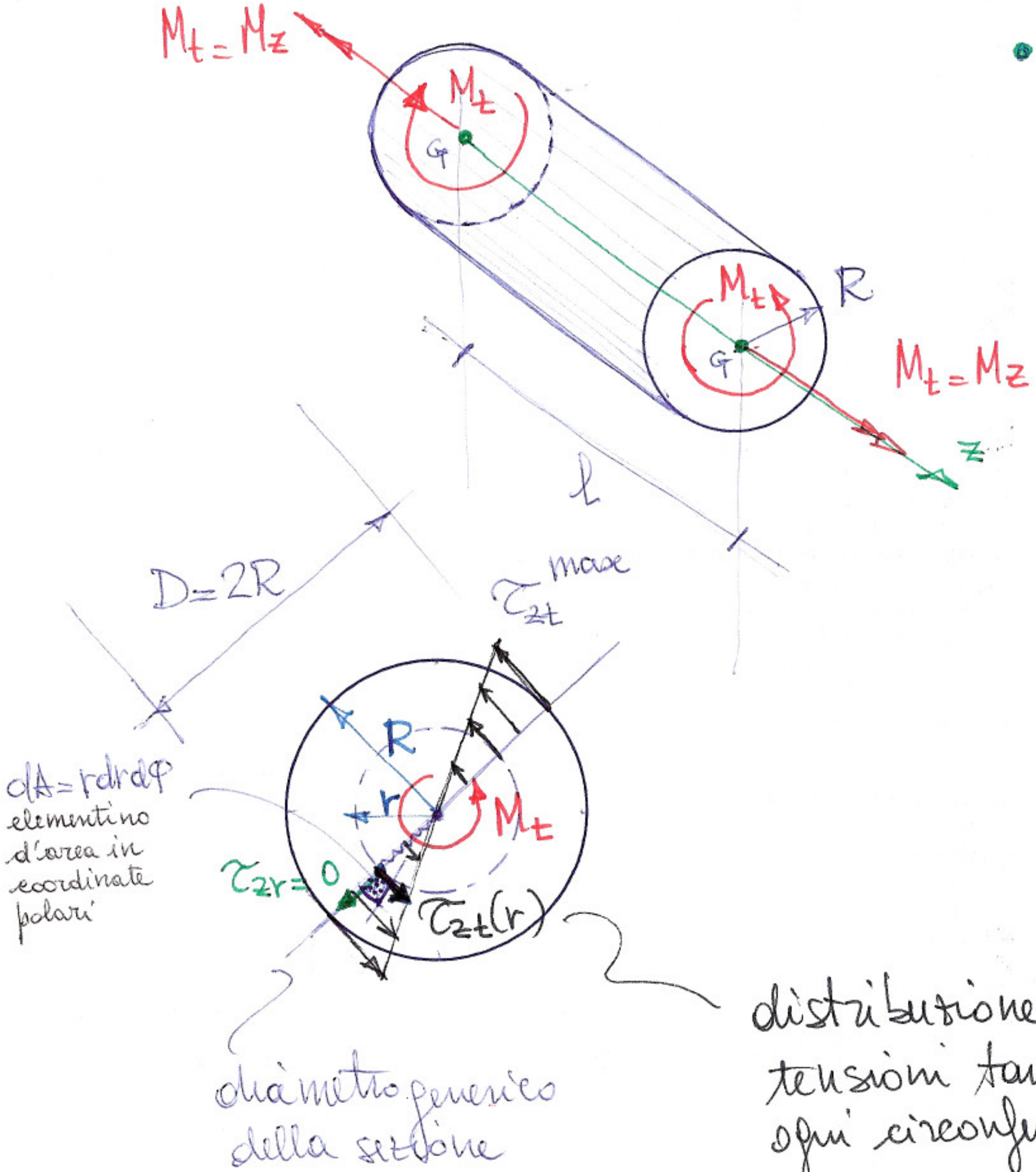
$$\tau_{zy}^{max} = \frac{T_y \frac{b\cancel{h^2}}{\cancel{8}_2}}{\frac{1}{\cancel{12}_3} b h^{\cancel{3}} \cdot b} = \frac{3}{2}\frac{T_y}{bh}$$

- Il fattore di taglio si può calcolare agevolmente e risulta pari a $\mu = \frac{6}{5} = 1{,}2$ $\left(A^* = \frac{A}{\mu} = \frac{5}{6}A = 0{,}8\bar{3}\,A\right)$ area ridotta

$$\mu = \frac{A}{J_x^2}\int_A \frac{S_x^{**2}}{b^2}\, dA = \frac{bh}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)^2}\frac{1}{b^2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{b^2}{4}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy\, dx = \frac{6}{5}$$

(si noti che il fattore $\frac{3}{2}$ nella τ_{zy}^{max} non è $\mu = \frac{6}{5}$)

4) Torsione (circolare)



- Si considera un prisma di DSV a sezione circolare di raggio R costante soggetto a momento torcente M_t
  - Per stretta analogia col caso della flessione retta si opera con approccio semiinverso agli sforzi
  - Guidati da considerazioni di simmetria (polare) della sezione circolare si pone la seguente ipotesi sul campo di sforzo:

$$\sigma_{ij} = 0 \quad e \quad \underbrace{\tau_{zr} = 0 \; , \; \boxed{\tau_{zt} = k\, r}}_{\text{tensioni tangenziali nel piano della sezione}} , \quad k = cost$$

- Si verifica che tutte le equaz. governanti il pb. elastico di DSV risultano soddisfatte.

- Si determina la costante K imponendo la condizione di equivalenza statica tra la distribuz. di sforzo $\tau_{zt} = K r$ ed il momento torcente M_t applicato:

$$\int_A dM_t = \int_A \underbrace{(\tau_{zt}\, dA)}_{\text{forza}} \cdot \underbrace{r}_{\text{braccio}} = M_t$$

. Sostituendo il campo $\tau_{zt}(r)$:

$$\int_A (K\, r\, dA) \cdot r = K \underbrace{\int_A r^2 dA}_{} = M_t \Rightarrow \boxed{K = \frac{M_t}{J_G}}$$

J_G: momento d'inerzia polare rispetto al baricentro $\quad [J_G] = [L]^4$

- $J_G = \int_A r^2 dA = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\, r\, dr\, d\varphi = \cancel{2}\pi \frac{r^4}{\cancel{4}_2}\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$

Quindi:

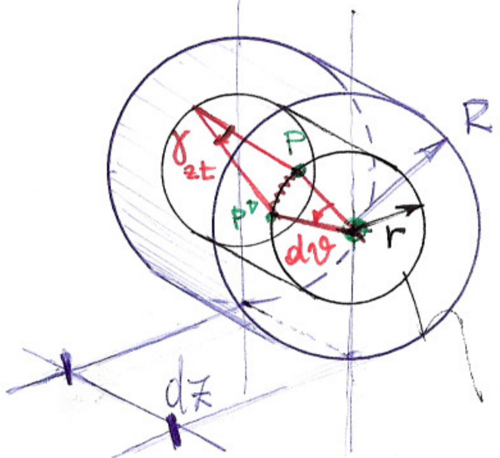
- $\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r$ (notare l'analogia con la formula di Navier per la flessione)

e
- $\tau_{zt}^{max} = \tau_{zt}(r=R) = \frac{2 M_t}{\pi R^3} = \frac{M_t}{W_t}$ tensione tangenziale massima dovuta al momento torcente ($W_t = \frac{\pi R^3}{2}$: modulo di resistenza a torsione)

- Campo di deformazione:

$$\varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{salvo} \quad \gamma_{zt} = \frac{\tau_{zt}}{G} = \frac{M_t}{G \cdot J_G} r$$

- Conseguente deformazione del concio di prisma: rotazione relativa $d\vartheta$ tra due sezioni poste mutuamente a distanza dz



cilindretto di raggio r generico con scorrimento angolare γ_{zt} letto sulla sua sup. esterna

$$\overline{PP'} = r\, d\vartheta = \gamma_{zt}\, dz$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{r}\, d\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot J_G} \cancel{r}\, dz$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot J_G} dz}$$

con $G \cdot J_G$: rigidezza torsionale

- Rotaz. relativa tra le basi del prisma:

$$\Delta\vartheta = \int_0^l d\vartheta = \frac{M_t\, l}{G \cdot J_G}$$

- Più in generale, per sezioni compatte di forma generica:

$$d\vartheta = \frac{M_t}{G J_t} dz = q \frac{M_t}{G J_G} dz$$

ove J_t : inerzia torsionale

q : fattore di torsione

$$J_t = \frac{J_G}{q} \le J_G$$

$$q = \frac{J_G}{J_t} \ge 1$$

proprietà geometrica della sez. trasversale

erizzi@unibg.it