VERIFICA DI RESISTENZA (elastica)

erizzi@unibg.it

- Il comportamento del materiale non può essere illimitatamente elastico: oltre un certo livello di sforzo e deformazione il materiale cessa di comportarsi elasticamente.
- Si assume qui che l'uscita dal campo elastico coincida con la perdita di resistenza del materiale (rottura). In altre parole si assume coincidente il primo snervamento con la rottura (resistenza elastica).
- Occorre quindi verificare che lo stato tenso-deformativo presente all'interno di un solido sia realmente sopportabile dal materiale di cui esso è composto.
- Significato di verifica di resistenza: si confronta un parametro rappresentativo indice del pericolo o di crisi col valore di tale parametro corrispondente alla resistenza del materiale:

$$\boxed{G.I.P. \leq R}$$

G.I.P.: grandezza indice del pericolo (deve tradurre in un parametro scalare la tridimensionalità dello stato tenso-deformativo)

R: resistenza del materiale

$$\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon) \leq \sigma_0 = \frac{\sigma_R}{f} \simeq \frac{\sigma_Y}{f}$$

σ_{eq}: tensione equivalente

σ_0: tensione ammissibile

σ_R: tensione di rottura

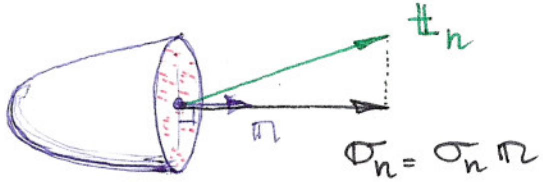
σ_Y: tensione di snervamento

f: fattore di sicurezza (2÷5)

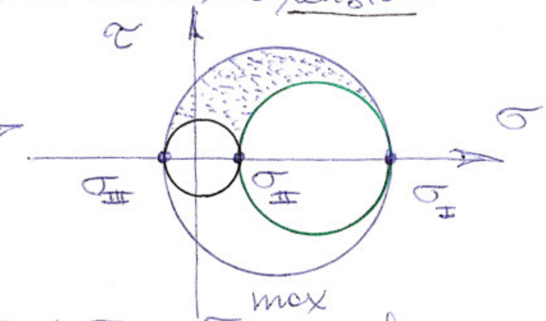
- Spesso si opera nel dominio degli sforzi ove la G.I.P. assume il significato di tensione equivalente (secondo un dato criterio che viene adottato). Essa si confronta con la tensione ammissibile del materiale. ⇝ Criteri di resistenza

1) Criterio di Galileo-Rankine-Navier

- Assume come G.I.P. lo sforzo normale massimo. Sappiamo che, al variare di n, lo sforzo normale assumerà un valore max e un valore min, rappresentati da due delle tre tensioni principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$:



Vedi Arbelo di Mohr



significato fisico del criterio

$$-\sigma_C \leq \sigma_n^{min} \quad ; \quad \sigma_n^{max} \leq \sigma_T$$

σ_C: resistenza a compressione

σ_T: resistenza a trazione

- Poiché $\sigma_n^{min} = \sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I = \sigma_n^{max}$, la verifica di resistenza può essere espressa dalle 6 disuguaglianze:

$$\begin{cases} -\sigma_C \leq \sigma_I \leq \sigma_T \\ -\sigma_C \leq \sigma_{II} \leq \sigma_T \\ -\sigma_C \leq \sigma_{III} \leq \sigma_T \end{cases}$$

2D

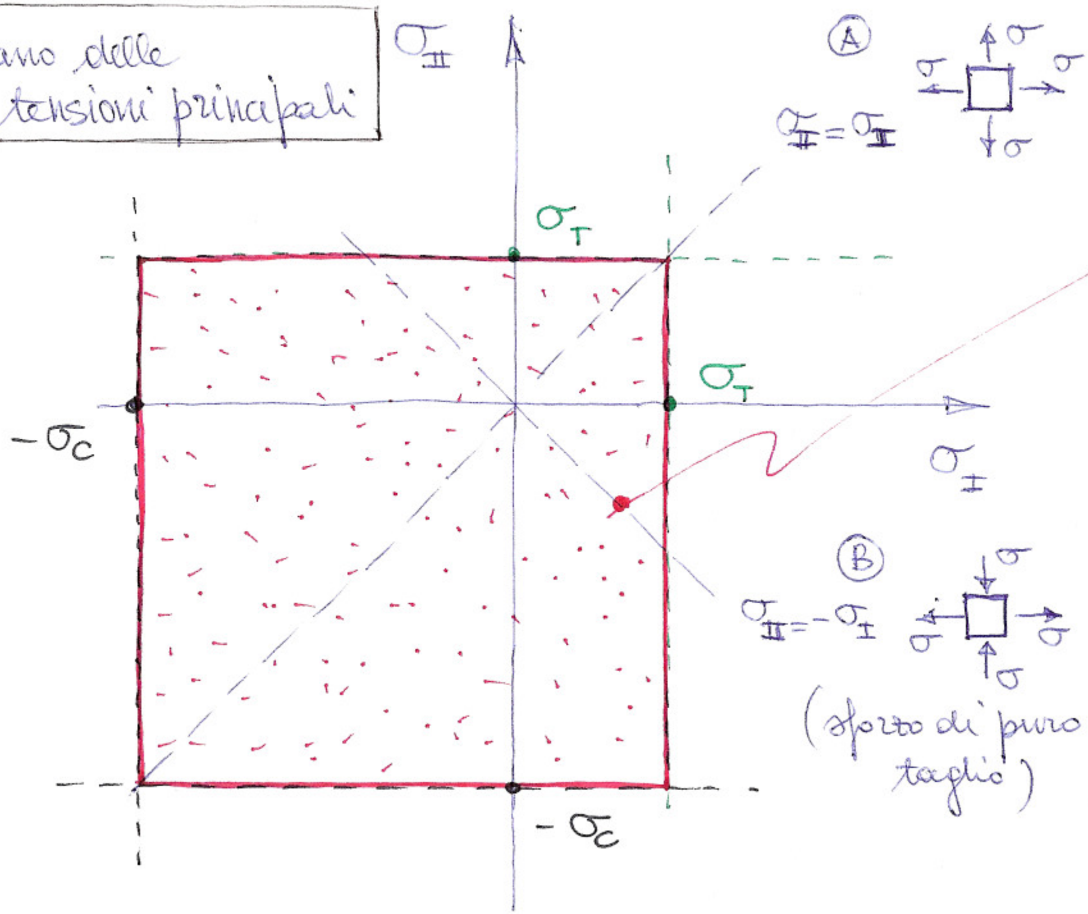
Nel caso piano (ad es. $\sigma_{III} = 0$)

$$\begin{cases} -\sigma_C \leq \sigma_I \leq \sigma_T \\ -\sigma_C \leq \sigma_{II} \leq \sigma_T \end{cases}$$

4 disuguaglianze che possono essere agevolmente rappresentate nel piano delle tensioni principali.

- Il criterio può essere utilizzato per materiali a comportamento non simmetrico a trazione e compressione e, in linea di principio, anche per materiali a comp. simmetrico ($\sigma_T = \sigma_C = \sigma_0$).

Piano delle tensioni principali



dominio di resistenza di G.-R.-N.
(sono i p.ti interni al quadrato di lati $\sigma_T + \sigma_c$):

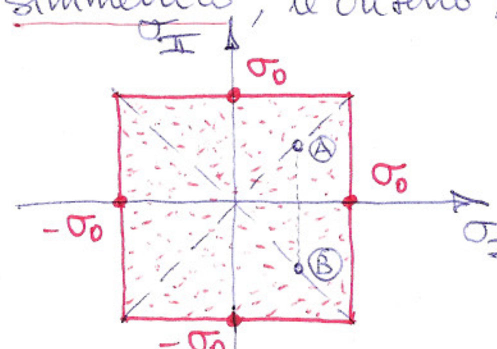
- Un p.to che rappresenta uno stato di sforzo ritenuto ammissibile per il materiale risulta $\in$ al dominio (cioè interno al quadrato)

- Evidenza sperimentale: lo stato di sforzo di tipo Ⓑ risulta più impegnativo per il materiale dello sforzo di tipo Ⓐ.

- Se il comportamento del materiale è non simmetrico, il differente livello di pericolosità degli stati Ⓐ e Ⓑ viene in parte rappresentato (G.R.N. adatto per materiali lapidei, quale il CLS per stati di prevalente trazione)

- Per materiali a comp. simmetrico, il criterio non coglie il diverso livello di pericolosità degli stati Ⓐ e Ⓑ:

quadrato centrato sulla origine



È quindi poco adatto a rappresentare la verifica di resistenza per stati con $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \le 0$ (II e IV quadrante).
ad esempio stati di sforzo alle DSV

2) Criterio di de Saint Venant - Grashof.

- E' duale al precedente: assume come G.I.P. la deformazione normale massima:

$$-\varepsilon_c \le \varepsilon_n \le \varepsilon_T \Rightarrow -\varepsilon_c \le \varepsilon_i \le \varepsilon_T \qquad i = I, II, III$$

- Il criterio può essere subito espresso nello spazio degli sforzi tramite la legge di Hooke generalizzata:
(per materiale isotropo)

$$-\frac{\sigma_c}{\cancel{E}} \le \frac{\sigma_i}{\cancel{E}} - \frac{\nu}{\cancel{E}}(\sigma_j + \sigma_k) \le \frac{\sigma_T}{\cancel{E}} \qquad i, j, k = 1,2,3$$

6 disuguaglianze

(il criterio dipende dal parametro elastico ν, coeff. di Poisson)

[per $\nu = 0$ si riottiene il criterio di G.R.N.]

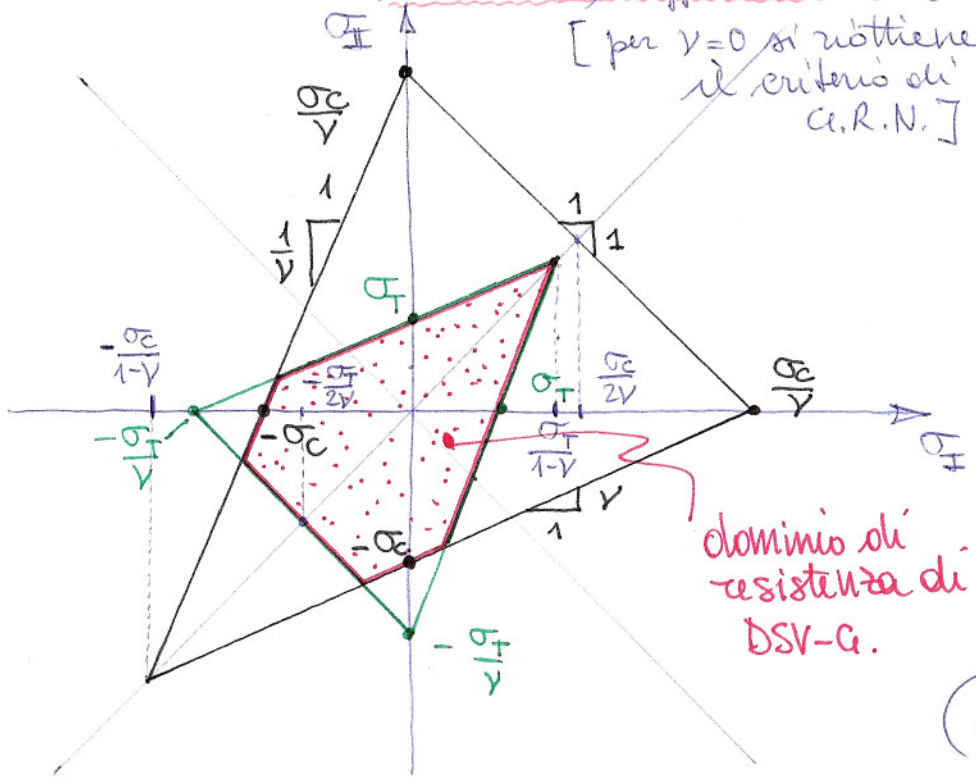
- Nel caso piano (ad es. $\sigma_{III} = 0$) si ottengono le 6 disuguaglianze:

$$-\sigma_c \le \sigma_I - \nu\,\sigma_{II} \le \sigma_T$$

$$-\sigma_c \le \sigma_{II} - \nu\,\sigma_I \le \sigma_T$$

$$-\sigma_c \le -\nu(\sigma_I + \sigma_{II}) \le \sigma_T$$

che configurano un dominio di resistenza ottenuto dall'intersezione di due triangoli isosceli

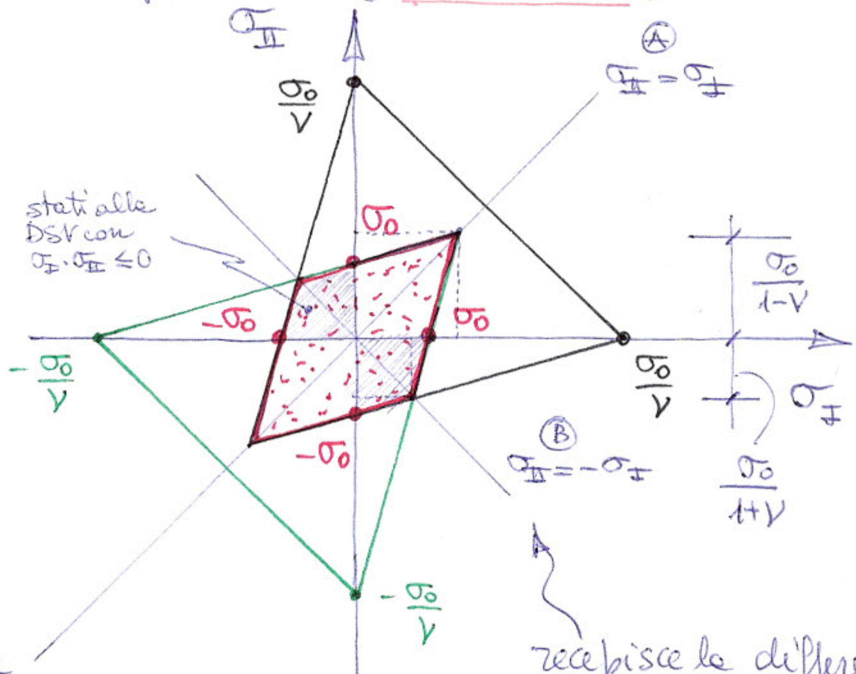


- la forma del dominio è rombica se:

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_C}{\sigma_T} \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

- Per materiali a comp. simmetrico a trazione e compressione ($\sigma_T = \sigma_C = \sigma_0$):

$$\begin{cases} \text{forma rombica se} \quad \nu \leq \frac{1}{3} & \text{(es. acciaio)} \\ \text{forma esagonale se} \quad \nu > \frac{1}{3} \end{cases}$$

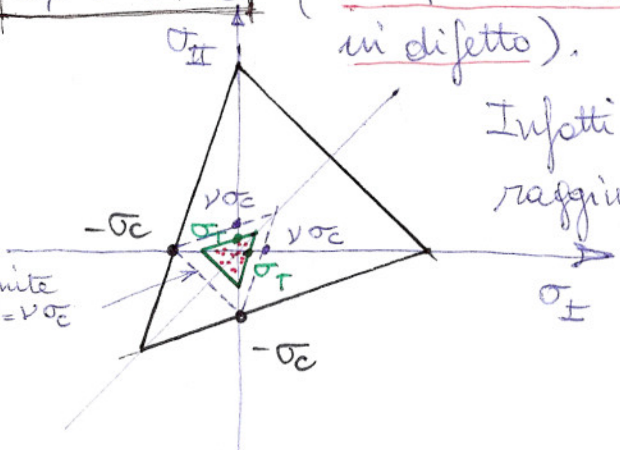


- È adatto per materiali a comp. simmetrico sottoposti a stati di sforzo alle DSV (con $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$).

recepisce le differente pericolosità degli stati di sforzo Ⓐ e Ⓑ

- Può essere usato anche per materiali a comp. non simmetrico purchè

$\boxed{\sigma_T > \nu\, \sigma_C}$ (se $\sigma_T < \nu \sigma_C$ il criterio cade in difetto).



caso limite con $\sigma_T = \nu \sigma_C$

Infatti in tal caso non sarebbe possibile raggiungere la resistenza a compressione del materiale

3) Criterio di Beltrami (per materiali a comp. simmetrico a trazione-compressione).

- Ha significato energetico in quanto la C.L.P. è assunta pari all'energia elastica di deformazione:

$$\omega = \frac{1}{2}\,\sigma : \varepsilon \le \omega_0$$

valore ammissibile dell'energia elastica di deformazione (corrispondente al limite di snervamento)

- Ancora, grazie alla legge di Hooke generalizzata, il criterio può essere prontamente riscritto nello spazio degli sforzi:

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma}$$

Legge costitutiva elastica, lineare, isotropa

Riferendosi alle direz. principali di sforzo:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

$$\omega = \frac{1}{2}\,\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}\left(-\frac{\nu}{E}(\mathrm{tr}\,\sigma)^2 + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma : \sigma\right)$$

ove

$$\begin{cases} (\mathrm{tr}\,\sigma)^2 = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 = \\ \qquad = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2\sigma_I\sigma_{II} + 2\sigma_{II}\sigma_{III} + 2\sigma_{III}\sigma_I \\ \sigma : \sigma = \sigma_{ij}\,\sigma_{ij} = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 \end{cases}$$

Si ottiene:

prova monoassiale con $\sigma_I = \sigma_0$, $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

$$\omega = \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{E}\left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu\left(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I\right)\right) \le \omega_0 = \frac{\sigma_0^2}{\cancel{2}E}$$

energia di deformaz. nel caso monoassiale (a limite elastico)

che conduce a:

tensione equivalente di Beltrami

$$\sigma_{eq}^B = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu\left(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I\right)} \le \sigma_0$$

- Si noti che il criterio, avendo significato energetico, è valido solo per materiali a comportamento simmetrico (in quanto σ_{eq}^{B} è indip. dal segno dello stato di sforzo).
- Il criterio dipende, come quello di DSV-Grashof, da un parametro elastico, il coefficiente di contrazione trasversale di Poisson ν

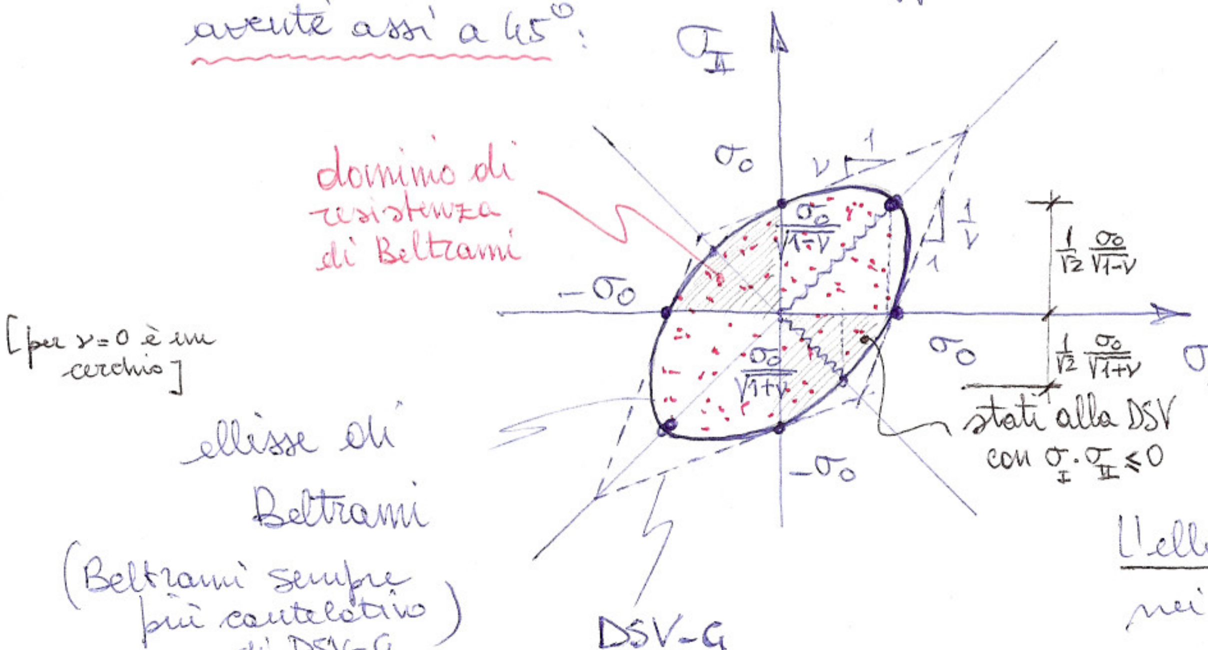
$$\boxed{-1 < \boxed{0 \leq \nu < \frac{1}{2}}}$$

Def. Pos. di ω — materiali ingegneristici

- Nel caso piano si ottiene: (es. $\sigma_{III} = 0$)

$$\sigma_{eq}^{B} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\,\sigma_I\,\sigma_{II}} \leq \sigma_0$$

- Il dominio di resistenza è rappresentato dall'area interna ad una ellisse avente assi a 45°:



- limite per $\sigma_{II} = \sigma_I = \sigma$

$$\sigma^2 + \sigma^2 - 2\nu\sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$2(1-\nu)\sigma^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{1-\nu}} < \sigma_0$$

(essendo $\nu < \frac{1}{2}$)

- limite per $\sigma_{II} = -\sigma_I = \sigma$ — sforzo di taglio puro

$$\sigma^2 + \sigma^2 + 2\nu\sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$2(1+\nu)\sigma^2 = \sigma_0^2 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{1+\nu}}$$

L'ellisse è tangente al rombo di DSV (per $\nu \leq \frac{1}{3}$) nei punti $\sigma_I = \pm\sigma_0$, $\sigma_{II} = 0$; $\sigma_{II} = \pm\sigma_0$, $\sigma_I = 0$ (inscritta nel rombo)

- Adatto per stati piani alla DSV in materiali a comp. simmetrico. Non adatto per materiali duttili (metallici) sottoposti a sforzi idrostatici.

4) Criterio di Hüber - Henky - von Mises

- Adatto per materiali duttili (metallici) a comportamento simmetrico a trazione / compressione. Ha, come quello di Beltrami, significato energetico.
- Si fonda sull'osservazione sperimentale seguente: i materiali metallici si plasticizzano per effetto di sforzi deviatorici; la componente idrostatica di sforzo non influisce sul comportamento post-elastico del materiale. } plasticità deviatorica
- Il criterio assume come G.I.P. la sola porzione deviatorica dell'energia di deformazione elastica:

$$W = \frac{1}{2}(\sigma : \varepsilon) = \frac{1}{2}(\sigma_V + \sigma_D) : (\varepsilon_V + \varepsilon_D) =$$
$$= \frac{1}{2}\sigma_V : \varepsilon_V + \frac{1}{2}\sigma_D : \varepsilon_D = \omega_V + \omega_D$$

$\omega_V = \frac{1}{2} p v$ energia elastica volumetrica

$\omega_D = \frac{1}{2} s : e$ energia elastica deviatorica

significato fisico del criterio di vM: $\boxed{\omega_D \leq \omega_D^0}$

Si confronta l'energia di deformazione elastica deviatorica col valore di riferimento corrispondente, a limite elastico, alla prova di trazione monoassiale.

- Anche il criterio di H.-H.-vM. può essere agevolmente espresso in termini di sforzo, considerando la risposta elastica deviatorica $e = \frac{s}{2G}$

$$\omega_D = \frac{1}{2}\, s : \frac{s}{2G} = \frac{3}{3}\frac{J_2}{2G} = \frac{3J_2}{6G} \leq \omega_D^0$$

J_2: invariante secondo del deviatore di sforzo

(J_2: invariante II del deviatore di sforzo $s = \sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3} I$
$J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, s^2 = \frac{1}{2} s : s$)

- Esprimiamo ora J_2 in termini degli sforzi principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ -

Poichè $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \underbrace{\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}}{3}}_{p = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}} \mathbf{I}$, nel riferimento principale:

p = tensione media

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} \sigma_I - p & & \\ & \sigma_{II} - p & \\ & & \sigma_{III} - p \end{bmatrix}$$

componenti del deviatore nel riferimento principale

- Quindi:

$$3J_2 = 3\,\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{s}^2 = \frac{3}{2}\left((\sigma_I - p)^2 + (\sigma_{II} - p)^2 + (\sigma_{III} - p)^2\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 3p^2 - 3 \cdot 2\,p\,\frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \cancel{3}\,\frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{\cancel{9}\,3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\sigma_I^2 + 3\sigma_{II}^2 + 3\sigma_{III}^2 - \sigma_I^2 - \sigma_{II}^2 - \sigma_{III}^2 - 2\sigma_I\sigma_{II} - 2\sigma_{II}\sigma_{III} - 2\sigma_{III}\sigma_I\right)$$

$$= \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I)$$

- Si noti che, nel caso di sforzo monoassiale $(\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0)$ risulta $3J_2 = \sigma_I^2$ e, a limite elastico, $3J_2^0 = \sigma_0^2$

- Quindi:

$$\omega_D = \frac{3J_2}{6\cancel{G}} \leq \omega_D^0 = \frac{3J_2^0}{6G} = \frac{\sigma_0^2}{\cancel{6G}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{3J_2} \leq \sigma_0}$$

- Ciò porta a definire la tensione equivalente di von Mises ai fini della verifica di resistenza secondo questo criterio:

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I)} \leq \sigma_0$$

è definita in modo tale che $\sigma_{eq}^{vM} = \sigma$ in 1D

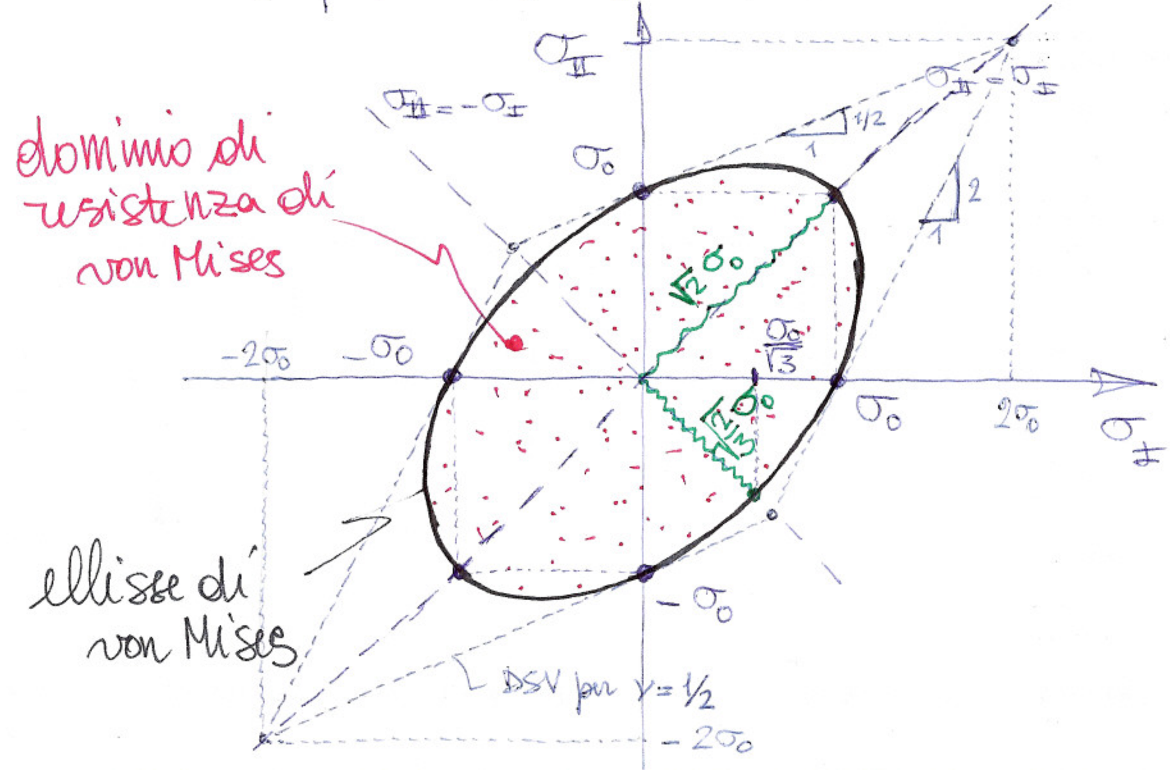
- Si noti che l'espressione del criterio può essere ottenuta a partire da quella di Beltrami per $\nu \to \frac{1}{2}$ – Infatti in tal caso, essendo il materiale elasticamente incomprimibile ($K \to \infty$ per $\nu \to \frac{1}{2}$), l'energia elastica deviatorica coincide con quella totale (per $\nu \to \frac{1}{2}$, $\omega_V = 0$ e $\omega = \omega_D$). [Infatti $\omega_V = \frac{1}{2} p v = \frac{1}{2} \frac{p^2}{K} \to 0$ per $K \to \infty$ $(\nu \to \frac{1}{2})$; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$]

- Peraltro, l'espressione finale del criterio di H.-H.-v.M. risulta indipendente da parametri elastici (in particolare da ν, che risulta comunque pari a $\sim 0{,}3$ per materiali metallici).

- Caso di sforzo piano (es. $\sigma_{III} = 0$):

$$(\sigma_{eq}^{vM})^2 = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II} \leq \sigma_0^2 \longrightarrow \text{ellisse di von Mises}$$

- è caso particolare di Beltrami per $\nu = \frac{1}{2}$
- è inscritto nel rombo di DSV ottenuto per $\nu = \frac{1}{2}$



- Per $\sigma_{II} = \sigma_I = \sigma$

$$\sigma^2 + \cancel{\sigma^2} - \cancel{\sigma^2} \leq \sigma_0^2$$

- Per $\sigma_{II} = -\sigma_I = -\sigma$

$$\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$
$$3\sigma^2 \leq \sigma_0^2$$
$$\sigma^2 \leq \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\right)^2$$

- Secondo von Mises la resistenza a taglio τ_0 vale:

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\underbrace{\sqrt{3}}_{1{,}732}} \simeq 0{,}5773\,\sigma_0$$

5) Criterio di Tresca - Guest

- È analogo di G.R.N. ma considera come grandezza indice di crisi la tensione tangenziale massima:

$$\tau_{max} \le \tau_0$$

(e analogo di D.S.V.-G., considerando la deformaz. tagliante massima).

- Dall'arbelo di Mohr sappiamo che la τ_{max} corrisponde al raggio del cerchio di Mohr più grande. Quindi:

$$\tau_{max} = \max \Big\{ \underbrace{\overset{R_{III}}{\left|\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right|}, \overset{R_I}{\left|\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right|}, \overset{R_{II}}{\left|\frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{2}\right|}}_{\text{raggi dei tre cerchi di Mohr}} \Big\} \le \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 0{,}5\,\sigma_0$$

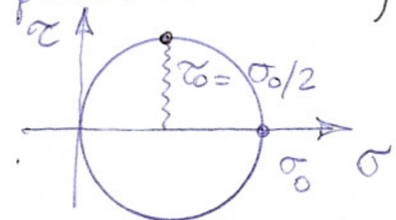
(per parametrizzazione su prova di trazione)

- Il criterio è quindi rappresentato dalle 6 disuguaglianze:

Dominio di resistenza di TRESCA-G.

$$\boxed{\begin{aligned} -\sigma_0 &\le \sigma_I - \sigma_{II} \le \sigma_0 \\ -\sigma_0 &\le \sigma_{II} - \sigma_{III} \le \sigma_0 \\ -\sigma_0 &\le \sigma_{III} - \sigma_I \le \sigma_0 \end{aligned}}$$

CM a limite elastico (rottura).



(Se lo snervamento a trazione si produce a σ_0, ciò corrisponde a $\tau_0 = \sigma_0/2$).

[la resistenza a taglio secondo Tresca è inferiore a quella secondo von Mises:

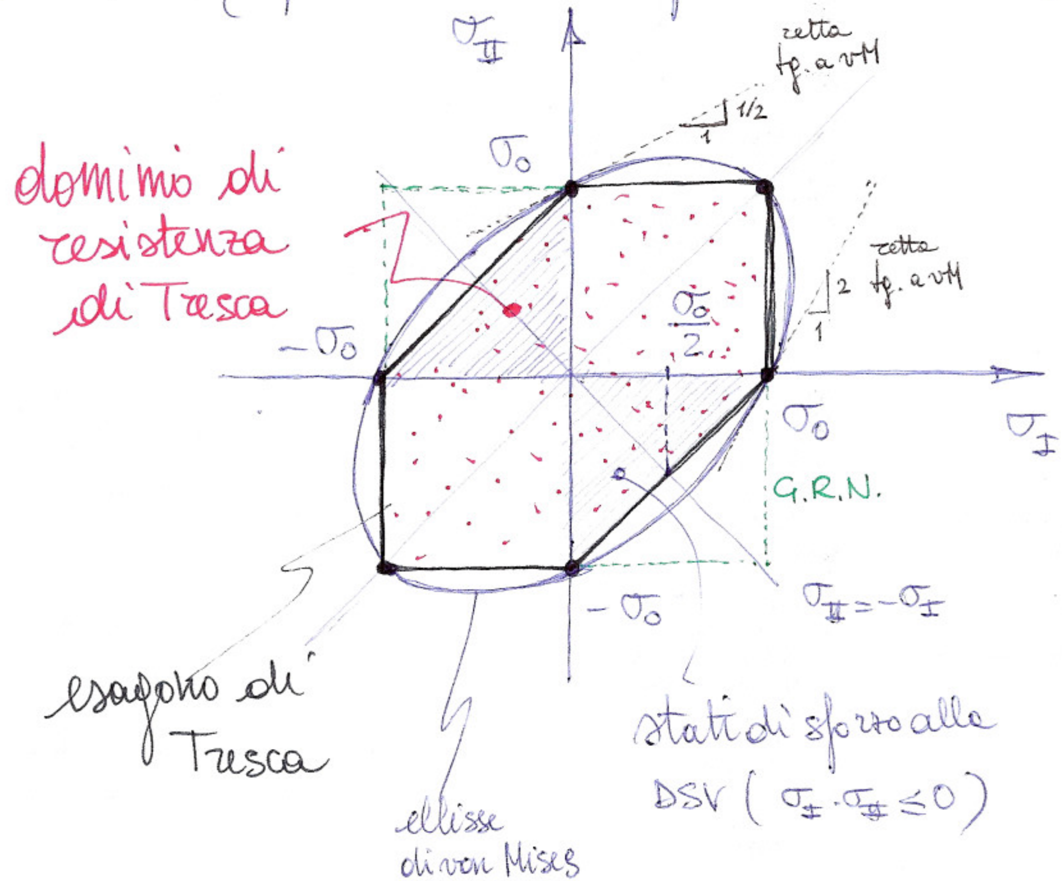
$\tau_0^T = 0{,}5\,\sigma_0 < 0{,}577\,\sigma_0 = \tau_0^{vM}$]

- Nel caso piano ($\sigma_{III} = 0$):

$$-\sigma_0 \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq \sigma_0$$

$$\left.\begin{array}{l} -\sigma_0 \leq \sigma_I \leq \sigma_0 \\ -\sigma_0 \leq \sigma_{II} \leq \sigma_0 \end{array}\right\} \text{ sono le stesse di G.R.N.}$$

- Ciò configura un dominio di resistenza esagonale, inscritto in quello di von Mises (quindi Tresca è più cautelativo di von Mises):



← è come il dominio di G.-R.-N. "sfettatato" a 45° nel II e IV quadrante

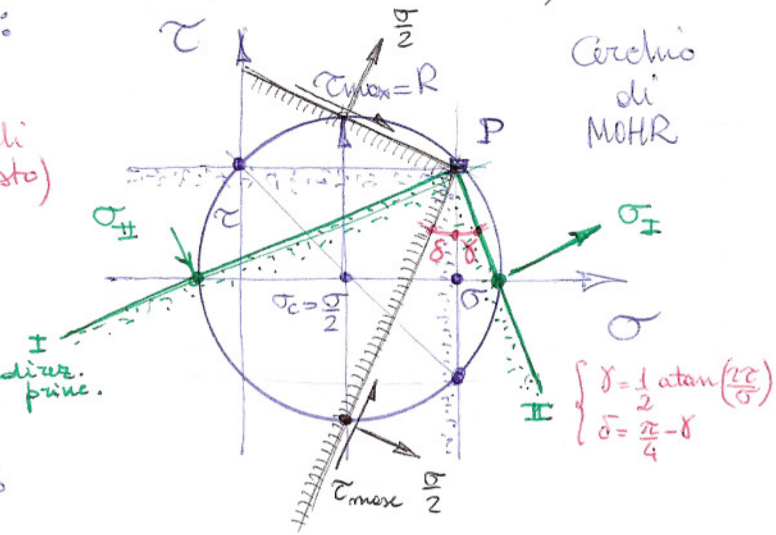
- **Formule di verifica per stati di sforzo alla DSV:**

(è un particolare stato di sforzo piano (ha una tensione normale nulla))

elementino con stato di sforzo alla DSV (σ, τ)

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R \quad \text{(tensioni principali di segno opposto)}$$

con $\begin{cases} \sigma_c = \dfrac{\sigma}{2} \\ R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$



- Criterio di Tresca:

$$\sigma_{eq}^{T} = 2R = |\sigma_I - \sigma_{II}| = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_0$$

Infatti $\sigma_I - \sigma_{II} = (\cancel{\sigma_c} + R) - (\cancel{\sigma_c} - R) = 2R = 2\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

- Criterio di von Mises:

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_0$$

Infatti $\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II} = \sigma_c^2 + R^2 + \cancel{2\sigma_c R} + \cancel{\sigma_c^2} + R^2 - \cancel{2\sigma_c R} - \cancel{\sigma_c^2} + R^2$

$$= \sigma_c^2 + 3R^2$$

$$= \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 3\tau^2 = \cancel{4}\frac{\sigma^2}{\cancel{4}} + 3\tau^2$$

- Criterio di DSV:

$$\sigma_{eq}^{DSV} = \max\begin{Bmatrix} |\sigma_I - \nu\sigma_{II}| \\ |\sigma_{II} - \nu\sigma_I| \end{Bmatrix} \leq \sigma_0$$

dipende da ν: coeff. di Poisson

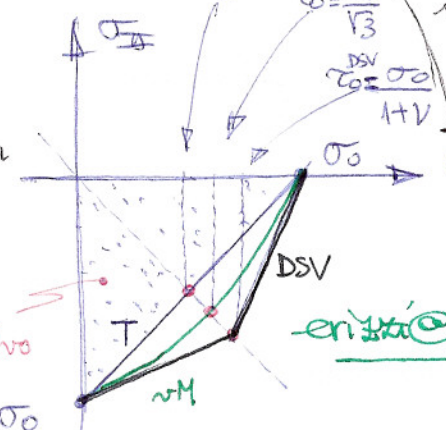
$$\nu = \frac{E}{2G} - 1$$

- Risulta sempre $\sigma_{eq}^{DSV} \leq \sigma_{eq}^{vM} \leq \sigma_{eq}^{T}$

$-$ cautelativo $+$ cautelativo

Resistenze a taglio secondo i tre criteri

$\tau_0^{T} = \dfrac{\sigma_0}{2}$ $\tau_0^{vM} = \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ $\tau_0^{DSV} = \dfrac{\sigma_0}{1+\nu}$



Tresca è evidentemente il più restrittivo

eri...@unibo.it