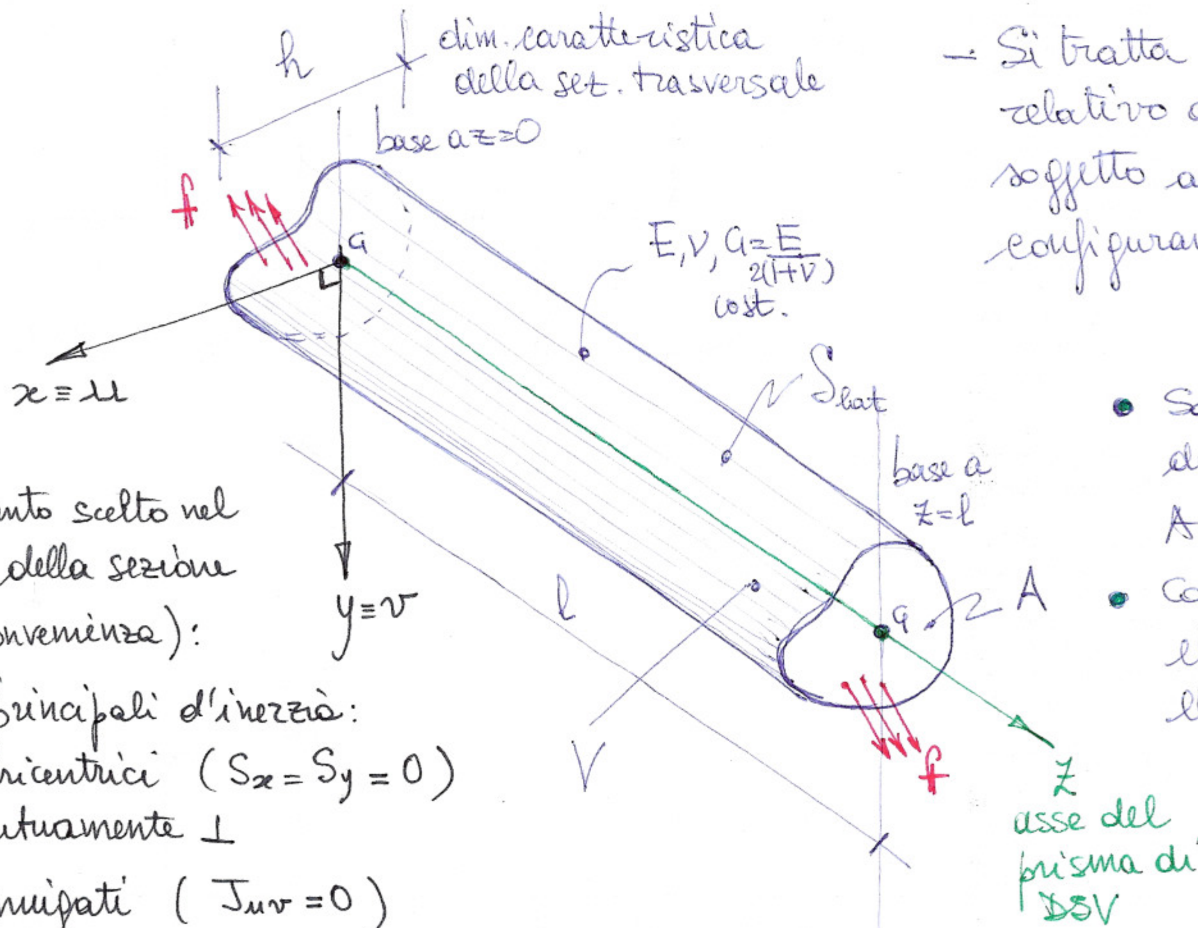
rizzi@unibg.it

Il problema di de Saint Venant



Riferimento scelto nel piano della sezione (per convenienza):
assi principali d'inerzia:
- baricentrici ($S_x = S_y = 0$)
- mutuamente ⊥
- coniugati ($J_{uv} = 0$)

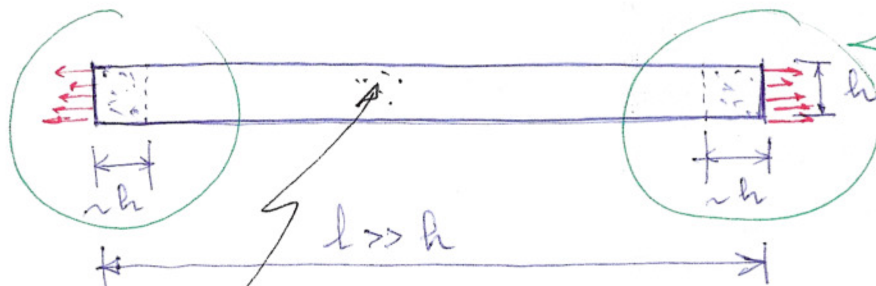
- Si tratta di un problema elastico particolare relativo ad un solido cilindrico, allungato, soggetto a particolari azioni esterne (che configurano i differenti casi di DSV).

Ipotesi e definizioni:

- Solido cilindrico ad asse rettilineo, di forma allungata ($l \gg h$) e sezione A costante
- Composto da materiale omogeneo, elastico lineare isotropo di parametri elastici E, ν, G noti, costanti.
- Privo di vincoli (la soluzione sarà quindi nota a meno di moti rigidi).
- Privo di forze di volume ($\mathbb{F} = 0$ in V) e di forze di superficie sulla superficie laterale ($\mathbb{f} = 0$ su S_{lat})
- È soggetto a sole forze di superficie agenti sulle basi del prisma, note solo in termini di risultanti (la loro distribuzione non è assegnata) e tali da formare un sistema di forze autoequilibrato.

N.B. (Postulato di de Saint Venant):

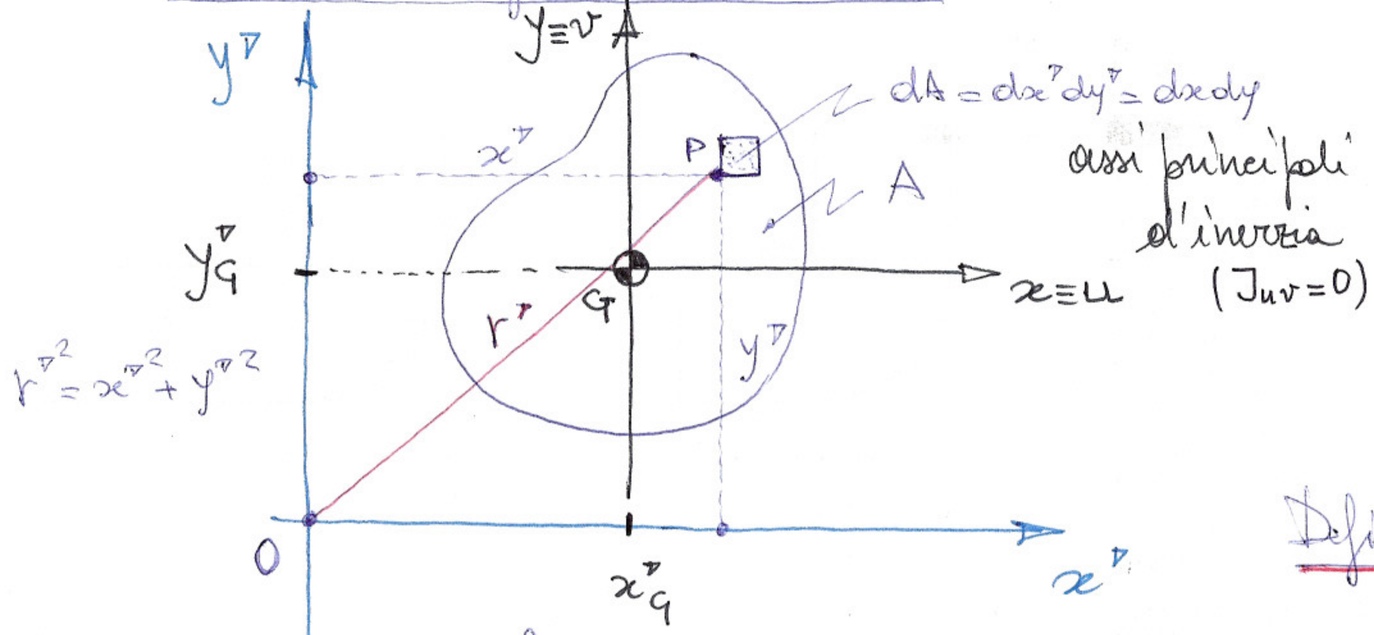
- La reale distribuzione delle forze di superficie sulle basi del prisma è ininfluente ai fini della soluzione (a parità di risultanti). In altre parole, si può sempre ipotizzare che le forze di superficie siano distribuite secondo la stessa distribuzione di sforzo prevista dalla soluzione del pb. di DSV.
- Eventuali distribuzioni a risultanti nulle in eccesso rispetto a tale distribuzione saranno responsabili solo di limitate variazioni dello stato tenso-deformativo in prossimità delle basi del prisma (effetti di bordo).



Zone di alterazione dello stato di sforzo e deformazione di estensione pari circa alla dimensione caratteristica della sezione trasversale, quindi limitate rispetto all'intero sviluppo del prisma.

nei punti interni la soluzione non è influenzata dalla reale distribuzione delle forze sulle basi a parità di risultanti.

Richiami di geometria delle aree



Trasformazione di coordinate tra assi baricentrici e non:

$$\begin{cases} x^{\nabla} = x^{\nabla}_G + x \\ y^{\nabla} = y^{\nabla}_G + y \end{cases}$$

Definizioni:

- $A = \int_A dA$ — Area della sez. trasversale >0 (momento d'ordine 0)
- $S_{x^{\nabla}} = \int_A y^{\nabla} dA \;;\; S_{y^{\nabla}} = \int_A x^{\nabla} dA$ — Momenti statici della sez. rispetto all'asse x^{∇} e y^{∇} $\gtrless 0$ (momenti d'ordine 1)
- $J_{x^{\nabla}} = \int_A y^{\nabla 2} dA \;;\; J_{y^{\nabla}} = \int_A x^{\nabla 2} dA$ — Momenti d'inerzia della sez. rispetto all'asse x^{∇} e y^{∇} >0
- $J_{x^{\nabla}y^{\nabla}} = \int_A x^{\nabla} y^{\nabla} dA$ — Momento d'inerzia centrifugo rispetto agli assi x^{∇}, y^{∇} $\gtrless 0$ (momenti d'ordine 2)
- $J_O = \int_A r^{\nabla 2} dA = \int_A (x^{\nabla 2} + y^{\nabla 2})\, dA = J_{x^{\nabla}} + J_{y^{\nabla}}$ — Momento d'inerzia polare rispetto ad O >0

Posizione del baricentro G: $x_G^{\nabla} = \dfrac{S_{y^{\nabla}}}{A} \;;\; y_G^{\nabla} = \dfrac{S_{x^{\nabla}}}{A}$ (è il p.to in cui si può immaginare di concentrare l'area A al fine di calcolare i momenti statici $S_{x^{\nabla}}$ e $S_{y^{\nabla}}$)

Teorema di trasposizione (variazione dei momenti d'inerzia per assi traslati, baricentrici e non)

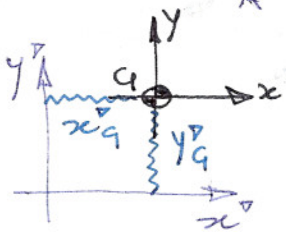
o di Huygens-Steiner

$$J_{x^\triangledown y^\triangledown} = \int_A x^\triangledown y^\triangledown \, dA = \int_A (x + x_G^\triangledown)(y + y_G^\triangledown)\, dA =$$

in quanto assi baricentrici

$S_x = 0$ $S_y = 0$

$$\begin{cases} x' = x + x_G^\triangledown \\ y' = y + y_G^\triangledown \end{cases}$$



$$= \int_A xy\, dA + x_G^\triangledown y_G^\triangledown \int_A dA + x_G^\triangledown \cancel{\int_A y\, dA} + y_G^\triangledown \cancel{\int_A x\, dA}$$

$$= J_{xy} + A\, x_G^\triangledown y_G^\triangledown$$

Analogamente: $\begin{cases} J_{x^\triangledown} = J_x + A\, {y_G^\triangledown}^2 \\ J_{y^\triangledown} = J_y + A\, {x_G^\triangledown}^2 \end{cases}$ $\left(\text{oppure} \quad \begin{aligned} J_x &= J_{x^\triangledown} - A\, {y_G^\triangledown}^2 \\ J_y &= J_{y^\triangledown} - A\, {x_G^\triangledown}^2 \end{aligned} \right)$

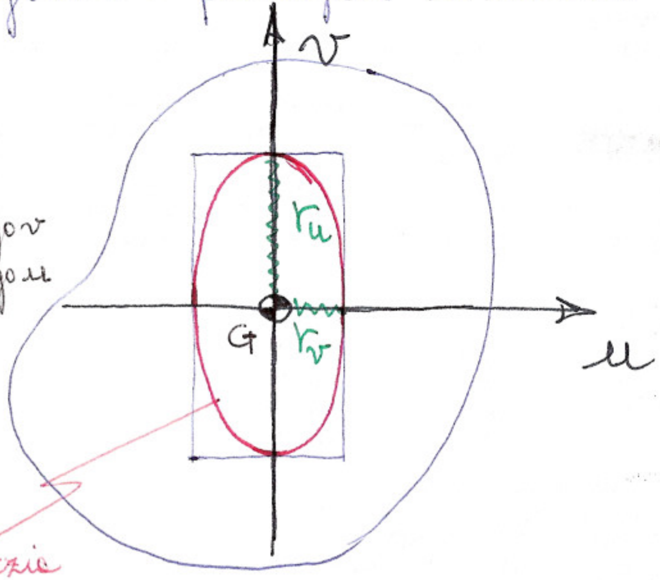
- Due assi x, y si dicono coniugati se $J_{xy} = 0$
- Due assi x, y si dicono principali d'inerzia $(x = u,\ y = v)$ se:

$$\begin{cases} - \text{ sono baricentrici} \Rightarrow S_u = S_v = 0 \\ - \text{ mutuamente } \perp \\ - \text{ coniugati} \Rightarrow J_{uv} = 0 \end{cases}$$

- I momenti d'inerzia ad essi corrispondenti J_u, J_v sono il max e il min. momento d'inerzia al variare di tutte le giaciture nel piano.

- Raggi giratori principali d'inerzia: $r_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}}$; $r_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}}$

N.B.:
- r_u disteso lungo v
- r_v disteso lungo u



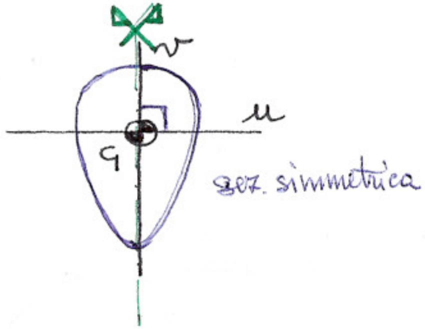
Utili a rappresentare l'ellisse principale d'inerzia della sezione:

$$\left(\frac{u}{r_v}\right)^2 + \left(\frac{v}{r_u}\right)^2 = 1$$

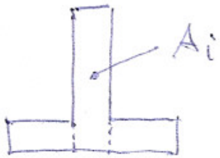
(r_u disteso lungo l'asse v
r_v " " " u)

[Rappresenta come è distribuita l'inerzia della sez.]

- N.B.: Se $\exists$ un asse di simmetria retta possiamo dire che:
  - G $\in$ a tale asse
  - tale asse è principale d'inerzia (il viceversa è falso)
  - l'asse baricentrico ad esso $\perp$ è l'altro asse principale.

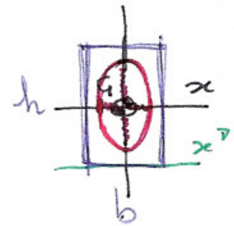


- Per sezioni composte da figure elementari (es. rettangoli)



$$\int_A (\quad)\, dA = \underbrace{\sum_i}_{\text{sommatoria di contributi discreti}} \underbrace{\int_{A_i} (\quad)\, dA_i}_{\text{integrali noti}}$$

Es.: sez. rettangolare



$A = bh$

$J_x = \frac{1}{12} bh^3$

$J_{x'} = \frac{1}{3} bh^3$

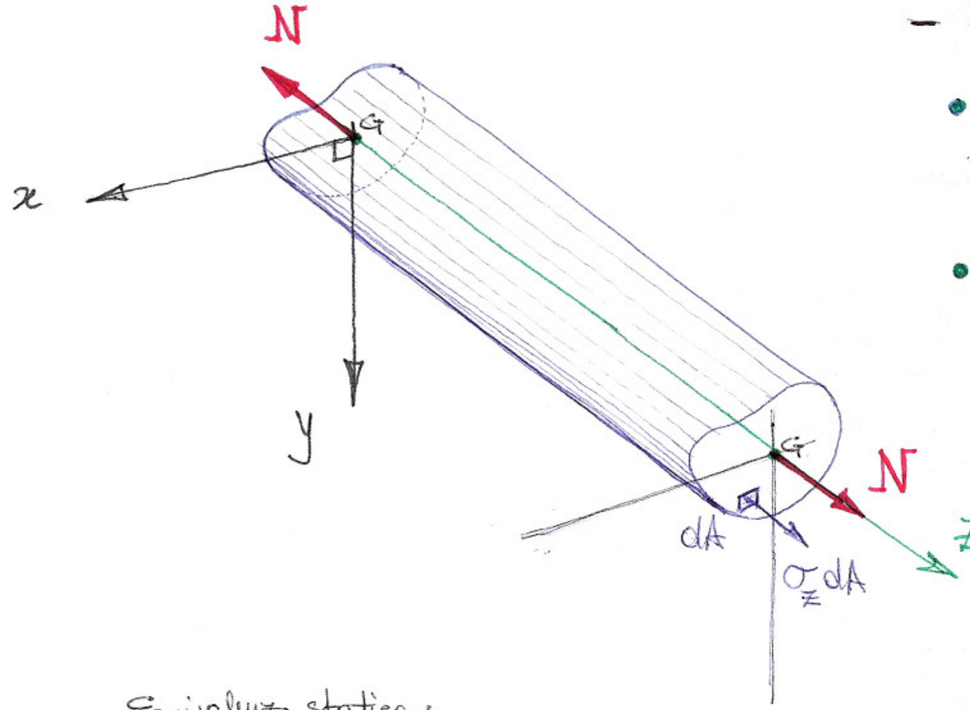
$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{h}{2} = 0{,}577\frac{h}{2}$

$r_y = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b}{2}$

CASI DI DE SAINT VENANT

1) Azione assiale N

- le forze di superficie sulle basi del prisma sono equivalenti ad una azione assiale N centrata in G.



- Si opera con un approccio seminverso agli sforzi:
  - Hp. sul campo di sforzo:

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{salvo} \quad \sigma_{zz} = K = \text{cost}$$

  - Si verifica che, a seguito di tale ipotesi, tutte le equazioni governanti risultano verificate (equilibrio, congruenza, legame costitutivo).
    L'ipotesi corrisponde quindi alla reale soluzione del pb. elastico in esame.
    - Resta da determinare la costante K e lo si può fare imponendo la condizione di equivalenza statica tra la distribuzione di sforzo normale e la risultante N:

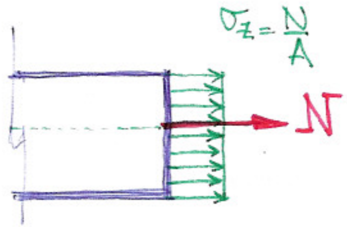
Equivalenza statica:

$$\int_A \sigma_{zz}\, dA = N$$

$$K \int_A dA = N$$

$$K\, A = N \Rightarrow K = \frac{N}{A}$$

Quindi $\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A}}$



sforzo normale uniforme sulla sezione

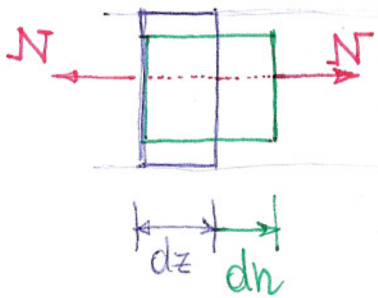
- Campo di deformazione :

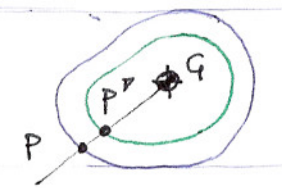
Si può ottenere mediante il legame costitutivo :

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{N}{EA} \\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\dfrac{\nu N}{EA} \end{cases}$$

mentre $\gamma_{ij} = 0$ (scorrimenti angolari nulli)

Deformazione del concio di trave + Contrazione omotetica della sezione trasversale





Deformazione nel piano della sezione.

$$\varepsilon_{PG} = \frac{\overline{P'G} - \overline{PG}}{\overline{PG}} = -\frac{\nu N}{EA}$$

$$dn = \varepsilon_z dz = \frac{N dz}{EA}$$

Allungamento totale del prisma : (di lunghezza l)

$$\Delta l = \int_0^l dn = \int_0^l \frac{N dz}{EA} = \boxed{\frac{N l}{EA} = \Delta l}$$

con EA : rigidezza assiale $[EA] = [F]$

La soluzione in termini di spostamento è nota a meno di moti rigidi (possibili in quanto il prisma di DSV è privo di vincoli) .

orizzi@unibg.it