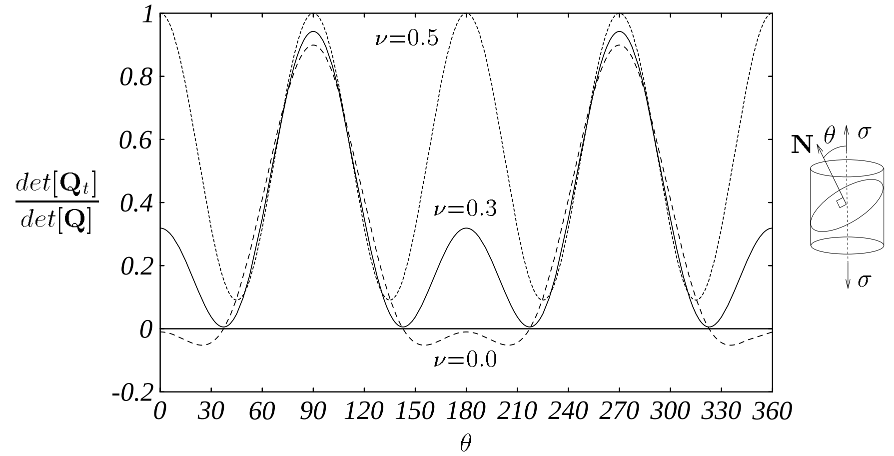
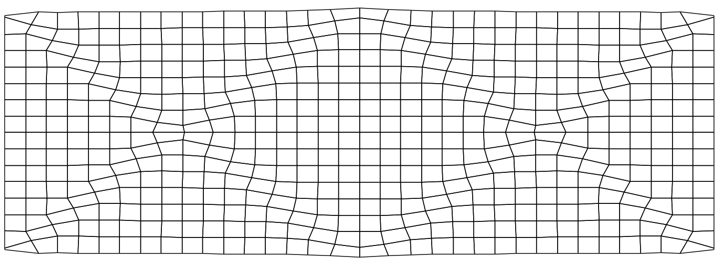
SULLA LOCALIZZAZIONE DELLE DEFORMAZIONI IN MATERIALI E STRUTTURE

Egidio Rizzi SULLA LOCALIZZAZIONE DELLE DEFORMAZIONI IN MATERIALI E STRUTTURE





Egidio Rizzi

SULLA LOCALIZZAZIONE DELLE DEFORMAZIONI IN MATERIALI E STRUTTURE

Egidio Rizzi

Tesi di Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture

Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano

VI Ciclo – Febbraio 1995

SOMMARIO

Egidio Rizzi, *"Sulla localizzazione delle deformazioni in materiali e strutture"*.
Tesi di Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture (VI Ciclo – Febbraio 1995).
Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano.
Relatori: Prof. Giulio Maier, Prof. Kaspar Willam. Controrelatore: Prof. Luigi Cedolin.

Nella tesi si esaminano i fenomeni di localizzazione dei processi dissipativi in materiali e strutture a comportamento non lineare. Il termine localizzazione si riferisce al fatto che la quasi totalità della dissipazione energetica si concentra in una zona limitata dell'intera struttura con elevati gradienti di spostamento. Le deformazioni anelastiche sono quindi concentrate in una *"banda"* di dimensione caratteristica finita. Questi fenomeni possono condurre alla frattura del materiale, che si manifesta con discontinuità *"forti"* di spostamento. Anche se la localizzazione è un fenomeno prettamente strutturale, la *"teoria della localizzazione delle deformazioni"* considera la possibile insorgenza di discontinuità *"deboli"* delle deformazioni incrementali attraverso una superficie che divide il continuo, trascurando gli effetti delle condizioni al contorno. L'analisi viene condotta al livello costitutivo una volta assegnato il modello in termini incrementali e fornisce i valori critici dei parametri di incrudimento per i quali si innesca il fenomeno, nonché le direzioni ed il modo di localizzazione.

All'insorgere della localizzazione intesa come biforcazione incrementale, il problema al contorno perde la sua *"buona posizione"* (in senso matematico) ed un'analisi strutturale con numero finito di gradi di libertà necessita di opportune *"tecniche di regolarizzazione"*. La dissipazione energetica tende a valori nulli all'infittirsi della discretizzazione in quanto la localizzazione si manifesta in una zona di volume al limite nullo. Per garantire una dissipazione finita indipendente dal modello strutturale occorre migliorare la formulazione costitutiva introducendo modelli non locali ed adottare una modellazione strutturale per elementi finiti che evitino dipendenza dalle lunghezze e dalle direzioni tipiche del reticolo. L'approccio *"discreto"* della meccanica della frattura non risente di questi inconvenienti in quanto la dissipazione energetica è espressa direttamente in funzione dell'apertura di cricca e l'energia di frattura per unità di superficie è fissata indipendentemente dal numero di elementi adottati.

La tesi si articola concettualmente nelle due parti seguenti:

(a) Inquadramento della teoria classica della localizzazione per materiali elastoplastici. Sviluppo di una teoria costitutiva per modelli di materiali con *"degradazione della rigidezza elastica"* (inclusi come caso speciale i *"modelli al danneggiamento"*) e per *"materiali multidissipativi"* (contenenti il caso di *"plasticità combinata a degradazione di rigidezza elastica"*). Estensione delle analisi di localizzazione al caso di modelli costitutivi per materiali con perdita di rigidezza, modelli di danno scalare e modelli anelastici a multipotenziale mediante soluzione del problema agli autovalori del tensore di localizzazione ottenuto con *"modifiche di rango uno"* multiple del tensore acustico elastico.

(b) Discussione delle tecniche di regolarizzazione della risposta strutturale al livello costitutivo e di modellazione spaziale (per elementi finiti). Implementazione di una tecnica di regolarizzazione basata sul concetto di *"energia di frattura"* per un modello di *"danno locale scalare"* abbinata all'utilizzo di elementi finiti quadrangolari con *"modi incompatibili"*. Implementazione di una strategia di controllo misto carico/spostamento (*'arc-length'*) atta a seguire le risposte strutturali instabili con *'snap-back'* pronunciato in un test numerico di estensione assiale in deformazioni piane.

SUMMARY

Egidio Rizzi, *"On strain localization in materials and structures"*.
Doctoral Thesis in Structural Engineering (February 1995).
Department of Structural Engineering, Politecnico di Milano.
Advisors: Prof. Giulio Maier, Prof. Kaspar Willam. Referee: Prof. Luigi Cedolin.

In this 'tesi' we consider the localization of dissipation processes preceding failure in non-linear materials and structures. *"Localized failure"* implies that the inelastic strains are confined in a narrow region of the structure of a finite characteristic size. These phenomena ultimately lead to material fracture when the contiguity of neighboring particles is broken by *"strong discontinuities"*. Even though localization is typically a structural event, *"localization analysis"* deals with the onset of *"weak discontinuities"* of the strain rate across a *"discontinuity surface of the 2^{nd} order"*. This *"discontinuous bifurcation"* analysis may thus be confined to the *"material level"*, once a constitutive model is given in linear rate form. It results in analytical expressions for the hardening parameters necessary for localized failure, and for the localization directions and localization modes of failure.

At the onset of bifurcation the boundary value problem loses its well-posedness, thus a discretized finite element solution requires appropriate *"regularization strategies"*. The energy dissipation diminishes to zero with further mesh refinement since the volume of the localization band decreases to zero. A *"non-local"* constitutive model and/or *"enhanced FE"* need to be introduced to reduce extreme *"mesh sensitivity"*. This occurrence is typical of the *"smeared approach"* to failure, while the *"discrete approach"* of fracture mechanics removes mesh-sensitivity since the fracture energy does not depend on the number of FE adopted along the crack interface.

This 'tesi' is conceptually organized in two parts:

(a) The first part introduces the basic notions of localization analysis for elastoplastic materials; the formulation of a constitutive theory for *"elastic degradation"* which includes *"damage models"* as particular cases, and of a *"multidissipative"* description along the line of *"multisurface plasticity"* which incorporates *"plasticity combined with elastic degradation"*. Localization analysis is extended to such material models by solving the localization eigenproblem comprising multiple *"rank-one updates"*.

(b) The second part examines regularization strategies. The *"fracture-energy-based regularization"* approach is extended to *"scalar damage"*, the QM6 quadrilateral element with *"incompatible modes"* is adopted, and the classical *"arc-length"* technique is used to trace unstable structural paths with sharp *"snap-back"* in a uniaxial extension test in plane strain.

ACKNOWLEDGEMENTS

The work contained in this 'tesi' has been carried out at the 'Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Milano', and at the Civil, Environmental and Architectural Engineering Department of the University of Colorado at Boulder where I spent half of the three years of the Italian doctoral program. I still remember with pleasure most of the people I have met in those two Departments since they have been so nice and friendly to me.

I whish to express my gratitude to Prof. Giulio Maier. He convinced me in pursuing higher education within the 'Dottorato di Ricerca' and gave me the opportunity of visiting the University of Colorado. I am grateful to him for his contagious enthusiasm and attitude towards research work and I thank him for his advise and suggestions in the preparation of this "computerscript".

My appreciation goes to Prof. Kaspar Willam who welcomed me in his Department, introduced, motivated and guided me in the interesting research topic of localization which was to me entirely new and for his patience, specifically in the early stage of development.

I will to acknowledge Prof. Luigi Cedolin for participating as referee of the 'tesi' and for his remarks on the outline of this work.

I would like to express my appreciation to Ignacio Carol which I met during my first stay in Colorado and several times afterward, always available for open discussions on different topics. I am specially indebted to him for his help in Summer and Fall '92.

Special thanks to Dr. Guillermo Etse and to Dr. Paul Steinmann for providing the core of the research oriented finite element code used for the simulation tests in this 'tesi'. My gratitude goes to Paul also for his valuable help in the computational implementation, to Thomas (Mr. Münz) for developing some of the graphical routines, and to Dr. Andreas Dietsche for providing detailed references on localization related topics.

Precious suggestions from Gabriella Bolzon and Claudia Comi, which helped me in improving the quality and style of the text, are greatly appreciated.

INDICE

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

1.1 Formulazione descrittiva e motivazioni pratiche della problematica considerata nella tesi

I fenomeni di collasso strutturale sono spesso preceduti o innescati dalla perdita di capacità portante in una o piú parti della struttura, occupanti un volume ridotto rispetto a quello dell'intera opera. Si tratta in effetti di un fenomeno di localizzazione dei processi dissipativi che preludono al collasso. Basti pensare al meccanismo di rottura plastica di un telaio metallico con formazione delle cosiddette "cerniere plastiche" in un tronco ridotto della membratura, tale da essere idealizzato al livello sezionale. Anche in strutture in calcestruzzo è usuale osservare la formazione di macrofessure nelle zone di concentrazione degli sforzi, macrofratture che al limite conducono al collasso strutturale mentre la quasi totalità della struttura può ritenersi pressoché intatta. Pertanto la localizzazione dei fenomeni irreversibili acquista primaria importanza nello studio del comportamento di una struttura fino allo stato limite di collasso.

Dal punto di vista precedente, il termine localizzazione assume un significato piuttosto generale, strettamente legato alla natura locale del processo che conduce a rovina, anche se nella letteratura scientifica gli si attribuiscono significati diversi. In questa tesi si intende parlare di *"localizzazione delle deformazioni"* (*'strain localization'*), cioè della possibile insorgenza di pronunciati gradienti di spostamento in zone ristrette della struttura.

Inoltre, se da un lato il fenomeno di localizzazione è certamente da intendersi al livello strutturale, importanti informazioni preventive circa la predizione dell'innesco del processo e le modalità con cui esso avviene, vanno cercate al livello del materiale o costitutivo. In tal caso si parla di *"analisi di localizzazione"* (*'localization analysis'*), secondo la terminologia introdotta da Rudnicki and Rice-1975 e si considera un mezzo continuo illimitato, non influenzato dalle condizioni al contorno, e descritto da una particolare legge costitutiva. L'analisi di localizzazione al livello puntuale fornisce informazioni utili sulle caratteristiche dei meccanismi di rottura al livello strutturale.

L'analisi di localizzazione è stata motivata dall'esigenza di interpretare i risultati sperimentali di prove di trazione monoassiale su provini metallici in cui si è osservata la formazione di vere e proprie *"bande di taglio"* (*'shear bands'*) o *"bande di Lüders"* nelle quali si concentra lo scorrimento plastico. Tali bande risultano inclinate rispetto all'asse di carico. Ad es., nel caso di un provino metallico piatto in lega di alluminio, l'inclinazione è di circa 55^o rispetto alla direzione di trazione (si veda il testo di Nadai-1931, ricco di fotografie ed illustrazioni al proposito).

Nel caso dei materiali metallici sono disponibili in letteratura molte pubblicazioni sull'osservazione sperimentale della localizzazione delle deformazioni. Le condizioni di innesco e l'evoluzione del fenomeno in acciai ad alta resistenza sono state studiate da Anand and Spitzig-1980, per provini tesi o compressi in deformazioni piane e da Marchand and Duffy-1988, per barre soggette a coppie torcenti. In quest'ultimo lavoro gli autori descrivono nel dettaglio l'evoluzione del processo che conduce alla formazione delle 'shear bands', misurando localmente le deformazioni e la temperatura in condizioni adiabatiche. Inizialmente la risposta plastica è omogenea, seguita da una successiva distribuzione disomogenea delle deformazioni che conduce infine alla localizzazione delle deformazioni plastiche nella banda di taglio. Riguardo l'osservazione di bande di taglio in provini metallici, altri dati sperimentali ed ulteriori riferimenti bibliografici sono contenuti nei lavori di Asaro-1985, Perzyna and Perzyna-1993 e Olmstead et al.-1994.

Nello studio micromeccanico del comportamento a fatica dei polimeri, Takemori-1990 ha mostrato l'esistenza di meccanismi di rottura di tipo 'shear band' all'apice della fessura, inclinati di circa 45^o rispetto alla direzione di propagazione della frattura. Tali meccanismi sono in competizione con quelli di apertura ed avanzamento della cricca ('crazing') e formano quindi i cosiddetti 'epsilon modes', mostrati da micrografie ottiche.

Anche nei suoli e nei geo-materiali si osservano fenomeni di 'shear-banding'. Ord et al.-1991 hanno mostrato l'insorgenza di bande di taglio nei provini di roccia tenera ("sandstone") compressi in deformazioni piane. Tali 'shear bands' risultano inclinate di circa 35^o rispetto all'asse di carico e si formano già nel regime di 'hardening'. di Prisco et al.-1992 hanno osservato un fenomeno analogo nel caso di sabbie cementate in condizioni di sforzo pluriassiale.

Nei pannelli di calcestruzzo la localizzazione si manifesta nella macrofessurazione che conduce alla formazione di un meccanismo di rottura, secondo inclinazioni differenti in dipendenza dallo stato di sforzo biassiale imposto (Kupfer et al.-1969). In provini di calcestruzzo sottoposti a trazione la deformazione si localizza in zone di ampiezza molto piccola, come mostrato da Cedolin et al.-1987 utilizzando tecniche di interferometria ottica.

Tutte queste osservazioni sperimentali indicano l'esistenza di una gerarchia precisa nell'insorgenza dei vari livelli di discontinuità all'interno del corpo che si ritiene macroscopicamente continuo, omogeneo ed in stato deformativo uniforme all'inizio del processo di carico. Dapprima le deformazioni si concentrano in una regione molto ristretta del solido con elevati gradienti di spostamento, in seguito si giunge alla vera e propria decoesione e lacerazione del materiale.

Nell'ambito dei modelli analitico-matematici per tali fenomeni di discontinuità si opera a due livelli. Nel caso di discontinuità cosiddette "deboli", si ipotizza un "salto" imprecisato delle deformazioni incrementali (o 'rates' del tensore di deformazione) in corrispondenza di una superficie di discontinuità. Nel caso di discontinuità "forti", si considerano le discontinuità dell'incremento di spostamento tra i lembi di un'interfaccia. I fenomeni del primo tipo si interpretano nell'ambito della teoria della localizzazione delle deformazioni, le manifestazioni discontinue del secondo tipo afferiscono invece alla meccanica della frattura.

Nella tesi ci si occupa esclusivamente del primo ambito, considerando sia il livello materiale, sia il livello strutturale. Nell'ambito della meccanica della frattura questi fenomeni di discontinuità di spostamento vengono invece usualmente studiati con i cosiddetti "modelli coesivi" ('cohesive crack models') sviluppati originariamente negli anni sessanta da Dugdale-1960 e Barenblatt-1962 e resi popolari da Hillerborg et al.-1976 e Hillerborg-1983 ('fictitious crack model'). La validità di questi modelli è stata verificata e corroborata sperimentalmente mediante prove di trazione monoassiale di provini di calcestruzzo, determinando l'energia di frattura coinvolta nel processo (Cedolin et al.-1987). I modelli coesivi sono stati estesamente utilizzati nella soluzione di problemi al contorno di meccanica della frattura, sia utilizzando un approccio ad elementi finiti (Carpinteri-1989a,b), sia impiegando il metodo degli elementi di contorno, che si presta particolarmente alla modellazione di una struttura con materiale integro elastico ed interfacce caratterizzate da leggi coesive (Cen and Maier-1992, Maier et al.-1993).

1.2 Breve rassegna delle attuali conoscenze e della letteratura sul tema

In concomitanza al progressivo consolidarsi delle conoscenze sperimentali circa il fenomeno di localizzazione delle deformazioni si è assistito allo sviluppo di modelli matematici di questi fenomeni di discontinuità con la conseguente predizione delle condizioni che ne regolano l'innesco e le modalità di attuazione al livello materiale e strutturale. L'ambito di sviluppo di tali modelli è stato finora quello afferente alla teoria della plasticità, sia in formulazioni incrementali che totali ('deformation theory of plasticity').

Si hanno due punti di vista diversi nel considerare il fenomeno di localizzazione: uno dinamico, l'altro statico. Nel primo caso si studia la propagazione di onde d'accelerazione nei mezzi elastoplastici e si esaminano eventuali condizioni di stazionarietà del fronte d'onda (si vedano i lavori pionieristici di Hadamard-1903, Hill-1962, Mandel-1965). Col termine "onde d'accelerazione" si indicano fronti di propagazione d'onda con discontinuità delle variabili ottenute mediante due derivazioni temporali e/o spaziali del vettore spostamento, come per l'appunto l'accelerazione o l'incremento di deformazione totale. Nel secondo caso si considera l'insorgenza di discontinuità delle deformazioni incrementali attraverso una superficie ove si impone la condizione di equilibrio statico all'interfaccia. Il "salto" delle deformazioni incrementali deve soddisfare le condizioni di compatibilità di Maxwell (Thomas-1961, Rudnicki and Rice-1975). I due approcci forniscono due condizioni di localizzazione al livello materiale tra loro duali (coincidenti nel caso associato). Tali condizioni sono associate alla singolarità del tensore acustico o di localizzazione, la cui definizione scaturisce rispettivamente nei due ambiti appena menzionati.

Le proprietà spettrali del tensore di localizzazione governano quindi l'insorgenza del fenomeno al livello materiale (Ortiz-1987, Borré and Maier-1989). In lavori recenti sono state presentate analisi sistematiche del problema agli autovalori associato al tensore di localizzazione per classi generali di leggi elastoplastiche non associate (Bigoni and Hueckel-1991, Ottosen and Runesson-1991a,b). I lavori di Neilsen and Schreyer-1993 e de Borst et al.-1993 contribuiscono nel presentare una visione unitaria dei vari fenomeni di biforcazione al livello costitutivo, riassumendo le gerarchie esistenti per l'innesco dei vari indici di rovina. Questi indici di rovina non sono relativi solamente alla biforcazione discontinua del fenomeno di localizzazione, ma rilevano anche la perdita di stabilità e di unicità della soluzione incrementale (Hill-1958, Drucker-1964, Maier and Hueckel-1979, Runesson and Mróz-1989).

Questi risultati analitici forniscono un'interpretazione adeguata dell'osservazione sperimentale del fenomeno di localizzazione nei materiali con comportamento rappresentabile correttamente dai modelli elastoplastici, cioè con sole deformazioni reversibili allo scarico. Ad es., nel caso di trazione monoassiale di un materiale elastoplastico di von Mises, si prevede un'inclinazione critica della 'shear band' di 54.74^o rispetto all'asse di carico (si veda il Capitolo 2), in ottimo accordo con l'osservazione sperimentale menzionata precedentemente.

In molti materiali di interesse ingegneristico si osserva tuttavia anche una contemporanea perdita di rigidezza elastica durante il processo di carico. Ci si chiede allora come questo ulteriore fenomeno dissipativo possa influire sull'analisi degli indici di rovina al livello materiale, modificandone i risultati di ambito elastoplastico. Tale analisi sono state ancora essenzialmente inesplorate salvo che nel caso monodissipativo dell'"elastoplastic coupling' in cui la perdita di rigidezza dipende dall'accumulo di deformazioni plastiche (Maier and Hueckel-1979, Bigoni and Hueckel-1991). La prima parte della tesi si inserisce in quest'ambito di ricerca, sia nello sviluppo di modelli costitutivi appropriati, sia nella formulazione ed analisi dei relativi indici di rovina.

La descrizione del fenomeno di localizzazione al livello materiale non è di per sé sufficiente a caratterizzare il vero problema strutturale nel quale vanno debitamente tenuti in conto gli effetti delle condizioni al contorno (Benallal et al.-1989, Needleman and Ortiz-1991). A tale proposito, soluzioni analitiche di casi generali sono ovviamente improponibili e risulta necessario ricorrere a soluzioni numeriche con numero finito di gradi di libertà. Le analisi strutturali eseguite in quest'ambito mostrano chiaramente quali sono gli effetti della cattiva posizione del problema al contorno in presenza dei fenomeni di localizzazione: la soluzione numerica risulta fortemente influenzata dalla scelta operata per la discretizzazione, sia in relazione alla sua densità (Bažant-1986, de Borst-1987), sia in relazione alla topologia geometrica scelta (Steinmann and Willam-1991a,b,c-94).

Si apre quindi lo scenario delle tecniche di regolarizzazione della risposta strutturale che mirano ad ottenere una soluzione numerica completamente oggettiva ed indipendente dalle scelte operate nella discretizzazione. Queste procedure agiscono sia al livello costitutivo (si vedano i lavori di Willam and Dietsche-1992a,b e de Borst et al.-1993 per una panoramica degli approcci disponibili) che al livello degli elementi finiti (si vedano ad es. le proposte di Klisinski et al.-1991, Larsson et al.-1993, Lotfi and Shing-1994) e sono a tutt'oggi oggetto di intensa attività di ricerca nella quale si inserisce la seconda parte di questa tesi.

Ogni capitolo della tesi inizia con un breve paragrafo introduttivo degli argomenti specifici trattati, menzionando quali sono stati i contributi piú significativi allo stato dell'arte attuale. Si rimanda quindi a tali paragrafi per una rassegna piú dettagliata delle conoscenze attualmente disponibili e delle relative citazioni bibliografiche.

1.3 Obiettivi ed organizzazione della tesi

Questa tesi riguarda i fenomeni di localizzazione delle deformazioni in materiali e strutture, con particolare attenzione al comportamento meccanico con degradazione della resistenza comprendente perdita di rigidezza elastica e deformazioni irreversibili allo scarico. L'obiettivo è quello di contribuire alla formulazione di modelli costitutivi per materiali con tale comportamento meccanico, di effettuarne le analisi di instabilità al livello costitutivo e di studiarne e prevederne le conseguenze al livello strutturale.

La tesi si articola concettualmente nelle due parti seguenti: formulazione di modelli costitutivi anelastici con studio dei relativi indici di rovina al livello materiale; sviluppo di tecniche computazionali per l'analisi strutturale di problemi al contorno in presenza di fenomeni di localizzazione. Questi argomenti vengono trattati in quattro capitoli. I Capitoli 2, 3, 4 afferiscono alla prima parte, il Capitolo 5 alla seconda.

All'interno di ogni capitolo si fornisce una breve introduzione degli aspetti esaminati, con presentazione dello stato dell'arte e di alcune citazioni pertinenti e si descrive brevemente il contenuto dei temi trattati. Alcune considerazioni conclusive sui principali risultati ottenuti e su possibili sviluppi di ricerca delle conoscenze raggiunte vengono presentate alla fine di ogni capitolo. Considerazioni analoghe, presentate anche in relazione all'organizzazione complessiva della tesi ed all'interazione tra gli argomenti trattati nei diversi capitoli, vengono riportate nel capitolo conclusivo dove si sottolineano e sintetizzano i contributi della tesi nell'area di ricerca della localizzazione delle deformazioni.

L'elenco alfabetico dei riferimenti bibliografici conclude la tesi. Non tutti i riferimenti elencati in bibliografia sono stati citati nel testo per ragioni di brevità quando non necessari nel dettaglio ma comunque pertinenti all'argomento trattato. L'elenco bibliografico è stato redatto con l'intenzione di raccogliere alcune delle numerose fonti disponibili in letteratura nelle aree di ricerca oggetto della tesi. I riferimenti vengono citati nel testo indicando i nomi degli autori (se fino a due coautori, altrimenti segnalando solo il nome del primo autore ed aggiungendo ET AL.) e l'anno di pubblicazione, in modo che un lettore familiare con tale letteratura scientifica possa riconoscere piú facilmente le citazioni senza dovere scorrere l'elenco bibliografico posto in fondo alla tesi.

Nel seguito si descrive il percorso espositivo che ha guidato la stesura dei vari capitoli della tesi: presentazione dei concetti classici dell'analisi di localizzazione in campo elastoplastico e definizione degli indici di rovina al livello materiale; formulazione di modelli costitutivi per pura degradazione di rigidezza elastica comprendenti i modelli di danneggiamento come caso particolare e studio dei relativi indici di rovina; sviluppo di un formalismo generale per modelli di materiali a meccanismi dissipativi multipli (quali plasticità e danneggiamento nel caso bidissipativo) e soluzione delle relative condizioni di singolarità costitutiva; utilizzo delle cognizioni maturate in ambito costitutivo per affrontare il problema della localizzazione delle deformazioni al livello strutturale; soluzione di problemi al contorno piani discretizzati con elementi finiti.

Il Capitolo 2 fornisce richiami sulle relazioni fondamentali dell'analisi di localizzazione al livello materiale con applicazione al caso dei modelli elastoplastici a variabili interne, incrudenti e non associati con formulazione negli sforzi e nelle deformazioni. Si derivano le condizioni di compatibilità di Maxwell ed Hadamard, che conducono alla definizione di due condizioni di localizzazione duali, una in campo statico, l'altra in campo dinamico. La prima viene indicata come condizione debole di localizzazione, la seconda come condizione forte, intendendo dire che quest'ultima risulta maggiormente restrittiva. Ciononostante entrambe le condizioni rimangono definite al livello puntuale del materiale e non vanno pertanto confuse con condizioni integrali su volumi finiti di solido, che vengono indicate dal punto di vista matematico come condizioni in senso debole. Una condizione di localizzazione debole in tal senso integrale viene trattata al livello del volume di un elemento finito nella sezione del Capitolo 5 dedicata al 'weak localization test'. Nel Capitolo 2 si richiamano le formulazioni negli sforzi e nelle deformazioni della teoria della plasticità, ricavandone i relativi operatori di rigidezza e di cedevolezza tangenti. Si definiscono gli indici di rovina associati all'operatore di rigidezza tangente, al tensore di localizzazione elastoplastico ed alle loro parti simmetriche. Si formula un'analisi algebrica dell'operatore di rigidezza tangente mostrando che due dei suoi autovalori elastici vengono modificati dal contributo plastico di rango uno. Al termine del capitolo si presentano alcuni risultati classici dell'analisi di localizzazione per materiali elastoplastici di von Mises, introducendo la rappresentazione dell'indice di localizzazione al variare della direzione di localizzazione. Tali diagrammi vengono utilizzati anche nei capitoli successivi. Vengono inoltre presentati i diagrammi polari degli autovalori del tensore acustico elastoplastico in stato di sforzo piano, che ne chiariscono il significato fisico.

Nella prima parte del Capitolo 3 si presenta una teoria costitutiva per materiali con degradazione di rigidezza elastica, denominata 'elastic-degrading', con formulazioni negli sforzi e nelle deformazioni. Si mantiene ove possibile il formalismo della teoria della plasticità, estendendo il concetto di associatività agli spazi di rigidezze e cedevolezze. Si introducono i modelli di danneggiamento come caso particolare della descrizione 'elastic-degrading' e si estendono i concetti di associatività allo spazio delle variabili di danno. Si presentano le procedure utilizzate nella meccanica del danneggiamento per definire le variabili di danno cercando di fornire una visione unitaria di concetti e cognizioni che appaiono ancora oggi piuttosto dispersi. Mediante le definizioni di equivalenza di sforzi, di deformazioni o delle energie, si spiega come derivare la legge costitutiva elastica con danno nello spazio nominale o fisicamente osservabile, una volta assunta la legge elastica del materiale integro nello spazio effettivo od efficace. Si descrivono variabili di danno di ordine tensoriale differente, proponendo una forma alternativa piú generale di danno scalare e si formulano dei metodi per ottenere variabili di danno del 2^o ordine tensoriale che preservino la simmetria di sforzi e deformazioni negli spazi nominale ed effettivo. Nella seconda parte del Capitolo 3 si formulano e si analizzano gli indici di rovina associati all'operatore di rigidezza tangente dei materiali 'elastic-degrading' ed al relativo tensore di localizzazione. Si derivano in forma chiusa le analisi di localizzazione per modelli a danno scalare associati, utilizzando anche una rappresentazione geometrica nel piano di Mohr di sforzi o deformazioni, particolarmente conveniente e di immediato significato fisico. Si trattano il caso tridimensionale o di deformazioni piane ed il caso di sforzo piano, mostrando le differenze esistenti tra le due analisi e paragonandone i risultati salienti.

Nel Capitolo 4 si considera la modellazione del comportamento di materiali con degradazione di rigidezza elastica contemporanea a sviluppo di deformazioni irreversibili allo scarico. In questo caso la presenza di due meccanismi dissipativi costituisce una situazione particolare di una modellazione piú generale a meccanismi multipli di dissipazione. Tale formulazione viene presentata secondo il formalismo della plasticità a multipotenziale ('multisurface plasticity'). Si introducono formulazioni duali negli sforzi e nelle deformazioni, mostrando che gli operatori di rigidezza e di cedevolezza tangenti si ottengono con modifiche multiple di rango uno ('rank-one updates') dei relativi tensori elastici. Si definisce il tensore di localizzazione associato all'operatore di rigidezza tangente, anch'esso ottenuto con modifiche multiple di rango uno. Si definiscono gli indici di rovina per tali modelli costitutivi. Si elabora una soluzione generale del problema agli autovalori di matrici ottenute con n modifiche di rango uno della matrice identità $m \times m$. Si esplicitano i risultati nel caso bidissipativo di due modifiche, ottenendo autovettori, autovalori e determinante in forma chiusa. Alla luce dei nuovi risultati si riconsidera il caso monodissipativo presentando una trattazione unitaria degli indici di rovina che mira a sottolineare le analogie esistenti tra le singolarità costitutive dell'operatore di rigidezza tangente e quelle del relativo tensore di localizzazione. Si analizzano gli indici di rovina per il caso bidissipativo, mostrando il generale effetto destabilizzante ed il possibile effetto spurio di irrigidimento dell'attivazione contemporanea dei due processi dissipativi di perdita di rigidezza e di flusso di deformazioni plastiche. Si mostrano risultati espliciti nel caso associato di plasticità di von Mises combinata a danno scalare.

Nel Capitolo 5 ci si sposta al livello strutturale considerando le tecniche di regolarizzazione della risposta. Si presenta una breve rassegna delle tecniche di regolarizzazione disponibili od in via di sviluppo, sia nell'ambito costitutivo, sia al livello della modellazione per elementi finiti. Si presenta un modello con danno scalare regolarizzato utilizzando il concetto di energia di frattura. Si descrivono brevemente le strategie 'arc-length' di controllo misto carico/spostamento necessarie per tracciare le risposte strutturali con punti limite e di 'snap-back'. Si implementa una tecnica 'arc-length' classica con correzione perpendicolare alla soluzione di predizione e variazione automatica della lunghezza d'arco. Si descrive ed implementa l'elemento finito quadrangolare piano QM6 con modi incompatibili che soddisfa il 'weak localization test' proposto da Steinmann e Willam, brevemente descritto in una sezione del capitolo. Si studia la risposta strutturale di un problema test di estensione assiale in deformazioni piane con modello costitutivo di danno, standard o regolarizzato e con modello elastoplastico di von Mises ad incrudimento lineare.

1.4 Notazione e terminologia

Nel testo si è fatto uso prevalentemente della notazione compatta tensoriale, specificando dove opportuno o necessario il significato delle operazioni con l'espansione in termini di indici delle componenti tensoriali nel riferimento scelto. Le variabili tensoriali vengono indicate da caratteri in grassetto. Si adotta la notazione di somma degli indici ripetuti. Qualora l'indice ripetuto 'i' non sia da sommare lo si indicherà con il simbolo '(i)'. Il simbolo '$\star$' indica una contrazione tensoriale di tutti gli indici degli operandi nella quale il numero di indici saturati varia in funzione dell'ordine tensoriale degli operandi stessi. Alcuni dei simboli spesso utilizzati nel testo, peraltro comunemente impiegati in letteratura, sono riassunti in Tab. 1.1, mentre nel caso di simboli non usuali ne viene data la definizione nel testo, quando appaiono per la prima volta.

Le parentesi quadre indicano dipendenza funzionale dalle variabili, per enfatizzare la distinzione con le parentesi tonde utilizzate nel raggruppare i termini nelle formule matematiche. Ad es. $F[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}]$ indica la funzione F delle variabili $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{q}$.

I simboli $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{I}$ indicano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso.

Le parole della lingua inglese utilizzate nel testo vengono poste tra apici. La traduzione di termini non tradizionali utilizzati nella terminologia in lingua inglese tipica dell'area di ricerca argomento della tesi, viene indicata tra virgolette e con carattere *'slanted'*. Ad es., il termine *'failure indicators'*, spesso utilizzato nei lavori sulla localizzazione è stato tradotto con *"indici di rovina"*.

La maggior parte della notazione e terminologia viene introdotta nel Capitolo 2, scritto non solo con l'intento di richiamare i concetti fondamentali nei problemi di localizzazione delle deformazioni, ma anche allo scopo di rendere familiare al lettore la notazione impiegata.

Tabella 1.1: Esempi di operazioni tensoriali e relativa notazione.

Simbolo	Operazione	Notazione compatta	Notazione indiciale
$\cdot$	contrazione singola	$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$c_i = a_{ij}\, b_j$
$:$	contrazione doppia	$c = \mathbf{a} : \mathbf{b}$	$c = a_{ij}\, b_{ij}$
$::$	contrazione quadrupla	$c = \mathbf{a} :: \mathbf{b}$	$c = a_{ijkl}\, b_{ijkl}$
$\star$	contrazione variabile	$c = \mathbf{a} \star \mathbf{b}$	$c = a_{ijk}\, b_{ijk}$
$\otimes$	prodotto esterno	$\mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	$c_{ijkl} = a_{ij}\, b_{kl}$

CAPITOLO 2

LA LOCALIZZAZIONE DELLE DEFORMAZIONI NEI MATERIALI

La localizzazione dei fenomeni irreversibili acquisisce primaria importanza nello studio del comportamento di una struttura anelastica in prossimità del collasso. In questo senso, il termine localizzazione assume il suo significato letterale, di concentrazione della dissipazione energetica in una zona ben localizzata del solido. Nella letteratura scientifica tuttavia si attribuiscono allo stesso termine significati diversi. In questa tesi si intende parlare di *"localizzazione delle deformazioni"* (*'strain localization'*), cioè della possibile insorgenza di pronunciati gradienti di spostamento in zone limitate della struttura.

Inoltre, se da un lato il fenomeno di localizzazione è certamente da intendersi al livello strutturale, informazioni preventive circa l'innesco del processo e le sue modalità si possono ottenere con un'analisi puntuale al livello costitutivo. In tal caso si parla di *"analisi di localizzazione"* e si considera un mezzo continuo illimitato, non influenzato dalle condizioni al contorno, e descritto da una particolare legge costitutiva. Si ottiene quindi un'analisi di localizzazione al livello puntuale che fornisce informazioni preziose sulle caratteristiche dei meccanismi di rottura al livello strutturale.

In questo capitolo della tesi si intende introdurre la terminologia tipica della *'localization analysis'* per materiali elastoplastici, definendo gli operatori tensoriali che ne governano il comportamento e derivando le condizioni fondamentali nell'analisi di localizzazione. Tali argomenti sono stati trattati estesamente in letteratura a partire dai primi contributi presenti nei testi di Hadamard-1903, Nadai-1931, Thomas-1961 e nei lavori di Hill-1962, Mandel-1965, Rudnicki and Rice-1975, per arrivare alle pubblicazioni piú recenti di Ortiz-1987, Borré and Maier-1989, Bigoni and Hueckel-1991, Ottosen and Runesson-1991a, Steinmann and Willam-1991a, de Borst et al.-1993, Neilsen and Schreyer-1993, Benallal and Comi-1995, per citarne alcuni dei piú appropriati in questo contesto, ed infine alle tesi di dottorato di Sobh-1987, Sabban-1989, Perić-1990, Bigoni-1991, Etse-1992, Sluys-1992, Steinmann-1992, Dietsche-1993, Pamin-1994. Nella bibliografia viene fornito un elenco alquanto esteso di riferimenti pertinenti all'analisi di localizzazione e piú in generale alla discussione e trattazione del fenomeno di localizzazione delle deformazioni.

Nel presente capitolo si introduce dapprima la definizione del tensore acustico in elasticità lineare nell'ambito della *"propagazione ondosa"* (*'wave propagation'*) nei continui elastici. Ciò appare necessario per fornire un chiaro significato fisico ad un ente tensoriale le cui proprietà spettrali governano l'insorgenza delle discontinuità di cui ci si occupa nella tesi. Gli operatori tangenti elastoplastici vengono poi introdotti per le due formulazioni duali nello spazio degli sforzi e delle deformazioni. Si discutono le proprietà spettrali del tensore di rigidezza tangente elastoplastico e le relative condizioni di singolarità. La condizione di localizzazione viene definita come condizione di equilibrio statico attraverso una superficie di discontinuità delle deformazioni incrementali in forma cinematica compatibile e come condizione di stazionarietà del moto del fronte d'onda. Poiché la seconda condizione risulta più restrittiva della prima, tali condizioni verranno indicate rispettivamente come condizione di localizzazione "debole" e "forte" anche se entrambe sono relative esclusivamente al livello puntuale. Una condizione di localizzazione debole nel senso integrale viene esaminata nel Capitolo 5 dove si presenta una condizione globale sul volume di un elemento finito. Si presentano alcuni risultati relativi al modello di plasticità di von Mises nel caso triassiale e di stato di sforzo piano, mostrando le differenze esistenti tra le due predizioni al livello costitutivo. In particolare si mostra come la condizione di sforzo piano sia piú sensibile all'innesco di biforcazione rispetto al caso tridimensionale. In generale il modo di localizzazione è di tipo misto in dipendenza dallo stato di sforzo considerato.

2.1 Il tensore acustico in elasticità lineare

L'analisi di localizzazione al livello materiale è basata sullo studio delle proprietà spettrali del *"tensore di localizzazione"* o *"tensore acustico"*, che viene definito in base alla legge costitutiva non lineare adottata. Tuttavia, prima di definire il tensore di localizzazione nel caso non-lineare sembra opportuno introdurre la derivazione del tensore acustico in elasticità lineare isotropa che ne chiarisce appieno il significato fisico, estrapolabile poi in ambito anelastico. Si noti inoltre che l'espressione del tensore acustico che verrà ricavata per materiali elastici isotropi, è molto importante nelle derivazioni di soluzioni in forma chiusa dell'analisi di localizzazione per materiali a comportamento non lineare.

2.1.1 Gli operatori elastici lineari

Prima di passare alla definizione del tensore acustico nell'ambito della teoria della propagazione d'onda nei mezzi elastici si forniscono alcuni richiami sugli operatori del legame elastico, anche allo scopo di introdurre parte della notazione e terminologia che verranno estesamente utilizzate nella tesi.

Nel caso di un materiale a comportamento iperelastico lineare la legge costitutiva sforzi-deformazioni è espressa in termini finiti per mezzo del tensore di rigidezza del 4^o ordine $\mathbf{E}_o$. L'indice 'o' si riferisce al valore iniziale di rigidezza elastica che rimane costante nell'ambito elastoplastico. Il tensore $\mathbf{E}_o$ possiede le consuete simmetrie di indici: le simmetrie minori $E^o_{ijkl}=E^o_{jikl}$ e $E^o_{ijkl}=E^o_{ijlk}$ sono dovute alle simmetrie dei tensori di sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ e di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$, nell'ipotesi tradizionale di continuo non-polare; le simmetrie maggiori $E^o_{ijkl}=E^o_{klij}$ derivano dall'assunzione di un'energia di deformazione del materiale iperelastico $w(\boldsymbol{\epsilon})$ il cui gradiente nello spazio delle deformazioni definisce lo sforzo, $\boldsymbol{\sigma}=\partial w/\partial\boldsymbol{\epsilon}$. L'operatore di rigidezza elastico lineare è quindi definito da 21 parametri indipendenti e fornisce la legge costitutiva mediante la relazione

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma_{ij} = E^o_{ijkl}\, \epsilon_{kl} \tag{2.1}$$

Se il materiale può ritenersi isotropo, la rigidezza dipenderà dall'espressione piú generale di un tensore isotropo del 4^o ordine $\mathbf{T}$, il quale contiene tutte le possibili combinazioni del tensore identità del secondo ordine $\mathbf{i}_2$ (i^2_{ij}=δ_{ij}, dove δ_{ij} indica il Delta di Kronecker tale per cui δ_{ij}=1 se i=j, δ_{ij}=0 se $i\neq j$):

$$T_{ijkl} = \alpha_1\ \delta_{ij}\delta_{kl} + \alpha_2\ \frac{1}{2}\,(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \alpha_3\ \frac{1}{2}\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.2}$$

$$\mathbf{T} = \alpha_1\ \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \alpha_2\ \mathbf{i}^s_4 + \alpha_3\ \mathbf{i}^a_4 \tag{2.3}$$

dove $\mathbf{i}^s_4$ e $\mathbf{i}^a_4$ sono i tensori identità del 4^o ordine simmetrico (simmetrie minori e maggiori) ed antisimmetrico (solo simmetrie maggiori). Tali tensori definiscono l'autotrasformazione lineare di un tensore del 2^o ordine in sé stesso, $\mathbf{a}$=$\mathbf{i}_4$:$\mathbf{a}$=$\mathbf{a}^s$+$\mathbf{a}^a$ mediante il tensore identità del 4^o ordine $\mathbf{i}_4$,

$$\mathbf{i}_4 = \mathbf{i}^s_4 + \mathbf{i}^a_4 \qquad \Leftrightarrow \qquad i^4_{ijkl} = \delta_{ik}\,\delta_{jl} \tag{2.4}$$

che possiede solo le simmetrie maggiori. Conseguentemente l'operatore di rigidezza per un materiale elastico isotropo, che risulta simmetrico (α_3=0), è caratterizzato da due soli parametri elastici, le costanti di Lamé λ_o e μ_o, tali per cui

$$\mathbf{E}_o = \lambda_o\ \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + 2\mu_o\ \mathbf{i}^s_4 \qquad \Leftrightarrow \qquad E^o_{ijkl} = \lambda_o\ \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\,\mu_o\ \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.5}$$

Le suddette costanti elastiche sono esprimibili in termini di altrettanti parametri di significato ingegneristico, il modulo di Young E_o ed il coefficiente di Poisson ν_o attraverso le relazioni

$$\lambda_o = \frac{\nu_o\,E_o}{(1+\nu_o)\,(1-2\nu_o)} \qquad \mu_o = \frac{E_o}{2\,(1+\nu_o)} \tag{2.6}$$

Un'espressione alternativa dell'operatore di rigidezza ne mostra la sua decomposizione in una parte volumetrica ed in una parte deviatorica, in termini dei moduli di volume ('bulk modulus') K_o=$(3\lambda_o$+$2\mu_o)/3$ e di taglio G_o=μ_o,

$$\mathbf{E}_o = 3K_o\,\mathbf{P}_v + 2G_o\,\mathbf{P}_d \tag{2.7}$$

dove i tensori del 4^o ordine $\mathbf{P}_v$ e $\mathbf{P}_d$ sono gli operatori di proiezione volumetrica e deviatorica definiti come (Neilsen and Schreyer-1993)

$$\mathbf{P}_v = \frac{1}{3}\ \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 \qquad \mathbf{P}_d = \mathbf{i}^s_4 - \mathbf{P}_v \tag{2.8}$$

In effetti gli operatori di proiezione sono cosí denominati poiché definiscono la trasformazione lineare di un tensore del 2^o ordine, rispettivamente, nelle sue parti volumetrica e deviatorica: $\mathbf{P}_v$:$\boldsymbol{\sigma}$=$\boldsymbol{\sigma}_v$=$tr[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{i}_2/3$, $\mathbf{P}_d$:$\boldsymbol{\sigma}$=$\boldsymbol{\sigma}$−$\boldsymbol{\sigma}_v$=$\boldsymbol{\sigma}_d$. Con $tr[\boldsymbol{\sigma}]$ si è indicato l'operatore traccia di $\boldsymbol{\sigma}$ definito nel modo usuale, $tr[\boldsymbol{\sigma}]$=$\mathbf{i}_2$:$\boldsymbol{\sigma}$=σ_{ii}.

La rappresentazione (2.7) consente agevolmente di determinare le proprietà spettrali dell'operatore di rigidezza che derivano dalla soluzione del problema agli autovalori $\mathbf{E}_o$:$\mathbf{x}$=$\Omega\,\mathbf{x}$ per $\mathbf{E}_o$. Infatti il tensore $\mathbf{P}_v$ di rango uno ha un solo autovalore Ω=1 diverso da zero corrispondente all'autotensore $\mathbf{i}_2$. Gli altri cinque autotensori appartengono allo spazio dei tensori simmetrici e puramente deviatorici ortogonali ad $\mathbf{i}_2$, che soddisfano la condizione $\mathbf{x}{:}\mathbf{i}_2{=}0$. Viceversa, $\mathbf{P}_d$ ha un autovalore nullo associato all'autotensore $\mathbf{i}_2$ e cinque autovalori coincidenti, $\Omega{=}1$, relativi ai tensori deviatorici ortogonali ad $\mathbf{i}_2$. Queste conclusioni si possono dedurre dalla forma dei problemi agli autovalori per $\mathbf{P}_v$ e $\mathbf{P}_d$:

$$\mathbf{P}_v : \mathbf{x} = \frac{1}{3} tr[\mathbf{x}]\, \mathbf{i}_2 = \Omega\, \mathbf{x} \qquad\qquad \mathbf{P}_d : \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{1}{3} tr[\mathbf{x}]\, \mathbf{i}_2 = \Omega\, \mathbf{x} \tag{2.9}$$

Si può quindi concludere che l'operatore lineare di rigidezza possiede un autovalore $\Omega{=}3K_o$ associato all'autotensore $\mathbf{i}_2$ e cinque autovalori $\Omega{=}2G_o$ associati ad autotensori puramente deviatorici.

La relazione univoca tra sforzi e deformazioni (2.1) può essere invertita ed espressa in termini dell'operatore di cedevolezza $\mathbf{C}_o{=}\mathbf{E}_o^{-1}$ come $\boldsymbol{\epsilon}{=}\mathbf{C}_o{:}\boldsymbol{\sigma}$. Per l'inversione di $\mathbf{E}_o$ si può utilizzare la formula di Sherman and Morrison-1950 che fornisce l'espressione dell'inversa di una matrice quadrata $n{\times}n$ B_{RS} in cui il solo termine A_{RS} viene modificato come $B_{RS}{=}A_{RS}{+}\Delta A_{RS}$, qualora $1{+}(A^{-1})_{SR}\, \Delta A_{RS}{\neq}0$ (in questo caso gli indici ripetuti non vengono sommati):

$$(B^{-1})_{ij} = (A^{-1})_{ij} - \frac{(A^{-1})_{iR}\, (A^{-1})_{Sj}\, \Delta A_{RS}}{1 + (A^{-1})_{SR}\, \Delta A_{RS}} \qquad i,j = 1,2,...,n \tag{2.10}$$

La formula viene utilizzata negli algoritmi risolutivi dei problemi di ottimizzazione per l'inversione di matrici ottenute con una *"modifica di rango uno"* (*'rank-one update'*) di una matrice data (si veda il Lemma 8.3.1 in Dennis and Schnabel-1983). Per modifica di rango uno di una matrice assegnata si intende dire che una matrice di rango uno viene sommata alla matrice assegnata. Poichè tale correzione ha un solo autovalore eventualmente non nullo si può esprimerla in un riferimento principale con un unico elemento diverso da zero e quindi la formula di Sherman e Morrison può essere utilizzata. Sia $\mathbf{B}{=}\mathbf{A}{+}\mathbf{u}{\otimes}\mathbf{v}$ la matrice da invertire ed $\mathbf{A}$ sia non singolare. La matrice $\mathbf{B}$ non è singolare se e solo se $1{+}\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{A}^{-1}{\cdot}\mathbf{u}{\neq}0$ e l'inversa si ottiene come

$$\boxed{(\mathbf{A} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}}} \tag{2.11}$$

Risulta immediato verificare che $\mathbf{B}^{-1}{\cdot}\mathbf{B}{=}\mathbf{A}^{-1}{\cdot}\mathbf{A}{=}\mathbf{I}$, ove $\mathbf{I}$ è la matrice identità di ordine n.

La formula di inversione può essere impiegata nel nostro caso poichè l'operatore di rigidezza $\mathbf{E}_o$ consegue dalla modifica di rango uno $\lambda_o \mathbf{i}_2{\otimes}\mathbf{i}_2$ del tensore $2\mu_o \mathbf{i}_4^s$. Utilizzando la (2.11) per $\mathbf{E}_o{=}\lambda_o \mathbf{i}_2{\otimes}\mathbf{i}_2{+}2\mu_o \mathbf{i}_4^s$, si perviene all'espressione della cedevolezza $\mathbf{C}_o$,

$$\mathbf{C}_o = \frac{1}{2\mu_o}\mathbf{i}_4^s - \frac{\lambda_o}{4\mu_o^2} \frac{\mathbf{i}_4^s : \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 : \mathbf{i}_4^s}{1 + \dfrac{\lambda_o}{2\mu_o}\mathbf{i}_2 : \mathbf{i}_4^s : \mathbf{i}_2} = \frac{1}{2\mu_o}\mathbf{i}_4^s - \frac{\lambda_o}{2\,\mu_o(2\mu_o + 3\lambda_o)}\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 \tag{2.12}$$

dove si è utilizzata la relazione $\mathbf{i}_2{:}\mathbf{i}_2{=}3$. Anche la cedevolezza si ottiene quindi come modifica di rango uno del tensore identità simmetrico del 4^o ordine. Le espressioni dei due operatori elastici lineari isotropi, simmetrici in tutti gli indici, possono quindi essere riassunte in notazione compatta come segue:

$$\boxed{\begin{array}{lcccccc} \mathbf{E}_o & = & \lambda_o & \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 & + & 2\mu_o & \mathbf{i}_4^s \\ \mathbf{C}_o & = & \dfrac{-\lambda_o}{2\,\mu_o\,(3\lambda_o + 2\mu_o)} & \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 & + & \dfrac{1}{2\mu_o} & \mathbf{i}_4^s \end{array}} \tag{2.13}$$

2.1.2 Propagazione d'onda nei mezzi elastici

La propagazione d'onda in un mezzo è dovuta ad un disturbo creato da un'eccitazione locale che si propaga all'interno del continuo trasmettendosi da punto a punto (sulla *'wave propagation'* si rimanda alle classiche fonti di Love-1892, Rayleigh-1896, Achenbach-1973, Graff-1975). É evidente che la perturbazione non può essere avvertita contemporaneamente in tutti i punti del mezzo in quanto il materiale è dotato di una rigidezza finita e di conseguenza la velocità di propagazione d'onda è altrettanto finita. Solo se il continuo fosse indeformabile ($E_o \to \infty$) la perturbazione si avvertirebbe instantaneamente in tutti i punti del mezzo con velocità di propagazione infinita ($c \to \infty$).

L'altro parametro che gioca un ruolo fondamentale è l'inerzia, cioé la densità di massa ρ del continuo. Ci si aspetta che per un mezzo scarsamente denso ($\rho \to 0$) la velocità di propagazione sia elevata ($c \to \infty$). In effetti, come vedremo tra poco, la velocità di propagazione in un mezzo elastico è rappresentata dalla radice quadrata di un parametro di rigidezza diviso per la densità di massa del materiale (ad es. $c = \sqrt{E_o/\rho}$ per propagazione unidirezionale).

Il fronte d'onda definisce i punti dello spazio raggiunti dalla perturbazione ad ogni istante di tempo. La direzione di propagazione $\mathbf{N}$ dell'onda risulta perpendicolare al fronte ed in generale non coincide con la direzione dello spostamento $\mathbf{M}$, detta anche direzione di polarizzazione. Nel caso di un'onda sferica, il fronte d'onda è la superficie di una sfera e le direzioni di propagazione sono le direzioni radiali. Per distanze considerevoli del fronte d'onda dal punto di eccitazione locale, il fronte d'onda può essere assimilato ad un piano, caratterizzato dalla sua normale $\mathbf{N}$ e si parla allora di *"onda piana"*.

In termini matematici, un'onda piana che si propaga nello spazio con velocità c viene rappresentata mediante la relazione (si veda ad es. Achenbach-1973, Gurtin-1972)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} - ct)\,\mathbf{M} = \phi(s)\,\mathbf{M} \tag{2.14}$$

dove:

- $\mathbf{u}$ è il vettore spostamento
- $\mathbf{x}$ è il vettore di posizione originaria del punto materiale
- t rappresenta l'istante di tempo
- $\phi(s)$ è la funzione d'onda assunta $\in C^2(-\infty,\infty)$ con $\phi'' \equiv d^2\phi/ds^2 \neq 0$
- s è la fase della funzione d'onda
- c è la velocità di propagazione ondosa
- $\mathbf{N}$ è la direzione di propagazione
- $\mathbf{M}$ è la direzione di polarizzazione che definisce il moto del punto materiale

La fase s della funzione d'onda rappresenta la distanza relativa, nella direzione di $\mathbf{N}$, tra il generico piano $\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}=cost$ perpendicolare alla direzione di propagazione e la posizione istantanea ct del fronte d'onda. Con il segno meno in (2.14) si descrive un'onda che si propaga con velocità c nella direzione positiva individuata dal vettore $\mathbf{N}$.

2.1.3 Condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard

Affinché l'espressione (2.14) sia soluzione delle equazioni di equilibrio e di congruenza deve essere soddisfatta la condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard (Hadamard-1903, Gurtin-1972) che richiede la definizione del tensore acustico e che qui deriviamo.

Nell'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento ("piccole deformazioni"), il tensore di deformazione è fornito dalla parte simmetrica $\boldsymbol{\nabla}^s\mathbf{u}$ del tensore gradiente di spostamento $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}=\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{x}$, il quale si ricava dalla (2.14) per derivazione rispetto alla coordinata spaziale:

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} = \phi'(s)\,\mathbf{M}\otimes\mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\epsilon} = \phi'(s)\,\frac{1}{2}\,(\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}+\mathbf{N}\otimes\mathbf{M}) \tag{2.15}$$

Lo sforzo si ottiene mediante la legge costitutiva elastica di Hooke generalizzata $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}_o{:}\boldsymbol{\epsilon}$ sfruttando le simmetrie minori di $\mathbf{E}_o$,

$$\boldsymbol{\sigma} = \phi'(s)\,\mathbf{E}_o : \mathbf{M}\otimes\mathbf{N} \tag{2.16}$$

Occorre ora imporre il rispetto delle equazioni di equilibrio per forze di volume nulle, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\rho\ddot{\mathbf{u}}$ e quindi calcolare la divergenza del tensore di sforzo,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \phi''(s)\,(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_o\cdot\mathbf{N})\cdot\mathbf{M} = \phi''(s)\,\mathbf{Q}_o\cdot\mathbf{M} \tag{2.17}$$

dove si è definito il *"tensore acustico elastico"* $\mathbf{Q}_o$ il quale è un tensore del 2^o ordine ottenuto mediante due contrazioni tensoriali singole della rigidezza materiale $\mathbf{E}_o$ con la direzione di propagazione $\mathbf{N}$:

$$\boxed{\mathbf{Q}_o = \mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_o\cdot\mathbf{N} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q^o_{jk} = N_i E^o_{ijkl} N_l} \tag{2.18}$$

Il tensore acustico elastico dipende quindi sia dalle proprietà elastiche del materiale che dalla direzione di propagazione del fronte d'onda. $\mathbf{Q}_o$ è simmetrico in conseguenza della simmetria di $\mathbf{E}_o$. Per soddisfare l'equazione del moto non rimane che ottenere l'accelerazione derivando due volte la (2.14) rispetto al tempo, $\ddot{\mathbf{u}}=c^2\,\phi''(s)\,\mathbf{M}$ e sostituendo nell'equazione di equilibrio si ottiene la *"condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard"* (Gurtin-1972):

$$\boxed{\mathbf{Q}_o\cdot\mathbf{M} = \rho\,c^2\,\mathbf{M}} \tag{2.19}$$

Tale condizione si pone come un problema agli autovalori per $\mathbf{Q}_o$. Appare quindi chiaro il significato fisico del tensore acustico, i cui autovalori (ρc_i^2) forniscono le possibili velocità di propagazione d'onda nel mezzo elastico e gli associati autovettori $\mathbf{M}_i$ identificano le direzioni di polarizzazione.

Nel caso di materiale isotropo il tensore acustico si ottiene esplicitamente dall'espressione (2.5) di $\mathbf{E}_o$ e si esprime in termini delle costanti di Lamé λ_o e μ_o:

$$\mathbf{Q}_o = (\lambda_o + \mu_o)\, \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu_o\, \mathbf{i}_2 \tag{2.20}$$

$\mathbf{Q}_o$ è quindi ottenuto con una modifica di rango uno del tensore identità del secondo ordine. La condizione di propagazione $\mathbf{Q}_o{\cdot}\mathbf{M}{=}\rho c^2\mathbf{M}$ si esplicita dalla (2.20) come

$$(\mu_o - \rho\, c^2)\, \mathbf{M} + (\lambda_o + \mu_o)\, (\mathbf{N} \cdot \mathbf{M})\, \mathbf{N} = \mathbf{0} \tag{2.21}$$

Questa espressione è in effetti la stessa equazione ottenibile sostituendo l'espressione (2.14) di onda piana nell'equazione del moto di Navier in termini di spostamento. La condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard rappresenta quindi una condizione necessaria e sufficiente affinché l'onda piana (2.14) sia soluzione dell'equazione elastica del moto (Gurtin-1972). Poiché $\mathbf{N}$ and $\mathbf{M}$ sono due vettori di modulo unitario, ci sono solo due possibilità per soddisfare l'equazione (2.21): $\mathbf{N}\|\mathbf{M}$ oppure $\mathbf{N}\perp\mathbf{M}$.

Nel primo caso la direzione di polarizzazione coincide con la direzione di propagazione e si parla allora di *"onda longitudinale"* o di pressione. La relativa velocità di propagazione c_L si ottiene dalla (2.21) per $\mathbf{N}{=}\mathbf{M}$,

$$(\mu_o - \rho c_L^2)\, \mathbf{N} + (\lambda_o + \mu_o)\, \mathbf{N} = \mathbf{0} \qquad (\forall\, \mathbf{N} \parallel \mathbf{M}) \tag{2.22}$$

che fornisce

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda_o + 2\mu_o}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho}\, \frac{E_o\,(1-\nu_o)}{(1+\nu_o)\,(1-2\nu_o)}} \tag{2.23}$$

È possibile notare che la velocità di propagazione in un continuo elastico incompressibile ($\nu_o{\to}0.5$) tende all'infinito ($c_L{\to}\infty$).

Nel secondo caso la direzione di polarizzazione è normale alla direzione di propagazione e si ottiene una *"onda trasversale"* o di taglio. La velocità di taglio si ottiene dalla (2.21) per $\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{M}{=}0$,

$$(\mu_o - \rho c_S^2)\, \mathbf{M} = \mathbf{0} \qquad (\forall\, \mathbf{M} \perp \mathbf{N}) \tag{2.24}$$

che si riduce a

$$c_S = \sqrt{\frac{\mu_o}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho}\, \frac{E_o}{2\,(1+\nu_o)}} \tag{2.25}$$

La velocità di propagazione trasversale risulta essere sempre inferiore a quella longitudinale:

$$\frac{c_L}{c_S} = \sqrt{\frac{\lambda_o + 2\mu_o}{\mu_o}} = \sqrt{\frac{2\,(1-\nu_o)}{(1-2\nu_o)}} \qquad (0 \le \nu_o \le 1/2) \tag{2.26}$$

Riassumendo, gli autovalori del tensore acustico elastico isotropo sono indipendenti dalla direzione di propagazione in conseguenza dell'ipotesi di isotropia. Due autovalori coincidenti eguagliano il modulo di taglio, e sono associati ad autovettori perpendicolari alla direzione di propagazione. Il terzo autovalore è dato da $\lambda_o+2\mu_o$, con autovettore coincidente con la direzione di propagazione. Viceversa, come verrà illustrato nel seguito della tesi, nel caso elastoplastico o/e con degradazione della rigidezza, l'anisotropia indotta da tali fenomeni irreversibili, causa una variazione delle velocità con la direzione di propagazione.

2.2 Il tensore di localizzazione elastoplastico

La localizzazione delle deformazioni avviene nel caso in cui i fenemeni di dissipazione anelastica si concentrano in una zona ristretta della struttura. Al fine di indagare le condizioni necessarie per l'innesco del fenomeno in un punto materiale del continuo occorre formulare un legame costitutivo che descriva la dissipazione energetica dovuta al processo irreversibile.

Il quadro naturale per lo sviluppo di queste analisi di localizzazione è stato quello della teoria della plasticità (Nadai-1931, Thomas-1961, Hill-1962, Mandel-1965, Stören and Rice-1975, Rudnicki and Rice-1975, Rice-1976), estesamente studiata e sviluppata su basi generali e ben consolidate con descrizioni anche atte a cogliere il comportamento instabile dei materiali elastoplastici (Hill-1958, Maier-1968-69-70-71).

Il tensore di localizzazione elastoplastico è derivabile dal legame costitutivo incrementale espresso in termini della rigidezza tangente ed assume anche il significato fisico di tensore acustico elastoplastico, cioé dell'operatore tensoriale che racchiude le informazioni sulle velocità di propagazione d'onda nei mezzi elastoplastici e sulle relative direzioni di polarizzazione. Prima di giungere alla definizione del tensore di localizzazione appare però opportuno richiamare brevemente le formulazioni della teoria della plasticità nello spazio degli sforzi e delle deformazioni, derivando le espressioni dei relativi operatori di rigidezza tangente.

2.2.1 Gli operatori tangenti elastoplastici

Una legge costitutiva elastoplastica è normalmente fornita per mezzo di relazioni incrementali lineari tra gli incrementi ('rates') di sforzo e deformazione definite dagli *"operatori tangenti elastoplastici"* di rigidezza $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ e di cedevolezza $\mathbf{C}_{\text{EP}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_{\text{EP}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C}_{\text{EP}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.27}$$

Nel caso di scarico elastico $\mathbf{E}_{\text{EP}}=\mathbf{E}_o$ e $\mathbf{C}_{\text{EP}}=\mathbf{C}_o$. Solo per percorsi di carico particolari, ad es. per carichi crescenti monotonamente nel tempo, è possibile integrare le leggi incrementali per ottenere delle relazioni in termini finiti tra sforzo e deformazione, proposte originariamente nell'ambito della cosiddetta *"deformation theory of plasticity"* (Thomas-1961).

La teoria della plasticità si basa sulla definizione di una condizione di plasticità F=0 che definisce il dominio elastico corrente del materiale. La formulazione della funzione di snervamento F può essere esplicitata nello spazio degli sforzi o delle deformazioni. Nell'ambito della teoria della plasticità è senz'altro piú comune la formulazione negli sforzi, che estende al triassiale il concetto di soglia di snervamento conseguente ad una prova monoassiale. La formulazione duale nello spazio delle deformazioni sembra conveniente nel caso di deformazioni anelastiche finite ove, in corrispondenza del "picco" della curva sforzi/deformazioni (punto limite), le formulazioni classiche negli sforzi possono condurre a delle incongruenze (Naghdi and Trapp-1975, Han and Chen-1986). Nel presente contesto di deformazioni infinitesime la formulazione nello spazio delle deformazioni viene presentata per l'importanza che riveste nella descrizione di materiali con perdita di rigidezza elastica (oggetto del Capitolo 3 e formalmente analoga a quella elastoplastica), prevalentemente definita nello spazio delle deformazioni, come tipicamente avviene nella Meccanica del Danneggiamento.

2.2.1.1 Formulazione nello spazio degli sforzi

La condizione di plasticità è definita nello spazio degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ mediante un'equazione del tipo $F[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}]=0$, dove F è la funzione di snervamento e $\mathbf{q}$ rappresenta le variabili interne che definiscono l'evoluzione della funzione di snervamento secondo le leggi di incrudimento assegnate in dipendenza dell'accumulo di deformazione plastica.

Nell'ambito dei piccoli gradienti di spostamento, si assume la decomposizione additiva dell'incremento di deformazione $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ in un contributo elastico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}}$ ed in un addendo plastico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}}$: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}=\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}}+\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}}$. L'incremento di deformazione plastica viene assegnato per mezzo di una legge di flusso caratterizzata dal moltiplicatore plastico $\dot{\lambda}\geq 0$ e dalla direzione di scorrimento plastico $\mathbf{m}$ (eventualmente derivata come gradiente di un potenziale plastico). L'incremento di sforzo viene espresso dalla legge elastica di Hooke generalizzata riferita alla parte elastica della deformazione. Per uno stato del materiale in cui lo sforzo soddisfi la condizione di plasticità $F=0$, cioè suscettibile di ulteriore scorrimento plastico, il fenomeno dissipativo si attiva se $\dot{\lambda}>0$ nel rispetto della *"condizione di consistenza"* plastica $\dot{F}=0$ (*'consistency condition'*). Queste affermazioni sono riassunte dalle quattro equazioni seguenti:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{E}_o : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}}) \\
\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}} &= \dot{\lambda}\,\mathbf{m} \\
\dot{F} &= \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_{\lambda} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H\dot{\lambda} = 0 \\
\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{P}}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Il parametro di 'hardening' H rappresenta il modulo di plasticità e si ottiene dalle leggi di incrudimento per derivazione composta:

$$
H \equiv -\left.\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right|_{\boldsymbol{\sigma}} = -\left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{P}}} : \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{P}}}{\partial \lambda} \tag{2.29}
$$

Nel caso perfettamente elastoplastico, $H=0$; per materiale incrudente, $H>0$ ('hardening'); per materiale ad incrudimento negativo, $H<0$ ('softening'). Il modello si dice associato se i due tensori del 2^o ordine $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{m}$ sono paralleli, cioé se hanno le stesse direzioni principali ed i due insiemi di autovalori legati dalla stessa costante di proporzionalità. Le condizioni di carico/scarico completano la formulazione (2.28) mediante le condizioni di complementarità

$$
\dot{\lambda} \geq 0\,, \qquad F \leq 0\,, \qquad F\dot{\lambda} = 0 \tag{2.30}
$$

Il moltiplicatore plastico si ricava dalla condizione di consistenza e può essere espresso in funzione di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ o di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

Nel primo caso si ottiene l'espressione della rigidezza tangente che definisce il legame incrementale lineare ad incremento di deformazione imposto. Sostituendo le prime due equazioni in (2.28) nella terza, si ottiene l'espressione del moltiplicatore plastico in termini dell'incremento di deformazione:

$$\mathbf{n} : \mathbf{E}_o : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda}\mathbf{m}) - H\dot{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \mathbf{m}} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}}{\bar{H}} \geq 0 \tag{2.31}$$

In questa relazione si richiede $\bar{H}>0$ per ottenere dissipazione plastica positiva per un incremento di sforzo elastico $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}$ diretto verso l'esterno della condizione di plasticità od al limite tangente ($\dot{\lambda}>0$ se ($\mathbf{n}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}>0$) e $\dot{\lambda}=0$ se $\mathbf{n}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}\leq 0$). I valori ammissibili di 'softening' devono essere superiori ad un valore critico $H_c=-\mathbf{n}:\mathbf{E}_o:\mathbf{m}$ corrispondente all'annullamento del denominatore $\bar{H}=0$ per gli assegnati gradienti $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{m}$. Infine, sostituendo il moltiplicatore plastico in $\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{E}_o:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}-\mathbf{E}_o:\mathbf{m}\,\dot{\lambda}$ e raccogliendo $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ a fattor comune, si ottiene l' *"operatore di rigidezza tangente"* per carico plastico ($\dot{\lambda}>0$):

$$\boxed{\mathbf{E}_{\mathrm{EP}} = \mathbf{E}_o - \frac{\mathbf{E}_o : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{E}_o}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \mathbf{m}} \qquad \Leftrightarrow \qquad E^{\mathrm{EP}}_{ijkl} = E^o_{ijkl} - \frac{E^o_{ijrs}\, m_{rs}\, n_{pq}\, E^o_{pqkl}}{H + n_{pq}\, E^o_{pqrs}\, m_{rs}}} \tag{2.32}$$

Nel secondo caso si ricava la cedevolezza tangente che esprime la legge costitutiva incrementale per incremento di sforzo imposto. La condizione di consistenza si risolve immediatamente in funzione di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$,

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H} \tag{2.33}$$

e sostituendo nella legge elastica tra deformazioni e sforzi incrementali,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C}_o : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{m}\,\frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H} = \left(\mathbf{C} + \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}{H}\right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.34}$$

si ricava l' *"operatore di cedevolezza tangente"* per carico plastico:

$$\boxed{\mathbf{C}_{\mathrm{EP}} = \mathbf{C}_o + \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}{H} \qquad \Leftrightarrow \qquad C^{\mathrm{EP}}_{ijkl} = C^o_{ijkl} + \frac{m_{ij}\, n_{kl}}{H}} \tag{2.35}$$

2.2.1.2 Formulazione nello spazio delle deformazioni

Nella formulazione duale la condizione di plasticità viene espressa nello spazio delle deformazioni mediante l'equazione $F[\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{q}}]=0$. Le equazioni in termini incrementali possono essere definite in maniera del tutto analoga a quanto fatto per la formulazione negli sforzi definendo l'incremento di sforzo plastico $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{P}}=-\mathbf{E}_o:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}}$ mediante una legge di scorrimento in generale non associata:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \mathbf{C}_o : (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{P}}) \\
\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{P}} &= \dot{\lambda}\, \bar{\mathbf{m}} \\
\dot{F} &= \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{\lambda} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left.\frac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{q}}}\right|_{\boldsymbol{\epsilon}} \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \bar{H}\,\dot{\lambda} = 0 \\
\dot{\bar{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{P}}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{P}}
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Le quantità soprassegnate sono, a pari simbolo, le corrispondenti della formulazione negli sforzi ed $\bar{H}{\equiv}\partial F/\partial\lambda$ (ad $\boldsymbol{\epsilon}$ costante) rappresenta il modulo di 'hardening' nello spazio delle deformazioni, assunto strettamente positivo. Si può notare che, in conseguenza della definizione di incremento di sforzo plastico utilizzata, le direzioni di scorrimento plastico $\mathbf{m}$ ed $\bar{\mathbf{m}}$ sono correlate tra di loro dalle relazioni

$$
\bar{\mathbf{m}} = -\mathbf{E}_o : \mathbf{m} \quad ; \qquad \mathbf{m} = -\mathbf{C}_o : \bar{\mathbf{m}} \tag{2.37}
$$

che si ottengono mediante eliminazione del moltiplicatore plastico, il quale può assumersi coincidente nei due casi, con definizione opportuna delle due direzioni di flusso.

La condizione di consistenza $\dot{F}{=}0$ si risolve rispetto al moltiplicatore plastico in termini di incrementi di sforzo o di deformazione

$$
\dot{\lambda} = \frac{\bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C}_o : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C}_o : \bar{\mathbf{m}}} \quad ; \qquad \dot{\lambda} = \frac{\bar{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\bar{H}} \tag{2.38}
$$

ottenendo rispettivamente le espressioni della cedevolezza e della rigidezza tangenti

$$
\boxed{\mathbf{C}_{\text{EP}} = \mathbf{C}_o - \frac{\mathbf{C}_o : \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C}_o}{\bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C}_o : \bar{\mathbf{m}}} \quad ; \qquad \mathbf{E}_{\text{EP}} = \mathbf{E}_o + \frac{\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}}} \tag{2.39}
$$

Tali relazioni appaiono essere formalmente le stesse delle (2.35), (2.32), in conseguenza della definizione assunta per $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{P}}$. In effetti le quattro espressioni sono totalmente equivalenti se si considerano, oltre alle relazioni tra $\mathbf{m}$ ed $\bar{\mathbf{m}}$, anche quelle tra $\mathbf{n}$ ed $\bar{\mathbf{n}}$, H ed $\bar{H}$, che ricaviamo qui di seguito (Carol et al.-1994a,b). La relazione tra i gradienti si può ottenere mediante la regola di derivazione di funzioni composte:

$$
\bar{\mathbf{n}} = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_{\lambda} : \left.\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{\lambda} = \mathbf{n} : \mathbf{E}_o = \mathbf{E}_o : \mathbf{n} \quad ; \qquad \mathbf{n} = \mathbf{C}_o : \bar{\mathbf{n}} \tag{2.40}
$$

Si noti che una formulazione negli sforzi associata, con $\mathbf{m}{=}\mathbf{n}$, corrisponde ad una formulazione nelle deformazioni associata con $\bar{\mathbf{m}}{=}{-}\bar{\mathbf{n}}$. Ciò è dovuto alle relazioni (2.37) che derivano dalla definizione assunta per l'incremento di sforzo plastico. La relazione tra i parametri di 'hardening' si può ottenere eguagliando i moltiplicatori plastici nella seconda della (2.38) e nella (2.31), ed utilizzando le (2.40):

$$
\bar{H} = H + \mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \mathbf{m} \quad ; \qquad H = \bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C}_o : \bar{\mathbf{m}} \tag{2.41}
$$

Il parametro di incrudimento $\bar{H}$ deve risultare quindi strettamente positivo, secondo quanto fatto notare in precedenza, per ottenere dissipazione plastica positiva e finita. Anche dal punto di vista fisico, questa conclusione appare appropriata, in quanto ne consegue che il dominio di plasticità nello spazio delle deformazioni può solamente espandersi.

2.2.1.3 Considerazioni sulla forma degli operatori tangenti

A conclusione di questa descrizione degli operatori tangenti elastoplastici, sembra opportuno presentare le seguenti considerazioni.

L'espressione (2.35) della cedevolezza tangente per la formulazione negli sforzi appare piú semplice della corrispondente espressione (2.32) della rigidezza tangente, ma può essere utilizzata soltanto nel caso di incrudimento positivo ($H>0$), per il quale è possibile definire la risposta incrementale in termini di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$. Il caso perfettamente elastoplastico o con 'softening' non può quindi essere trattato. Nel caso di legge di scorrimento associata ($\mathbf{m}=\mathbf{n}$ o $\bar{\mathbf{m}}=-\bar{\mathbf{n}}$) gli operatori tangenti soddisfano non solo le condizioni di simmetria minori ma anche le maggiori, e quindi tutte le simmetrie degli operatori elastici vengono mantenute.

Gli operatori tangenti sono ottenuti con una modifica di rango uno dei relativi operatori elastici. Come già fatto notare per l'operatore elastico, è quindi possibile utilizzare l'inversione di Sherman and Morrison-1950 per passare dalla rigidezza alla cedevolezza tangente o viceversa. Con modifica di rango uno si intende dire che il termine del tipo $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ che si aggiunge o sottrae al tensore elastico è un tensore del 4^o ordine di rango uno, cioé un tensore con un unico autovalore eventualmente diverso da zero. Ciò comunque non significa che un solo autovalore elastico viene ad essere modificato, in quanto in generale sono due gli autovalori elastici che cambiano di valore. Per dimostrarlo si può considerare la decomposizione di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ nelle loro parti volumetriche e deviatoriche, ottenendo, per il prodotto tensoriale esterno $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$, la seguente espansione:

$$(\mathbf{a}_v + \mathbf{a}_d) \otimes (\mathbf{b}_v + \mathbf{b}_d) = \mathbf{a}_v \otimes \mathbf{b}_v + \mathbf{a}_d \otimes \mathbf{b}_d + \mathbf{a}_v \otimes \mathbf{b}_d + \mathbf{a}_d \otimes \mathbf{b}_v \tag{2.42}$$

I due ultimi prodotti tensoriali in (2.42) non danno contributi in quanto formano tensori del 4^o ordine con autovalori identicamente nulli. Infatti, considerando la traccia della rappresentazione matriciale $[\mathbf{a}_v\otimes\mathbf{b}_d]$ del tensore $\mathbf{a}_v\otimes\mathbf{b}_d$, nella quale $\mathbf{a}_v=tr[\mathbf{a}]/3\,\mathbf{i}_2$ si ottiene

$$\begin{aligned} tr[[\mathbf{a}_v \otimes \mathbf{b}_d]] &= a^v_{11}b^d_{11} + a^v_{22}b^d_{22} + a^v_{33}b^d_{33} + a^v_{12}b^d_{12} + a^v_{13}b^d_{13} + a^v_{23}b^d_{23} \\ &= \frac{tr[\mathbf{a}_v]}{3}\ (b^d_{11} + b^d_{22} + b^d_{33}) = \frac{tr[\mathbf{a}_v]}{3}\ tr[\mathbf{b}_d] = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

essendo nulla la traccia di $\mathbf{b}_d$. Quindi anche l'unico possibile autovalore non nullo, uguale alla traccia del tensore di rango uno, svanisce. Le stesse considerazioni si possono ripetere per l'altro termine $\mathbf{a}_d\otimes\mathbf{b}_v$. Il primo temine di (2.42) col prodotto tensoriale delle due parti volumetriche risulta proporzionale all'operatore $\mathbf{P}_v$, infatti $\mathbf{a}_v\otimes\mathbf{b}_v=tr[\mathbf{a}_v]tr[\mathbf{b}_v]/3\,\mathbf{P}_v$. Gli autotensori $\mathbf{x}$ di $\mathbf{a}_v\otimes\mathbf{b}_v$ coincidono con quelli di $\mathbf{P}_v$ e gli autovalori risultano $\Omega=0$ $\forall\mathbf{x}_d$ ed $\Omega=tr[\mathbf{a}_v]tr[\mathbf{b}_v]/3$ per $\mathbf{x}=\mathbf{i}_2$. Quindi solo l'autovalore $3K$ di $\mathbf{E}_o$ viene modificato e diventa $3K+tr[\mathbf{a}_v]tr[\mathbf{b}_v]/3$. Per il secondo addendo in (2.42), il problema agli autovalori $(\mathbf{a}_d\otimes\mathbf{b}_d)$:$\mathbf{x}=\Omega\mathbf{x}$ risulta simile a quello dell'operatore $\mathbf{P}_d$ e fornisce $\Omega=0$ per $\mathbf{x}=\mathbf{i}_2$, $\Omega=\mathbf{b}_d:\mathbf{a}_d$ per $\mathbf{x}=\mathbf{a}_d$. Per effetto di questo termine solo l'autovalore di taglio $2G$ si modifica in $2G+\mathbf{b}_d:\mathbf{a}_d$. Riassumendo, si può concludere che, in generale, due autovalori di $\mathbf{E}_o$ vengono modificati qualora i due tensori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ contengano entrambi una parte volumetrica ed una parte deviatorica. Se uno dei due tensori od entrambi sono puramente volumetrici/deviatorici solo l'autovalore di volume/taglio viene cambiato. Le proprietà spettrali del tensore elastico non sono alterate qualora uno dei due tensori sia puramente deviatorico e l'altro puramente volumetrico. Nel caso classico, in teoria della plasticità, di legge di scorrimento puramente deviatorica, $\mathbf{m}$=$\mathbf{m}_d$, l'autovalore di volume non viene modificato e solo l'autovalore di taglio cambia. Di conseguenza, anche per legge non associata con operatore tangente non simmetrico, si può escludere a priori la possibilità di autovalori complessi coniugati, e lo spettro di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ rimane reale.

2.2.2 Condizioni di singolarità dell'operatore tangente

Un primo *"indice di rovina"* (*'failure indicator'*) al livello materiale è costituito dalla perdita di unicità della risposta incrementale in corrispondenza di un *"punto limite"* (*'limit point'*) ove lo stato di sforzo risulta stazionario ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}$=$\mathbf{0}$) per determinati incrementi di deformazione critici. Si ha cioè una perdita di unicità della risposta incrementale, denunciata dalla singolarità dell'operatore di rigidezza tangente. Questa condizione di rovina verrà indicata col termine *"rovina diffusa"* o *"rovina continua"* (*'diffuse failure'* o *'continuous failure'*) nel senso che avviene con deformazioni incrementali ('rates') spazialmente continue all'interno del solido, in contrapposizione alla *"rovina localizzata"* o *"rovina discontinua"* (*'localized failure'* o *'discontinuous failure'*) che si manifesta con discontinuità spaziale delle deformazioni incrementali. Un altro indice di rovina continua è quello legato alla perdita di *"stabilità in piccolo"* ottenuta quando il lavoro infinitesimo del 2^o ordine d^2W=$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$:$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ si annulla (Hill-1958, Drucker-1964). Questa condizione è quella necessaria per ogni tipo di biforcazione al livello materiale (Neilsen and Schreyer-1993, de Borst et al.-1993) e come vedremo tra poco rappresenta una condizione forte di rovina continua (nel senso che risulta piú restrittiva della condizione $det[\mathbf{E}_{\text{EP}}]$=0, come spiegato piú avanti).

Secondo il primo criterio di '<u>c</u>ontinuous <u>f</u>ailure' la perdita di unicità è associata all'annullamento dell'incremento di sforzo in corrispondenza di un incremento di deformazione critico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf}$ non nullo e di conseguenza all'annullamento del determinante di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_{\text{EP}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf} = \mathbf{0} \quad \text{per} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf} \neq \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad det[\mathbf{E}_{\text{EP}}] = 0 \tag{2.44}$$

Tale condizione di singolarità può essere studiata risolvendo il problema agli autovalori $\mathbf{E}_{\text{EP}}$:$\mathbf{x}$=$\Omega\,\mathbf{x}$ (si veda il Capitolo 4) oppure direttamente ipotizzando un incremento critico di deformazione proporzionale alla direzione di scorrimento plastico $\mathbf{m}$. La singolarità si manifesta in corrispondenza del punto limite ove H=0:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad H_{cf} = 0 \qquad \text{con} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf} = \alpha\,\mathbf{m} \tag{2.45}$$

Quanto detto è facilmente dimostrabile sostituendo l'incremento critico di deformazione ipotizzato nella legge incrementale:

$$\mathbf{E}_{\text{EP}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf} = \alpha \left(\mathbf{E}_o : \mathbf{m} - \frac{\mathbf{E}_o : \mathbf{m}\,(\mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \mathbf{m})}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \mathbf{m}} \right) = \frac{\alpha\, H}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \mathbf{m}}\,(\mathbf{E}_o : \mathbf{m}) = \mathbf{0} \tag{2.46}$$

che implica H=0 in quanto il termine $\bar{H}$ a denominatore è assunto positivo ed $\mathbf{E}_o$:$\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$ per $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$.

Runesson and Mroz-1989 hanno fornito soluzioni dei problemi agli autovalori generalizzati $\mathbf{E}_{\text{EP}}{:}\mathbf{x}{=}\Omega^*\,\mathbf{E}_o{:}\mathbf{x}$ ed $\mathbf{E}^s_{\text{EP}}{:}\mathbf{x}{=}\Omega^*\,\mathbf{E}_o{:}\mathbf{x}$, in cui $\mathbf{E}^s_{\text{EP}}{=}(\mathbf{E}_{\text{EP}}{+}\mathbf{E}^{\text{T}}_{\text{EP}})/2$ indica la parte simmetrica di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$, nel caso di leggi associate o non associate. Nel caso non associato, due degli autovalori Ω^* possono deviare dal valore elastico unitario, mentre per leggi associate uno solo degli autovalori normalizzati può risultare diverso da 1, in corrispondenza di un autotensore proporzionale ad $\mathbf{m}{=}\mathbf{n}$: $\Omega^*_1{=}H/\bar{H}$, $\Omega^*_k{=}1$ per $k{=}2,3,...,6$. Secondo quanto esposto in precedenza, possiamo comunque affermare che anche in questo caso due autovalori di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ vengono modificati rispetto ai loro valori elastici, anche se un solo autovalore di $\mathbf{E}^{-1}_o{:}\mathbf{E}_{\text{EP}}$ differisce da 1. Il problema generalizzato agli autovalori non fornisce quindi direttamente le autosoluzioni del problema agli autovalori di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ ma risulta utile per determinare le condizioni di singolarità dell'operatore tangente medesimo.

La condizione di punto limite è una condizione debole di rovina diffusa (nel senso che risulta la meno restrittiva). L'altro criterio di rovina diffusa si riferisce alla perdita di stabilità corrispondente all'annullamento del lavoro infinitesimo del secondo ordine per un processo plastico:

$$d^2W = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}_{\text{EP}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}^s_{\text{EP}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0 \quad \text{per} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{scf} \neq \mathbf{0} \tag{2.47}$$

Alla forma quadratica d^2W contribuisce solo la parte simmetrica di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ a causa della simmetria di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Di conseguenza, se l'operatore tangente non è simmetrico per leggi non associate ($\mathbf{n}{\neq}\mathbf{m}$), le proprietà spettrali di $\mathbf{E}^s_{\text{EP}}$ che governano questo criterio differiscono da quelle di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$. Lo spettro del tensore $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ rimane comunque compreso in quello delle sue parti simmetrica $\mathbf{E}^s_{\text{EP}}$ ed antisimmetrica $\mathbf{E}^a_{\text{EP}}{=}(\mathbf{E}_{\text{EP}}{-}\mathbf{E}^{\text{T}}_{\text{EP}})/2$, a causa delle diseguaglianze di Bromwich (si veda Mirsky-1955):

$$\begin{aligned} \Omega_{min}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\text{EP}}+\mathbf{E}^{\text{T}}_{\text{EP}})\right] \;&\leq\; \mathcal{R}\left(\Omega[\mathbf{E}_{\text{EP}}]\right) \;\leq\; \Omega_{max}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\text{EP}}+\mathbf{E}^{\text{T}}_{\text{EP}})\right] \\ \Omega_{min}\left[\frac{1}{2i}(\mathbf{E}_{\text{EP}}-\mathbf{E}^{\text{T}}_{\text{EP}})\right] \;&\leq\; \mathcal{I}\left(\Omega[\mathbf{E}_{\text{EP}}]\right) \;\leq\; \Omega_{max}\left[\frac{1}{2i}(\mathbf{E}_{\text{EP}}-\mathbf{E}^{\text{T}}_{\text{EP}})\right] \end{aligned} \tag{2.48}$$

dove $\mathcal{R}$ e $\mathcal{I}$ indicano rispettivamente la parte reale ed immaginaria di un numero complesso. Un autovalore di $\mathbf{E}^s_{\text{EP}}$ si può quindi annullare mentre il corrispondente autovalore di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ rimane ancora positivo. Di conseguenza la condizione di perdita di stabilità risulta piú restrittiva della condizione di punto limite se assunta come indice di rovina continua e verrà denominata come forte ('*strong continuous failure*'). A dimostrazione di queste considerazioni si ricorda che Maier and Hueckel-1979 hanno fornito un'espressione esplicita del modulo di 'hardening' H_{scf} necessario per attivare la condizione forte di rovina continua:

$$H_{scf} = \frac{1}{2}\;\left(\sqrt{(\mathbf{n}:\mathbf{E}_o:\mathbf{n})\,(\mathbf{m}:\mathbf{E}_o:\mathbf{m})} - (\mathbf{n}:\mathbf{E}_o:\mathbf{m})\right) \geq H_{cf} = 0 \tag{2.49}$$

Il modulo H_{scf} risulta maggiore od uguale ad $H_{cf}{=}0$. H_{scf} si annulla solo se la legge di scorrimento è associata. Nel Capitolo 4 si presenta una derivazione indipendente dell'espressione (2.49). Concludendo, la perdita di stabilità $d^2W{=}0$ nel caso non associato può avvenire durante il regime incrudente quando la condizione di punto limite $det[\mathbf{E}_{\text{EP}}]{=}0$ non è stata ancora attivata.

2.2.3 Le condizioni di compatibilità e di propagazione di Hadamard

Lo studio della localizzazione delle deformazioni può essere inquadrato nell'ambito della propagazione di *"onde d'accelerazione"* (*'acceleration waves'*) nei continui tridimensionali (Hill-1962, Mandel-1965, Gurtin-1972, Achenbach-1973). In questo caso la perturbazione creata dal fronte d'onda è costituita da una singolarità detta del 2^o ordine, cioè riguardante variabili ottenute dallo spostamento mediante due derivazioni rispetto alle coordinate spaziali e/o temporali: l'accelerazione ed il gradiente spaziale di velocità. La velocità e lo spostamento rimangono continui. In altre parole, indicando con '+' e '−' le due parti del corpo divise dalla superficie di discontinuità, si ha "salto" nullo nel campo di velocità $\dot{\mathbf{u}}$ ma discontinuità possibile per il gradiente di velocità $\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}=\partial\dot{\mathbf{u}}/\partial\mathbf{x}$ nel passare da un punto nella zona '+' immediatamente vicino alla superficie al punto corrispondente nella parte '−':

$$[\![\dot{\mathbf{u}}]\!] = \dot{\mathbf{u}}^{+} - \dot{\mathbf{u}}^{-} = \mathbf{0}\;; \qquad\qquad [\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!] = \boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}^{+} - \boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}^{-} \neq \mathbf{0} \tag{2.50}$$

La discontinuità del tensore gradiente di velocità implica discontinuità delle ("piccole") deformazioni incrementali $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, che si ottengono come parte simmetrica di $\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}$,

$$[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!] = \frac{1}{2}\,[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}]\!] \neq \mathbf{0} \tag{2.51}$$

La forma compatibile del salto del gradiente di velocità $[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!]$ viene fornita dalle *"condizioni di compatibilità di Maxwell"* ricavate originariamente da Maxwell-1873 nel definire la variazione di potenziale elettrico attraverso una superficie di discontinuità (si vedano le Eq. 7-9 nel punto 78a a pag. 91 dell'edizione citata in bibliografia). L'equazione che governa la propagazione di onde d'accelerazione è definita dalla *"condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard"*, che conduce alla definizione del tensore acustico elastoplastico. Viene qui riproposta la derivazione di queste condizioni fondamentali nell'analisi di localizzazione (Lubliner-1990, Ottosen and Runesson-1991b).

Si consideri un fronte d'onda $\mathcal{F}$ che si propaga nello spazio con velocità c nella direzione definita puntualmente da un versore $\mathbf{N}$. Si assume che una funzione temporale di campo $f[\mathbf{x},t]$ sia continua attraverso il fronte d'onda, $[\![f]\!]=0$, ma che possa ammettere derivate discontinue attraverso tale fronte, $[\![\partial f]\!]\neq 0$, e costanti lungo $\mathcal{F}$. Considerando un punto $\mathbf{x}$ del fronte $\mathcal{F}$ all'istante di tempo t, questo si sposterà di $d\mathbf{x}=\mathbf{N}\,c\,dt$ nella direzione $\mathbf{N}$ nel tempo infinitesimo dt e la funzione f varierà di

$$df = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathbf{N}\, c\, dt + \dot{f}\; dt \tag{2.52}$$

dove $\dot{f}=\partial f/\partial t$. Per la supposta continuità del campo f attraverso $\mathcal{F}$ si deve avere $[\![df]\!]=0$ e quindi

$$c\,[\![\,\boldsymbol{\nabla} f\,]\!] \cdot \mathbf{N} = -[\![\dot{f}]\!] \tag{2.53}$$

Questa relazione lega i "salti" delle derivate prime spaziale e temporale della funzione f. Poichè la discontinuità di f è supposta costante lungo $\mathcal{F}$ sarà solo la componente di $[\![\boldsymbol{\nabla} f]\!]$ lungo $\mathbf{N}$ a presentare un salto, cioè possiamo assumere $c\,[\![\boldsymbol{\nabla} f]\!]=\alpha\mathbf{N}$, ove α è una quantità scalare. Sostituendo nella relazione (2.53) si ottiene la *"condizione di compatibilità di*

Hadamard":

$$\boxed{c\,[\![\boldsymbol{\nabla} f\,]\!] = -[\![\dot{f}]\!]\ \mathbf{N}} \tag{2.54}$$

Nel caso di onde d'accelerazione sia $f{=}\dot{u}_i$. Si hanno quindi discontinuità del 2^o ordine con: $[\![\dot{\mathbf{u}}]\!]{=}\mathbf{0}$, $[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!]{\neq}\mathbf{0}$, $[\![\ddot{\mathbf{u}}]\!]{\neq}\mathbf{0}$, soddisfacenti alla relazione

$$c\,[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!] = -[\![\ddot{\mathbf{u}}]\!] \otimes \mathbf{N} \tag{2.55}$$

Introducendo un versore $\mathbf{M}$ tale per cui $[\![\ddot{\mathbf{u}}]\!]{=}[\![\ddot{u}]\!]\,\mathbf{M}$, si ottiene la *"condizione di compatibilità di Maxwell"* per la forma cinematica ammissibile della discontinuità del gradiente di velocità:

$$\boxed{[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!] = \frac{-[\![\ddot{u}]\!]}{c}\,\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} = \dot{\gamma}\,\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}} \tag{2.56}$$

dove $\dot{\gamma}{=}{-}[\![\ddot{\mathbf{u}}]\!]/c{>}0$ indica l'ampiezza indeterminata del salto.

Utilizzando ancora la condizione di compatibilità (2.54) per $f{=}\sigma_{ij}$ si può ricavare il salto della $div[\boldsymbol{\sigma}]$ come

$$c\,[\![\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}]\!] = -[\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!] \cdot \mathbf{N} \tag{2.57}$$

Sostituendo in questa espressione la relazione di equilibrio $[\![\boldsymbol{\nabla}{\cdot}\boldsymbol{\sigma}]\!]{=}\rho\,[\![\ddot{\mathbf{u}}]\!]$ e la relazione costitutiva incrementale $[\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!]{=}\mathbf{E}_{\text{EP}}{:}[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]$, si supponga "carico" in regime plastico in ambo i lati del fronte d'onda con operatore tangente continuo attraverso $\mathcal{F}$. In tal caso, con $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ dato dalla (2.51), si ottiene:

$$\rho\,c^2\,[\![\ddot{\mathbf{u}}]\!] = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_{\text{EP}} : \frac{1}{2}([\![\ddot{\mathbf{u}}]\!] \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes [\![\ddot{\mathbf{u}}]\!]) = \mathbf{Q}_{\text{EP}} \cdot [\![\ddot{\mathbf{u}}]\!] \tag{2.58}$$

dove si sono usate le simmetrie minori di $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ e si è definito il *"tensore acustico elastoplastico"* $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$,

$$\boxed{\mathbf{Q}_{\text{EP}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_{\text{EP}} \cdot \mathbf{N} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q^{\text{EP}}_{ih} = N_j E^{\text{EP}}_{jihk} N_k} \tag{2.59}$$

Il tensore acustico elastoplastico dipende dalle proprietà del materiale, dallo stato di sforzo corrente e dalla direzione di propagazione $\mathbf{N}$. Il tensore del 2^o ordine $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ è simmetrico se e solo se $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ è simmetrico (GURTIN-1972).

Infine, considerando che si è posto $[\![\ddot{\mathbf{u}}]\!]{=}[\![\ddot{u}]\!]\,\mathbf{M}$ e semplificando $[\![\ddot{u}]\!]{\neq}0$ nell'Eq. (2.58), si ottiene la *"condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard"*:

$$\boxed{\mathbf{Q}_{\text{EP}} \cdot \mathbf{M} = \rho\,c^2\,\mathbf{M}} \tag{2.60}$$

Le proprietà spettrali di $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ definiscono quindi le condizioni di propagazione di un'onda d'accelerazione in un mezzo elastoplastico: (ρc_i^2) sono gli autovalori di $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ e le direzioni di polarizzazione sono i relativi autovettori $\mathbf{M}_i$. Se le direzioni di polarizzazione sono note, moltiplicando scalarmente la condizione (2.60) per $\mathbf{M}$ si ottiene la velocità di propagazione in termini della forma quadratica associata a $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{Q}_{\text{EP}}\cdot\mathbf{M}=\rho\, c^2 \tag{2.61}$$

La stessa equazione (2.60) governa anche la propagazione di onde piane in un mezzo elastoplastico, $\mathbf{u}{=}\phi(\mathbf{x}{\cdot}\mathbf{N}{-}ct)\,\mathbf{M}$, non necessariamente coinvolgenti discontinuità del secondo ordine (quando cioè $\phi(s)$ sia C^1 ed esista la derivata seconda $\phi''(s)$, eventualmente non continua); in tale contesto la (2.60) si può ottenere in modo simile a quanto già presentato per il caso elastico.

La condizione di compatibilità di Maxwell può essere ottenuta anche in ambito statico, in modo del tutto indipendente dalla teoria di propagazione di onde d'accelerazione (Ottosen and Runesson-1991b). Si consideri un campo vettoriale $\mathbf{v}{=}\mathbf{v}(\mathbf{x})$ costante su di una superficie S. La derivata direzionale lungo S, nella direzione individuata da un versore arbitrario $\mathbf{T}$ tangente ad S, deve quindi annullarsi

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial s}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{0} \tag{2.62}$$

Di conseguenza il vettore $\partial v_1/\partial\mathbf{x}$ deve essere perpendicolare a $\mathbf{T}$, cioè $\partial v_1/\partial\mathbf{x}{=}M_1'\,\mathbf{N}$, dove $\mathbf{N}{\perp}\mathbf{T}$ ed M_1' è uno scalare arbitrario. Analoghe considerazioni valgono per gli altri vettori $\partial v_2/\partial\mathbf{x}$, $\partial v_3/\partial\mathbf{x}$, quindi

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=M_i'\,N_k \qquad\Leftrightarrow\qquad \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{M}'\otimes\mathbf{N} \tag{2.63}$$

Ponendo $\mathbf{v}{=}[\![\dot{\mathbf{u}}]\!]{=}\mathbf{0}$ lungo la superficie S ritroviamo la forma di discontinuità ammissibile per $[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!]$:

$$\boldsymbol{\nabla}[\![\dot{\mathbf{u}}]\!]=[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!]=\mathbf{M}'\otimes\mathbf{N}=\dot\gamma\,\mathbf{M}\otimes\mathbf{N} \tag{2.64}$$

Risulta sempre possibile scegliere un particolare sistema di riferimento che semplifica la rappresentazione di $[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!]$ in termini delle sue componenti (Neilsen and Schreyer-1993). Infatti scegliendo un riferimento cartesiano con l'asse x_1 allineato secondo la direzione $\mathbf{N}$ e l'asse x_2 sulla superficie di discontinuità scelto in modo tale che il piano (x_1,x_2) contenga il vettore $\mathbf{M}$, i due vettori $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{M}$ si esprimono come

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}}=[\,1\ \ 0\ \ 0\,] \qquad\qquad \mathbf{M}^{\mathrm{T}}=[\,\alpha\ \ 2\beta\ \ 0\,] \tag{2.65}$$

dove, affiché $\mathbf{M}$ abbia modulo unitario, $\alpha^2{+}4\beta^2{=}1$. Se $\alpha{=}0$, cioè $\mathbf{M}{\perp}\mathbf{N}$, si ha Modo-II. Si ottiene Modo-I qualora $\beta{=}0$, che implica $\mathbf{M}\|\mathbf{N}$. Esplicitando il prodotto tensoriale in questo sistema di riferimento, si ottiene:

$$[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!]=\dot\gamma\begin{bmatrix}\alpha&0&0\\2\beta&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]=\dot\gamma\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0\\\beta&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Gli autovalori del salto dell'incremento di deformazione si determinano come

$$\eta_1=\dot\gamma\,\frac{\alpha+1}{2}>0\,;\qquad \eta_2=0\,;\qquad \eta_3=\dot\gamma\,\frac{\alpha-1}{2}<0 \tag{2.67}$$

Il modo di biforcazione $[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]$ possiede sempre un autovalore positivo ed uno negativo, con l'autovalore intermedio nullo. Questa proprietà può essere utilizzata per individuare la condizione di localizzazione $\rho c^2{=}0$, evitando di risolvere il problema agli autovalori di $\mathbf{Q}^s_{\text{EP}}$. Se un tensore $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, soddisfacente la condizione necessaria per ogni tipo di biforcazione $d^2W{=}0$, risulta anche del tipo (2.66), la perdita di stabilità segnala anche l'innesco di localizzazione (Neilsen and Schreyer-1993).

Riassumendo, si sono qui derivate le due relazioni fondamentali nell'analisi di localizzazione per definire un criterio meno restrittivo (debole) ed una condizione piú restrittiva (forte) di innesco del fenomeno al livello del materiale: la condizione di compatibilità cinematica di Maxwell e la condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard, che vengono qui riportate,

$$\boxed{\begin{aligned} [\![\nabla \dot{\mathbf{u}}]\!] &= \dot{\gamma}\, \mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \\ \rho\, c^2 &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_{\text{EP}} \cdot \mathbf{M} \end{aligned}} \tag{2.68}$$

2.3 Le condizioni di localizzazione debole e forte

L'innesco della localizzazione al livello materiale si può studiare con due approcci duali che possono condurre a risultati differenti nel caso generale di leggi costitutive non associate per le quali il tensore di localizzazione elastoplastico $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ non risulta simmetrico. Anche in questo caso si ottengono una condizione debole ed una forte di singolarità (nel senso che la seconda è quella che risulta piú restrittiva anche se entrambe sono definite al livello puntuale). Nel primo approccio, l'analisi di localizzazione prende origine dalla definizione della forma cinematica compatibile di discontinuità delle deformazioni incrementali in ambito statico. La condizione di singolarità si ottiene dall'equazione di equilibrio statico all'interfaccia di discontinuità utilizzando le condizioni di compatibilità cinematica di Maxwell. Nel secondo approccio, nel quadro della teoria di propagazione d'onda nei mezzi elastoplastici, l'innesco di biforcazione risulta dalla stazionarietà di propagazione del fronte d'onda, quando la velocità di propagazione si annulla per particolari direzioni di propagazione e di polarizzazione.

2.3.1 Localizzazione come condizione di discontinuità cinematica

In ambito statico, le condizioni di compatibilità di Maxwell forniscono la forma cinematicamente ammissibile del salto del gradiente di velocità e, di conseguenza, delle deformazioni incrementali attraverso la superficie di normale $\mathbf{N}$

$$[\![\nabla \dot{\mathbf{u}}]\!] = \dot{\gamma}\, \mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \tag{2.69}$$

Il parametro $\dot{\gamma}{>}0$ definisce l'ampiezza indeterminata del salto. La condizione di equilibrio all'interfaccia tra le due porzioni di solido divise dalla superficie di discontinuità impone il rispetto del lemma di Cauchy:

$$[\![\dot{\mathbf{t}}]\!] = \mathbf{N} \cdot [\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!] = \mathbf{0} \tag{2.70}$$

Nel seguito si indaga la possibilità di biforcazione in campo plastico per entrambe le zone del corpo divise dalla superficie di discontinuità. Infatti Rice and Rudnicki-1980, Borré and Maier-1989 ed Ottosen and Runesson-1991a hanno mostrato che tale condizione non può essere mai preceduta da "biforcazione elastica/plastica" in cui si abbia scarico elastico da un lato della superficie di discontinuità e carico plastico dall'altro.

Utilizzando la forma compatibile di Maxwell nella legge elastoplastica incrementale ed assumendo che $\mathbf{E}_{\text{EP}}$ sia continuo attraverso la superficie di discontinuità ($[\![\dot{\boldsymbol{\sigma}}]\!]=\mathbf{E}_{\text{EP}}:[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]$) ricaviamo $\dot{\gamma}E^{\text{EP}}_{ijhk}N_kM_hN_i=0$. Ciò conduce alla definizione del tensore di localizzazione elastoplastico $Q^{\text{EP}}_{jh}=N_i\,E^{\text{EP}}_{ijhk}\,N_k$ e la condizione precedente può riscriversi come

$$\boxed{\dot{\gamma}\,Q^{\text{EP}}_{jh}M_h=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\gamma}\,\mathbf{Q}_{\text{EP}}\cdot\mathbf{M}=\mathbf{0}} \tag{2.71}$$

La possibilità di un salto non nullo del gradiente di velocità, con $\dot{\gamma}>0$ ed $\mathbf{M}\neq\mathbf{0}$, fornisce la condizione di localizzazione intesa come singolarità del tensore di localizzazione elastoplastico, $det[\mathbf{Q}_{\text{EP}}]=0$. Tale condizione viene di solito chiamata anche *"perdita di ellitticità"*, nel senso che le equazioni differenziali di equilibrio statico perdono la loro caratteristica ellittica. Questa singolarità rappresenta una condizione debole di localizzazione in quanto risulta legata direttamente alle proprietà spettrali di $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$. La singolarità del tensore di localizzazione può attivarsi per una certa direzione critica $\mathbf{N}$ dipendente dalla stato di sforzo considerato.

Si noti che le due condizioni di rovina continua e discontinua non coincidono in generale neanche nel caso di leggi associate: per stati di sforzo particolari l'operatore di rigidezza tangente può risultare singolare mentre può non esserlo il tensore di localizzazione. Ad es., in stato di sforzo piano equibiassiale $\sigma_1=\sigma_2$, nel caso di elastoplasticità perfetta associata di von Mises, il tensore di localizzazione non diviene mai singolare mentre $det[\mathbf{E}_{\text{EP}}]=0$ per $H=0$ (si veda la Sez. 2.5). Inoltre anche il modo cinematico di rovina è in generale differente: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf}\neq[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]_{df}$.

2.3.2 Localizzazione come stazionarietà del fronte d'onda

La stazionarietà del fronte d'onda si ottiene quando $c\rightarrow 0$ per alcune direzioni di propagazione e di polarizzazione. Ciò conduce all'annullamento della forma quadratica

$$\boxed{\rho\,c^2=\mathbf{M}\cdot\mathbf{Q}_{\text{EP}}\cdot\mathbf{M}=0} \tag{2.72}$$

Anche in questo caso sono valide le considerazioni dedotte in precedenza circa le diseguaglianze di Bromwich: $(\rho\,c^2)_{min}[\mathbf{Q}^s_{\text{EP}}]\leq\mathcal{R}(\rho\,c^2)_{min}[\mathbf{Q}_{\text{EP}}]$, cioè l'autovalore minimo di $\mathbf{Q}^s_{\text{EP}}$ è sempre inferiore alla parte reale dell' autovalore corrispondente di $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$. La condizione di stazionarietà del fronte d'onda è quindi una condizione forte di localizzazione e viene solitamente indicata come *"perdita di ellitticità forte"* (*'loss of strong ellipticity'*) delle equazioni di equilibrio statico (oppure come "perdita di iperbolicità forte" delle equazioni del moto). Concludendo, la velocità di propagazione può annullarsi precedentemente alla singolarità del tensore di localizzazione e costituisce quindi una condizione di localizzazione piú restrittiva nel caso di operatori non simmetrici.

2.4 Gli autovalori del tensore di localizzazione elastoplastico

La trattazione del problema di localizzazione nel caso elastoplastico è stata considerata attivamente in letteratura (ad es. si vedano i lavori di Rudnicki and Rice-1975, Bigoni and Hueckel-1991, Neilsen and Schreyer-1993). Riguardo la soluzione del problema agli autovalori del tensore di localizzazione elastoplastico, si segnalano tre pubblicazioni di fattura e terminologia omogenea che forniscono risultati analitici per materiali elastoplastici con leggi non associate piuttosto generali.

Ottosen and Runesson-1991a risolvono la condizione di localizzazione $det[\mathbf{Q}_{\text{EP}}]$=0 nel caso tridimensionale, in termini dei valori critici dei parametri di incrudimento e delle direzioni di localizzazione. In un lavoro successivo, Runesson et al.-1991 presentano risultati analoghi anche per il caso bidimensionale di deformazione o sforzo piano mostrando le differenze esistenti rispetto all'analisi tridimensionale. Infine, in un terzo contributo, Ottosen and Runesson-1991b propongono la soluzione esplicita del problema agli autovalori del tensore acustico $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ in termini di autovalori ed autovettori e discutono la possibilità di velocità di propagazione immaginarie.

La condizione di localizzazione $det[\mathbf{Q}_{\text{EP}}]$=0 viene compattata in una relazione scalare piú semplice, considerando il problema agli autovalori generalizzato $\mathbf{Q}_{\text{EP}}\cdot\mathbf{x}=\omega^*\mathbf{Q}_o\cdot\mathbf{x}$, cioè l'autoproblema $(\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot\mathbf{Q}_{\text{EP}})\cdot\mathbf{x}=\omega^*\mathbf{x}$ della matrice $\mathbf{B}=\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot\mathbf{Q}_{\text{EP}}=\mathbf{i}_2-\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})/\bar{H}$, in cui $\mathbf{a}=\mathbf{n}:\mathbf{E}_o\cdot\mathbf{N}$ e $\mathbf{b}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_o:\mathbf{m}$ sono i *'traction vectors'* (Hill-1962). Nel caso di elasticià isotropa il tensore acustico elastico può essere invertito con la formula di Sherman and Morrison-1950:

$$\mathbf{Q}_o = \mu\mathbf{i}_2 + (\lambda+\mu)\,(\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}_o^{-1} = \frac{1}{\mu}\,\mathbf{i}_2 - \frac{\lambda+\mu}{\mu\,(\lambda+2\mu)}\,(\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}) \tag{2.73}$$

Risulta immediato mostrare che 1 è un autovalore doppio di $\mathbf{B}$ (i.e. $\omega_1^*=\omega_2^*=1$). Infatti, sostituendo ω^*=1 nel problema agli autovalori generalizzato si ottiene un sistema omogeneo per la matrice $\mathbf{B}-\mathbf{i}_2=-(\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot\mathbf{b})\otimes\mathbf{a}/\bar{\mathbf{H}}=\mathbf{c}\otimes\mathbf{a}$, che è singolare in quanto due delle sue righe sono proporzionali alla rimanente. Il terzo autovalore normalizzato si determina considerando che $tr[\mathbf{B}]=3-\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot\mathbf{b}/\bar{H}=2+\omega_3^*$ e quindi

$$\boxed{\omega_3^* = 1 - \frac{1}{\bar{H}}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot\mathbf{b}} \tag{2.74}$$

La condizione di localizzazione si riduce all'annullamento dell'autovalore normalizzato ω_3^*=0 che corrisponde all' *"indice di localizzazione"* (*'localization indicator'*) q, coincidente col determinante del tensore $\mathbf{B}$:

$$\boxed{q = \frac{det[\mathbf{Q}_{\text{EP}}]}{det[\mathbf{Q}_o]} = \omega_1^*\,\omega_2^*\,\omega_3^* = \omega_3^* = 0} \tag{2.75}$$

Risolvendo la condizione di localizzazione ω_3^*=0 rispetto al parametro di incrudimento $H=\bar{H}-\mathbf{n}:\mathbf{E}_o:\mathbf{m}$, si ottiene il valore critico di incrudimento H_{df}^{N} necessario per '<u>d</u>iscontinuous failure' nella direzione individuata dalla normale $\mathbf{N}$:

$$H_{df}^{\mathrm{N}} = -\mathbf{n} : \mathbf{E}_o : \mathbf{m} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}_o^{-1} \cdot \mathbf{b} \tag{2.76}$$

Il valore massimo H_{df} di H_{df}^{N} al variare della direzione $\mathbf{N}$ segnala il primo innesco di localizzazione (si vedano le Fig. 2.2a, 2.2b)

$$H_{df} = \max_{\mathbf{N}} \{ H_{df}^{\mathrm{N}} \mid N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = 1 \} \tag{2.77}$$

e la direzione $\mathbf{N}_{df}$ corrispondente ad H_{df} fornisce la direzione di localizzazione.

Dai risultati precedenti è possibile determinare anche gli autovalori dell'autoproblema originario $\mathbf{Q}_{\mathrm{EP}} {\cdot} \mathbf{x} {=} \omega \mathbf{x}$. Si dimostra che uno dei tre autovalori elastici di $\mathbf{Q}_o$ non viene modificato ed eguaglia la velocità elastica di taglio $\omega_1 {=} \mu {=} G$. Infatti introducendo la forma isotropa (2.73) di $\mathbf{Q}_o$ nel problema agli autovalori si ottiene

$$\left[(\mu - \omega)\, \mathbf{i}_2 + (\lambda + \mu)\, (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) - \frac{1}{\bar{H}}\, \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \right] \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.78}$$

Sostituendo $\omega {=} \mu$, la matrice dei coefficienti del sistema omogeneo risulta singolare, poichè due delle sue righe sono proporzionali alla rimanente e quindi $\omega {=} \mu$ è effettivamente un autovalore di $\mathbf{Q}_{\mathrm{EP}}$. I due autovalori rimanenti si possono ottenere considerando l'Eq. (2.75). Una prima relazione,

$$det[\mathbf{Q}_{\mathrm{EP}}] = det[\mathbf{Q}_o] \;\; \omega_1^* \, \omega_2^* \, \omega_3^* \qquad \Rightarrow \qquad G\, \omega_2\, \omega_3 = G\, G\, (\lambda + 2G) \;\; \omega_3^* \tag{2.79}$$

fornisce $\omega_2\, \omega_3 {=} G\, (\lambda {+} 2G)\, \omega_3^* {=} \beta$. Si noti che $\beta {=} 0$ per $\omega_3^* {=} 0$. Inoltre, dalla traccia di $\mathbf{Q}_{\mathrm{EP}}$

$$tr[\mathbf{Q}_o] - \frac{1}{\bar{H}}\, tr[\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}] = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \qquad \Rightarrow \qquad 2G + (\lambda + 2G) - \frac{1}{\bar{H}}\, \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = G + \omega_2 + \omega_3 \tag{2.80}$$

si determina una seconda relazione, $\omega_2 {+} \omega_3 {=} G {+} (\lambda {+} 2G) {-} \mathbf{b} {\cdot} \mathbf{a} / \bar{H} {=} \alpha$. In definitiva si ottengono due espressioni che forniscono un'equazione di secondo grado nei due autovalori di $\mathbf{Q}_{\mathrm{EP}}$ ancora incogniti:

$$\omega_2 + \omega_3 = \alpha \,; \quad \omega_2\, \omega_3 = \beta \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{2,3}^2 - \alpha\, \omega_{2,3} + \beta = 0 \tag{2.81}$$

In generale $\omega_2 {>} \omega_3$ ed $\omega_3 {=} 0$ se $\omega_3^* {=} 0$. Se $\omega_3^* {<} 0$, Ottosen and Runesson-1991b hanno dimostrato che $\omega_3 {<} 0$, cioè l'autovalore ω_3 rimane reale ma negativo, con corrispondente velocità di propagazione immaginaria (*"divergence instability"*). Inoltre i due autovalori ω_2, ω_3 rimangono reali per una classe di leggi non associate sufficientemente generale, cioè viene esclusa l'eventualità di autovalori immaginari (*"flutter instability"*, dalla terminologia del campo aerodinamico indicante oscillazioni di ampiezza crescente).

In conclusione, nel problema agli autovalori generalizzato relativo al tensore di localizzazione solo uno degli autovalori normalizzati può differire da 1 mentre per l'autoproblema originario di $\mathbf{Q}_{\mathrm{EP}}$ due degli autovalori vengono modificati rispetto ai loro valori elastici, in dipendenza dallo stato di sforzo e dalla direzione di propagazione. Tale variazione è chiaramente illustrata dai diagrammi polari di velocità presentati nella sezione seguente. Il problema generalizzato è comunque vantaggioso per stabilire la condizione di singolarità secondo le Eq. (2.74), (2.75). I risultati qui presentati sono riderivati e ridiscussi in un modo nuovo piú semplice e nitido nel Capitolo 4.

Le Fig. 2.1, 2.2 mostrano l'andamento dell'indice di localizzazione $q{=}det[\mathbf{Q}_{\text{EP}}]/det[\mathbf{Q}_o]$ in funzione dell'angolo θ tra la normale $\mathbf{N}$ alla possibile superficie di discontinuità nel piano $\sigma_3{=}0$ e la direzione principale corrispondente a σ_1. Si considera il criterio di plasticità di von Mises con legge di flusso associata nei casi di tensione monoassiale e taglio puro in ambito tridimensionale (cioè senza imposizione di alcun vincolo di sforzo piano).

I risultati numerici confermano quelli analitici di Ottosen and Runesson-1991a, che mostrano dipendenza delle direzioni critiche di localizzazione in cui q è minimo localmente al variare del coefficiente di Poisson. Tale variazione non si manifesta invece per il caso di sforzo piano, presentato al punto seguente. Si noti che la localizzazione in tensione monoassiale avviene nel regime di 'softening' oltre il punto limite ($H_{df}/G{=}{-}0.65$). Infatti il caso tridimensionale appare meno suscettible all'innesco di localizzazione rispetto al caso di sforzo piano, come si mostra al punto seguente.

Nel caso di taglio puro la localizzazione si innesca per plasticità perfetta ($H_{df}/G{=}0$) in coincidenza del punto limite e le direzioni critiche di localizzazione non dipendono dal coefficiente di contrazione trasversale ma rimangono fissate al valore di 45^o rispetto alle direzioni principali.

2.5 Alcuni risultati per plasticità di von Mises in sforzo piano

Nel caso piano la legge costitutiva incrementale espressa tramite l'operatore di rigidezza tangente si ottiene per riduzione dimensionale mediante l'imposizione dei vincoli statici o cinematici che competono ai casi di sforzo piano ('plane stress') o di deformazione piana ('plane strain') (Sabban-1989, Runesson et al.-1991, Steinmann and Willam-1991c). In condizioni di sforzo piano si impongono i vincoli statici $\dot\sigma_{33}{=}0$, $\dot\sigma_{13}{=}0$, $\dot\sigma_{23}{=}0$ nella relazione incrementale tra deformazioni e sforzi espressa per mezzo della cedevolezza tangente $\dot\epsilon_{ij}{=}C^{\text{EP}}_{ij\alpha\beta}\,\dot\sigma_{\alpha\beta}$. Gli indici indicati da lettere dell'alfabeto greco variano tra 1 e 2. Eliminando dalla descrizione costitutiva le componenti di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ fuori piano si ottiene

$$\dot\epsilon_{\alpha\beta} = C^{\text{EP}}_{\alpha\beta\gamma\delta}\;\dot\sigma_{\gamma\delta}\quad;\qquad C^{\text{EP}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C^o_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{m_{\alpha\beta}\;n_{\gamma\delta}}{H} \tag{2.82}$$

La rigidezza tangente si può ricavare per inversione utilizzando la formula di Sherman and Morrison-1950,

$$E^{\text{EP}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = E^o_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{E^o_{\alpha\beta\zeta\xi}\,m_{\zeta\xi}\;n_{\omega\theta}\,E^o_{\omega\theta\gamma\delta}}{H + n_{\eta\theta}E^o_{\eta\theta\phi\psi}m_{\phi\psi}} \tag{2.83}$$

in cui $E^o_{\alpha\beta\gamma\delta}$ rappresenta la rigidezza elastica in sforzo piano, anch'essa ottenuta per inversione della cedevolezza $C^o_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$$E^o_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{E}{1-\nu^2}\;\left(\nu\;\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \frac{1-\nu}{2}\;\left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right)\right) \tag{2.84}$$

che si rappresenta nella classica forma matriciale:

$$\mathbf{E}_o^{pss} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

Poichè l'espressione matematica dell'operatore tangente per sforzo piano è diversa rispetto al caso tridimensionale ed a quello di deformazioni piane ci si attendono risultati diversi nell'analisi di localizzazione (Runesson et al.-1991). Il caso di sforzo piano risulta essere piú sensibile all'innesco del fenomeno. Infatti al vincolo statico di sforzo nullo fuori piano non corrisponde alcuna condizione cinematica per il salto delle deformazioni incrementali fuori piano. In particolare si può avere $[\![\dot{\epsilon}_{33}]\!]\neq 0$ mentre $[\![\dot{\epsilon}_{33}]\!]$ si annulla nel caso tridimensionale o di deformazioni piane (si veda l'Eq. (2.66)).

Ad esempio, nel caso di elastoplasticità perfetta di von Mises (H=0), l'innesco di localizzazione è possibile in tensione monoassiale (Fig. 2.3), mentre in ambito tridimensionale risulta necessario un apprezzabile incrudimento negativo affiché si manifesti biforcazione (Fig. 2.2a). Anche le direzioni di localizzazione differiscono tra di loro: nel caso di sforzo piano si ottiene il classico risultato di θ_{df}=35.26^o indipendentemente da ν mentre nel caso tridimensionale θ_{df} varia da 35.26^o per ν=0 a 45^o per ν=0.5, con 41.17^o per ν=0.3 (Fig. 2.1a).

Le proprietà spettrali di $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ sono state analizzate nel caso perfettamente elastoplastico (H=0) per diversi stati di sforzo piano appartenenti alla condizione di plasticità di von Mises rappresentata dall'ellisse in Fig. 2.4. Nella regione A-B, F-G della condizione di plasticità la localizzazione non può manifestarsi se non con 'softening' (Sobh-1987, Sabban-1989, Runesson et al.-1991) mentre nei punti B-F si innesca per plasticità perfetta.

In Fig. 2.4 sono anche rappresentati i vari modi di localizzazione per i diversi stati di sforzo in termini della direzione critica di localizzazione $\mathbf{N}_{df}$ e della relativa direzione di polarizzazione $\mathbf{M}_{df}$. In generale si manifesta un modo di localizzazione di tipo misto. Nel caso di tensione biassiale con σ_1=2σ_2 si ottiene Modo-I ($\mathbf{N}\|\mathbf{M}$) e nel caso di taglio puro σ_1=$-\sigma_2$ si ritrova Modo-II ($\mathbf{N}\perp\mathbf{M}$). Anche in tensione monoassiale il modo di localizzazione è di tipo misto con banda di taglio (ed apertura) inclinata rispetto all'asse di carico.

I diagrammi polari delle velocità di propagazione d'onda (Fig. 2.5) mostrano chiaramente le proprietà spettrali di $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ in termini dei suoi autovalori (in questo caso si può scrivere $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ in forma matriciale con una matrice 2×2, la quale possiede i due autovalori rappresentati). Nei diagrammi polari si rappresentano gli autovalori normalizzati di $\mathbf{Q}_{\text{EP}}$ al variare della direzione di propagazione considerata. L'adimensionalizzazione viene fatta rispetto all'autovalore massimo di $\mathbf{Q}_o$, corrispondente alla velocità di propagazione longitudinale $\lambda+2\mu$.

Si noti che la velocità di propagazione longitudinale elastica in caso di sforzo piano risulta inferiore a quella di propagazione tridimensionale e si ricava dagli autovalori del tensore acustico elastico in sforzo piano

$$Q^o_{\beta\gamma} = N_\alpha \, E^o_{\alpha\beta\gamma\delta} \, N_\delta = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1+\nu}{2} N_\beta N_\gamma + \frac{1-\nu}{2} \, \delta_{\beta\gamma} \right) \tag{2.86}$$

rappresentabile in forma matriciale come

$$\mathbf{Q}_o^{pss} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} N_1^2 + N_2^2 \, \dfrac{(1-\nu)}{2} & \dfrac{(1-\nu)}{2} + \nu \, N_1 \, N_2 \\ \\ \dfrac{(1-\nu)}{2} + \nu \, N_1 \, N_2 & N_2^2 + N_1^2 \, \dfrac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

Gli autovalori elastici risultano indipendenti da $\mathbf{N}$ ($N_1^2 + N_2^2 = 1$):

$$\begin{cases} \rho c_L^2 = \dfrac{E}{(1-\nu^2)} = \dfrac{4\,\mu}{(\lambda + 2\,\mu)} \, (\lambda + \mu) \\ \\ \rho c_T^2 = \dfrac{E}{2\,(1+\nu)} = \mu \end{cases} \tag{2.88}$$

Di conseguenza le due circonferenze a tratteggio in Fig. 2.5 che rappresentano gli autovalori elastici normalizzati in stato di sforzo piano ed elasticità isotropa valgono, per ν=0.3,

$$\begin{cases} \dfrac{\rho c_L^2}{(\lambda + 2\mu)} = 0.82 \\ \\ \dfrac{\rho c_T^2}{(\lambda + 2\mu)} = 0.29 \end{cases} \tag{2.89}$$

Dai diagrammi polari si vede chiaramente l'anisotropia indotta dallo scorrimento plastico in quanto l'andamento viene deviato da quello circolare corrispondente al caso isotropo. La velocità di propagazione longitudinale non si annulla per nessuna direzione di propagazione, mentre quella trasversale si azzera in corrispondenza delle direzioni critiche di localizzazione indicate in Fig. 2.4.

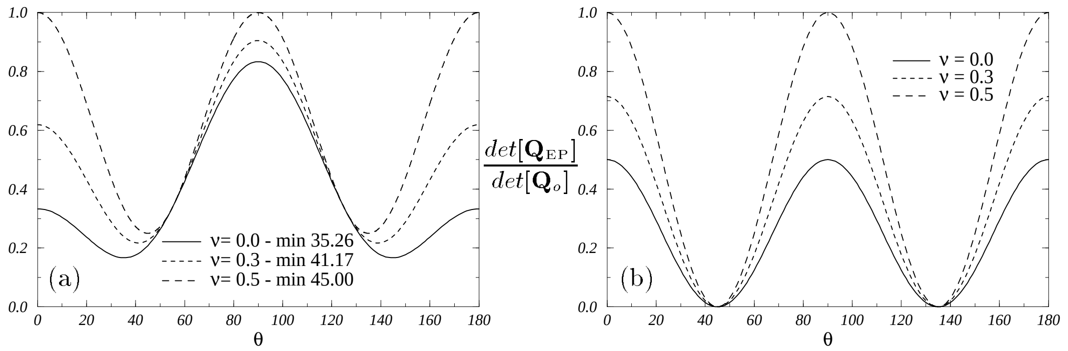


Figura 2.1: Plasticità di von Mises in 3D (H=0), influenza del coefficiente di Poisson ν in: (a) tensione monoassiale σ_1=σ_Y, σ_2=σ_3=0; (b) taglio puro σ_1=$-\sigma_2$=σ_Y, σ_3=0.

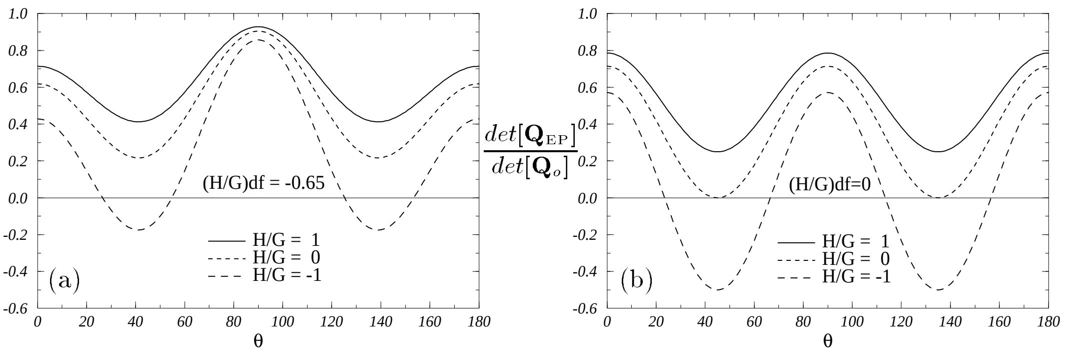


Figura 2.2: Plasticità di von Mises in 3D (ν=0.3), influenza del modulo plastico H in: (a) tensione monoassiale σ_1=σ_Y, σ_2=σ_3=0; (b) taglio puro σ_1=$-\sigma_2$=σ_Y, σ_3=0.

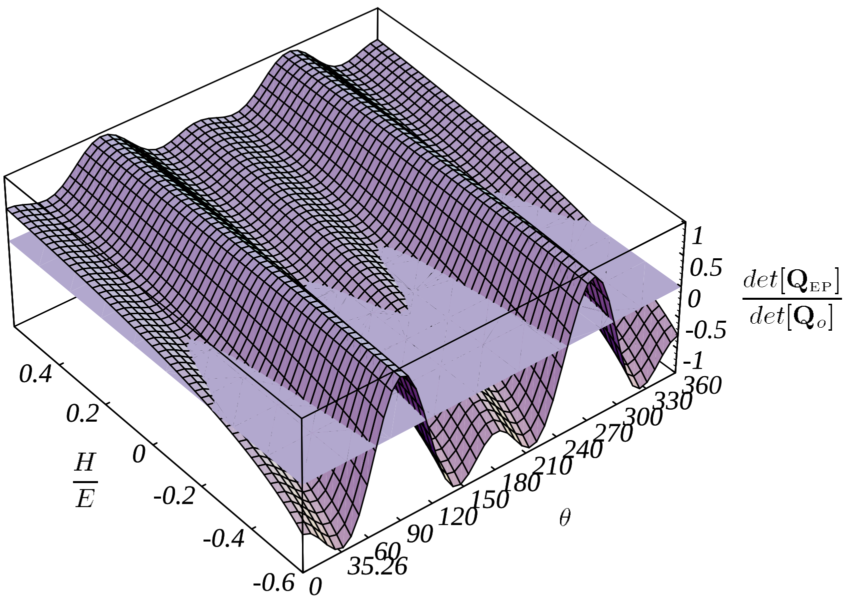


Figura 2.3: Plasticità di von Mises per stato di sforzo piano in tensione monoassiale (ν=0.3): indice di localizzazione in funzione di H, θ.

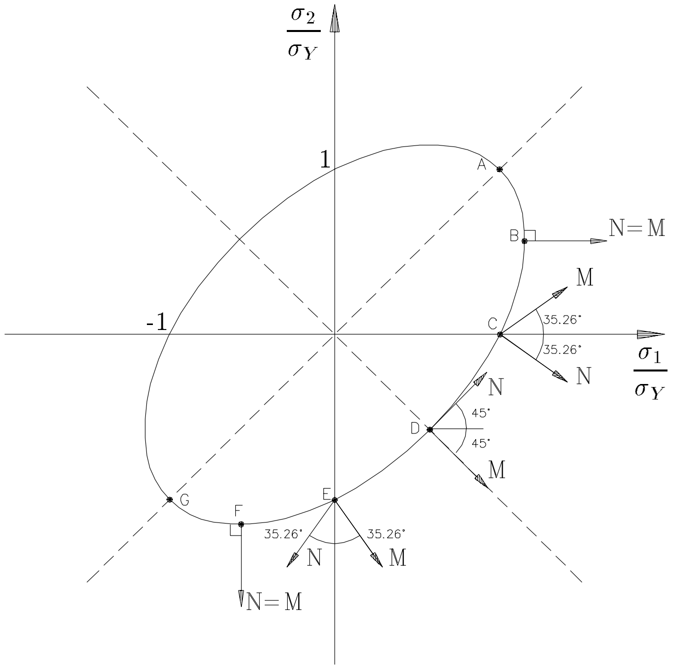


Figura 2.4: Condizione di von Mises in sforzo piano e relativi modi di localizzazione.

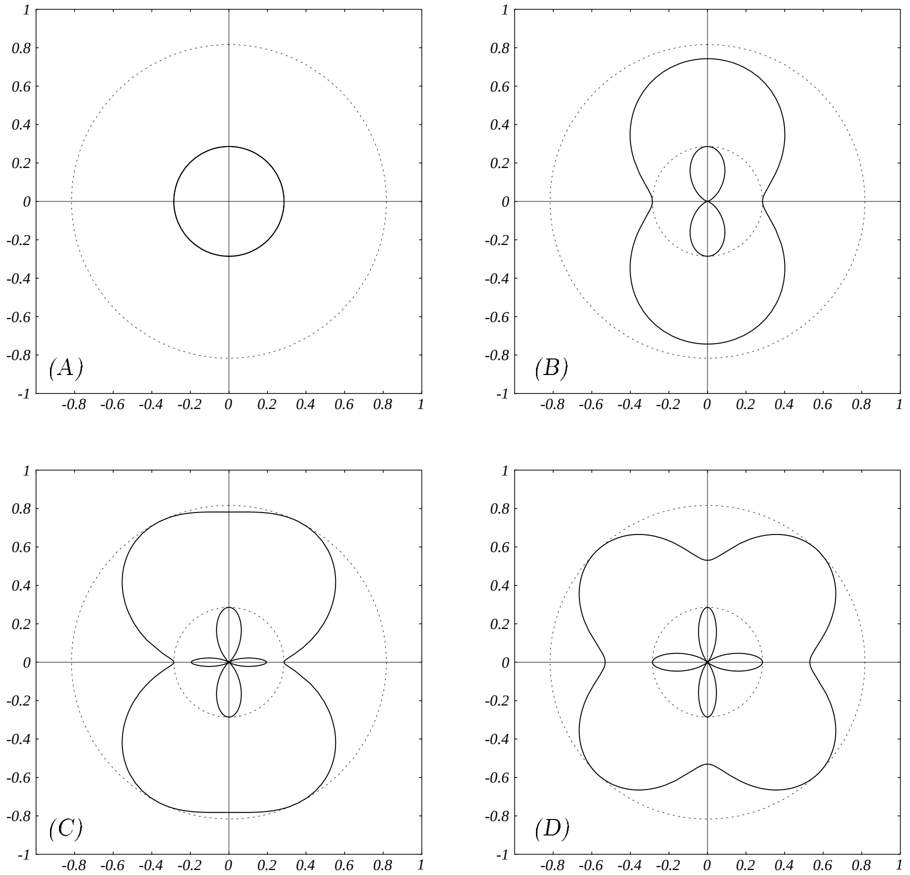


Figura 2.5: Diagramma polare delle velocità in stato di sforzo piano (H=0, ν=0.3): (A) Tensione equibiassiale con σ_1=σ_2; (B) Tensione biassiale con σ_1=2 σ_2; (C) Tensione monoassiale σ_2=0; (D) Taglio puro σ_1=$-\sigma_2$.

2.6 Considerazioni conclusive

In questo capitolo sono state presentate le relazioni fondamentali dell'analisi di localizzazione al livello costitutivo, vale a dire le condizioni di compatibilità di Maxwell e di Hadamard, e la condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard nei materiali elastoplastici, ottenuta definendo il tensore acustico elastoplastico. Le singolarità connesse a tale tensore originano due condizioni di localizzazione. La condizione denominata debole si ottiene dalla relazione di equilibrio all'interfaccia di discontinuità, come singolarità del tensore di localizzazione. La condizione detta forte si ricava dalla stazionarietà del fronte d'onda, come annullamento della forma quadratica associata al tensore acustico. Le due condizioni vengono a coincidere nel caso associato di operatori tangenti simmetrici.

Le analisi di localizzazione nei materiali elastoplastici sono state sviluppate estesamente in letteratura. Nel capitolo si sono rivisitati alcuni risultati relativi all'elastoplasticità di von Mises mostrando le differenze esistenti tra analisi tridimensionale e soluzione in stato di sforzo piano. Nei successivi Capitoli 3 e 4 le analisi di localizzazione vengono estese al caso di materiali con perdita di rigidezza elastica e di materiali a multipotenziale.

L'analisi di localizzazione al livello materiale fornisce informazioni precise circa il modo di localizzazione in un solido in condizioni di stato di sforzo e deformazione omogenei, corrispondenti ad un test di laboratorio che simuli il piú possibile queste condizioni ideali. L'effetto delle condizioni al contorno, qui non considerato, non è tuttavia da trascurare in quanto in un esperimento reale lo stato omogeneo risulta sempre alterato dagli effetti al contorno e quindi diviene determinante affinché la predizione analitica sia in accordo con le osservanze sperimentali. Malgrado alcuni contributi siano già apparsi in proposito nella letteratura recente (tra i quali sembra opportuno citare Benallal et al.-1989 e Needleman and Ortiz-1991), tale argomento rimane ancora sostanzialmente inesplorato e quindi suscettibile di ulteriori studi e sviluppi.

Un altro aspetto che differenzia l'analisi di localizzazione qui presentata da una parallela analisi di meccanica della frattura è il confronto tra le condizioni di innesco di discontinuità deboli, cioè delle deformazioni incrementali, rispetto all'insorgenza di discontinuità forti, cioè degli incrementi di spostamento. Nell'ambito della propagazione ondosa nei mezzi elastoplastici ciò corrisponde alla differenza esistente tra la propagazione di 'acceleration waves' qui esaminata e la propagazione di 'shock waves' (Kolsky-1953, Germain and Lee-1973). Alcuni lavori recenti hanno fornito i primi contributi in proposito, utilizzando la teoria delle distribuzioni per trattare le discontinuità in modo sistematico (Aubry and Modaressi-1992, Simo et al.-1993). Tuttavia appare non ancora raggiunto a tutt'oggi l'obiettivo di comprendere appieno le differenze esistenti tra i due approcci e di chiarire se esiste una gerarchia precisa nell'insorgenza dei due fenomeni, con innesco progressivo del processo di degenerazione che conduce alla lacerazione del mezzo continuo. Pertanto anche questo tema risulta del tutto aperto e costituisce possibile oggetto di ricerche future.

CAPITOLO 3

MATERIALI CON PERDITA DI RIGIDEZZA E RELATIVI INDICI DI ROVINA

Il comportamento anelastico di molti materiali di interesse ingegneristico come calcestruzzo, rocce, ceramiche e metalli in prove monoassiali di trazione o compressione mostra in genere la presenza di due fenomeni dissipativi: da un lato si manifestano deformazioni permanenti allo scarico e dall'altro si evidenzia una diminuzione della rigidezza di scarico elastico rispetto ai valori iniziali. In altre parole, accanto alla perdita di resistenza del materiale lungo il ramo 'softening' si osserva anche una degradazione di rigidezza elastica del materiale (Fig. 3.1).

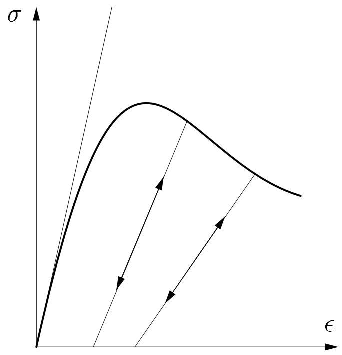
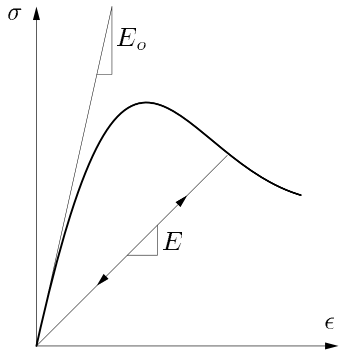


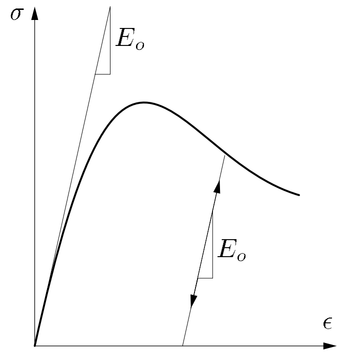
Figura 3.1: Materiali con perdita di rigidezza elastica e deformazioni permanenti.

Nella letteratura recente molti autori hanno contribuito alla formulazione di modelli costitutivi atti a descrivere convenientemente questo comportamento di contemporanea perdita di resistenza e rigidezza, sia considerando un unico moltiplicatore plastico (*'elastoplastic coupling'*, Maier and Hueckel-1979, Han and Chen-1986, Simo and Ju-1987, Ju-1989), sia utilizzando due moltiplicatori anelastici (Bažant and Kim-1979, Bažant-1980, Dragon and Mróz-1979, Yazdani and Schreyer-1990, Hansen and Schreyer-1994). Questi modelli combinano in modi differenti due formulazioni piú semplici che riguardano separatamente i due fenomeni irreversibili di perdita di rigidezza e di deformazioni permanenti allo scarico.

Nel caso in cui si descriva la pura perdita di rigidezza elastica si ipotizza uno scarico ideale verso l'origine del diagramma sforzo/deformazione mediante rigidezza secante variabile durante il processo di carico. Tali modelli non considerano quindi alcuna deformazione irreversibile allo scarico e l'unica fonte di dissipazione energetica risiede nel meccanismo di perdita di rigidezza (Fig. 3.2a). In questa categoria rientrano i modelli *'smeared crack'* (Rots and Blaauwendraad-1989, Guzina et al.-1995), i modelli *'elastic-fracturing'* (Dougill-1976-80) ed i *"modelli di danneggiamento"* (si vedano ad es. Mazars-1984, Krajcinovic-1989, Lemaitre-1992). Nell'ambito della teoria della plasticità si considera invece solo la deformazione permanente allo scarico e la rigidezza viene assunta pari al valore iniziale (Fig. 3.2b).



a) Materiale 'elastic-degrading'



b) Materiale elastoplastico

Figura 3.2: Rigidezze elastiche assunte allo scarico.

Nell'ambito del comportamento viscoso dei materiali metallici, KACHANOV-1958 ha introdotto per primo il concetto di danno misurato dall'effettiva area reagente del provino che si traduce in una perdita di rigidezza elastica e la nozione di *"sforzo efficace"* od *"effettivo"* che mobilita tale area. Questa data può essere considerata a buon titolo l'inizio di quel settore della meccanica chiamato *"meccanica del danneggiamento"* (*'continuum damage mechanics'*), cui molti autori hanno contribuito fino ad oggi sino a renderla sufficientemente generale ed estesa da dar luogo a trattati sul tema (LEMAITRE-1992).

DOUGILL-1976-80 ha formulato una teoria tridimensionale per materiali *'elastic-fracturing'* in cui si considerano direttamente leggi di evoluzione per la rigidezza elastica. Con lo stesso approccio contributi successivi hanno considerato anche la combinazione con la plasticità (DRAGON AND MRÓZ-1979, BAŽANT AND KIM-1979, BAŽANT-1980, ORTIZ-1985, HAN AND CHEN-1986). Il termine 'fracturing' utilizzato all'interno di una formulazione di meccanica del continuo (*'smeared'*) può apparire tuttavia poco appropriato in quanto simile alla terminologia utilizzata nella meccanica della frattura nell'ambito di un approccio *'discrete'* (DUGDALE-1960, BARENBLATT-1962, HILLERBORG ET AL.-1976). La continuità del materiale 'elastic-fracturing' non è violata e la fratturazione risulta diffusa all'interno del volume rappresentativo del materiale.

Recentemente, in relazione agli studi per la presente tesi, CAROL ET AL.-1994a,b hanno formulato una teoria costitutiva 'elastic-fracturing' per materiali con *"degradazione elastica"* di rigidezza, utilizzando il termine *'elastic-degrading'* per evitare confusioni (in questo capitolo si useranno i termini fratturazione e degradazione come sinonimi). La trattazione è sufficientemente generale, mantiene ove possibile un parallelismo con la ben consolidata teoria della plasticità ed evita l'uso intensivo di concetti appartenenti alla termodinamica, tipico dei modelli di danneggiamento a variabili interne. I modelli di danneggiamento con superficie di danno rientrano in questa formulazione generale. La teoria fornisce un'espressione generale degli operatori tangenti della corrispondente legge incrementale formalmente simile a quella della teoria della plasticità. Di conseguenza si possono analizzare gli indici di rovina relativi a tali operatori. Tale conseguenza risulta di notevole utilità per paragonare quali siano le predizioni di rovina al livello materiale in modelli di questo tipo, appropriati per descrivere le rotture di tipo fragile nei materiali lapidei, rispetto a quelli classici della plasticità che considerano prevalentemente le risorse di duttilità dei materiali metallici.

Nella prima parte del Capitolo si riassume la teoria costitutiva di Carol et al.-1994a,b. Si presentano le formulazioni duali negli sforzi e nelle deformazioni e si definiscono i pertinenti concetti di associatività al livello tensoriale del 2^o ordine ove gli operatori tangenti sono simmetrici. Tali concetti vengono poi estesi al livello tensoriale del 4^o ordine, introducendo le forze termodinamiche associate a cedevolezza e rigidezza e definendo i relativi gradienti generalizzati della funzione di degradazione. I modelli di danneggiamento vengono poi definiti introducendo le variabili di danno nella teoria generale. I concetti di associatività si estendono anche al livello tensoriale delle variabili di danno. Vengono poi presentati alcuni concetti di meccanica del danneggiamento utilizzati nel definire il legame tra moduli elastici e variabili di danno mediante ipotesi di equivalenza di sforzi, deformazioni o equivalenza energetica. Si presentano poi gli aspetti salienti di descrizioni tensoriali del danno di ordine differente. Nel caso di danno scalare si elaborano proposte alternative alla formulazione tradizionale in cui tutte le componenti del tensore di rigidezza si riducono proporzionalmente. Nel caso tradizionale di danno scalare si presenta una forma generale dell'operatore tangente che viene successivamente analizzata in relazione all'instabilità costitutiva.

Nella seconda parte del capitolo si presenta l'analisi degli indici di rovina continua e discontinua dei modelli 'elastic-degrading' in modo duale a quanto fatto nel Capitolo 2 per i materiali elastoplastici. Si presenta un criterio geometrico di localizzazione che rappresenta la condizione di localizzazione nel piano di Mohr di sforzi o deformazioni. Si considera poi nel dettaglio il modello di danno scalare tradizionale per cui l'estensione dei risultati elastoplastici nell'analisi di localizzazione è immediata e si ottengono in forma chiusa i valori critici dei parametri di incrudimento e le direzioni critiche di localizzazione. Si mostra la differenza con le predizioni di localizzazione del modello elastoplastico nel caso tridimensionale e nel caso di stato di sforzo piano.

3.1 Materiali 'elastic-degrading': formulazione negli sforzi

Nel caso di modelli costitutivi con *"degradazione elastica"* di rigidezza (*'elastic-degrading'*) si assume uno scarico elastico ideale verso l'origine della curva sforzi/deformazioni. La legge costitutiva può quindi essere scritta in termini totali mediante le leggi secanti

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad\qquad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3.1}$$

I tensori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{C}$ rappresentano la rigidezza e la cedevolezza secanti ($\mathbf{C}$=$\mathbf{E}^{-1}$ e viceversa). Poichè lo scarico è puramente di tipo elastico, i tensori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{C}$ possiedono non solo le simmetrie minori ma anche le simmetrie maggiori e rimangono costanti durante le fasi di scarico/ricarico in regime elastico.

Le relazioni tra gli incrementi ('rates') $\dot{\mathbf{E}}$ e $\dot{\mathbf{C}}$ dovuti al processo di degradazione di rigidezza si ricavano differenziando l'identità $\mathbf{C}$:$\mathbf{E}$=$\mathbf{E}$:$\mathbf{C}$=$\mathbf{i}_4$, ottenendo:

$$\dot{\mathbf{C}} : \mathbf{E} + \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{E}} = -\mathbf{E} : \dot{\mathbf{C}} : \mathbf{E}\,; \qquad \dot{\mathbf{C}} = -\mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{C} \tag{3.2}$$

Queste relazioni verranno utilizzate nel seguito quando sarà richiesta una trasformazione tra le quantità $\dot{\mathbf{E}}$ e $\dot{\mathbf{C}}$.

La seconda ipotesi fondamentale dei materiali 'elastic-degrading' è l'esistenza di una condizione di fratturazione che definisce il dominio elastico corrente in analogia con la condizione di snervamento in plasticità. Nel caso di formulazione negli sforzi la funzione di fratturazione è definita in termini dello stato di sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ e di un insieme di variabili interne $\mathbf{q}$ che registrano la dipendenza dalla storia pregressa: $F{=}F[\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}]{=}0$. Se lo stato di sforzo considerato appartiene alla condizione di fratturazione è possibile un'ulteriore degradazione della rigidezza elastica. Il meccanismo di dissipazione viene effettivamente attivato nel caso in cui l'incremento di deformazione imposto fornisce un incremento di sforzo elastico $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}$ diretto verso l'esterno della superficie di degradazione.

La degradazione di rigidezza elastica è un processo irreversibile che comporta dissipazione energetica anche se non crea deformazioni permanenti allo scarico ideale qui considerato (si veda la Fig. 3.4 al punto 3.1.2). Per ottenere una formulazione duale a quella classica della plasticità, si introduce la definizione di incremento di deformazione anelastica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ ('degrading strain rate') che traduce la perdita di rigidezza in termini di incremento di deformazione: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ fornisce l'incremento di sforzo $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ moltiplicando la rigidezza secante per l'incremento di deformazione elastica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}}{=}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}{-}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ (si veda la Fig. 3.3 nel caso monoassiale),

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}) \tag{3.3}$$

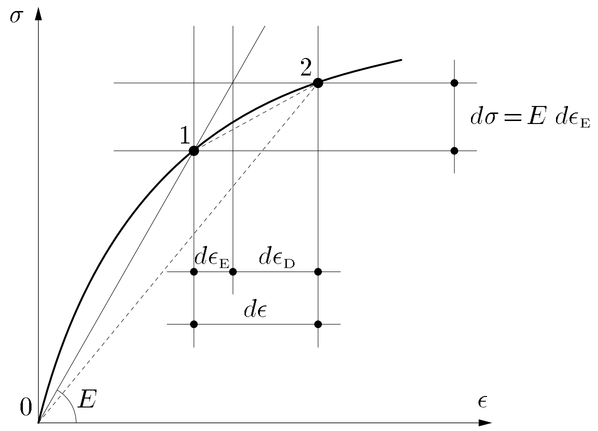


Figura 3.3: Definizione dell'incremento di deformazione anelastica ('degrading strain') rappresentante la degradazione di rigidezza elastica.

In modo analogo al caso classico della teoria della plasticità presentato nel Capitolo 2 si definisce una legge di degradazione per $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ analoga alla legge di flusso plastico per $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}}$. L'ulteriore degradazione di rigidezza elastica deve inoltre soddisfare la condizione di consistenza $\dot{F}{=}0$ nel caso di carico in regime anelastico:

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}} = \dot{\lambda}\ \mathbf{m} \\ &\dot{F} = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_{\lambda} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left.\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right|_{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H\ \dot{\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

in cui $\mathbf{n}$ indica il gradiente della condizione di degradazione ed H il modulo di 'hardening'. Come mostrato nel capitolo precedente l'incremento del moltiplicatore anelastico si può esprimere in funzione di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ o di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, in dipendenza del tipo di controllo assunto in sforzi o deformazioni:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m}} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}}{\bar{H}} \geq 0 \qquad \text{o} \qquad \dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{H} \geq 0 \tag{3.5}$$

Sostituendo i moltiplicatori anelastici nella legge di Hooke generalizzata (3.3) si ricavano le espressioni degli operatori di rigidezza e cedevolezza tangenti nel caso di ulteriore attivazione del meccanismo di degradazione:

$$\boxed{\mathbf{E}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{E}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m}} \qquad \mathbf{C}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{C} + \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}{H}} \tag{3.6}$$

L'indice ED sta per 'elastic-degrading', e specializza al caso in esame la notazione generale di $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{C}_t$ per gli operatori tangenti di un modello incrementale lineare $\dot{\boldsymbol{\sigma}}{=}\mathbf{E}_t{:}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}{=}\mathbf{C}_t{:}\dot{\boldsymbol{\sigma}}$.

Si notano due differenze importanti nelle espressioni (3.6) rispetto alle corrispondenti relazioni elatoplastiche: (a) Gli operatori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{C}$ indicano la rigidezza e la cedevolezza secante del materiale, che variano durante la storia di carico rispetto ai loro valori iniziali $\mathbf{E}_o$ e $\mathbf{C}_o$, ritenuti invece costanti in elastoplasticità; (b) Poichè i tensori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{C}$ non sono costanti, si devono anche fornire delle leggi di evoluzione per $\dot{\mathbf{E}}$ e $\dot{\mathbf{C}}$.

Gli incrementi $\dot{\mathbf{E}}$ e $\dot{\mathbf{C}}$ non sono indipendenti dalla legge di degradazione assunta per $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ in quanto tale incremento di deformazione traduce al livello tensoriale del 2^o ordine la perdita di rigidezza del materiale. Differenziando la legge secante $\boldsymbol{\sigma}{=}\mathbf{E}{:}\boldsymbol{\epsilon}$ si ottiene $\dot{\boldsymbol{\sigma}}{=}\mathbf{E}{:}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}{+}\dot{\mathbf{E}}{:}\boldsymbol{\epsilon}$. Paragonando questa relazione con la legge incrementale $\dot{\boldsymbol{\sigma}}{=}\mathbf{E}{:}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}{-}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}})$ si identifica la relazione

$$-\mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}} = \dot{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}} = -\mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\epsilon} = \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3.7}$$

ove si è usata la prima delle relazioni (3.2). Questa relazione consente di ottenere l'incremento di deformazione anelastica una volta noto l'incremento di cedevolezza. Naturalmente il passaggio inverso non è possibile in quanto un tensore del 4^o ordine $\dot{\mathbf{C}}$ tale da soddisfare la (3.7) per $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ assegnato non è determinabile univocamente.

Si deve quindi definire una *"legge di degradazione"* o di *"fratturazione"* (*'degrading'* o *'fracturing rule'*) per la cedevolezza elastica direttamente al livello tensoriale del 4^o ordine (Ortiz-1985),

$$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\lambda}\, \boldsymbol{M} \tag{3.8}$$

in cui $\dot{\lambda}$ è lo stesso moltiplicatore anelastico che compare nella legge di degradazione (3.4) di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ ed $\boldsymbol{M}$ è un tensore del 4^o ordine che fornisce la "direzione" dell'incremento di cedevolezza elastica. Il tensore $\boldsymbol{M}$ deve possedere simmetrie minori e maggiori come del resto $\mathbf{C}$ e $\dot{\mathbf{C}}$ e deve risultare definito positivo per le ragioni indicate piú avanti. Sostituendo le leggi di degradazione di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ e di $\dot{\mathbf{C}}$ nella (3.7) si ottiene $\dot{\lambda}\mathbf{m}{=}\dot{\lambda}\boldsymbol{M}{:}\boldsymbol{\sigma}$ ed eliminando i moltiplicatori anelastici si ricava la relazione tra le "direzioni" che compaiono nelle leggi di degradazione:

$$\boxed{\mathbf{m} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{\sigma}} \tag{3.9}$$

Assegnata la legge di fratturazione per $\mathbf{C}$ si ottiene anche la legge di evoluzione per $\mathbf{E}$, in quanto $\dot{\mathbf{E}}=-\mathbf{E}:\dot{\mathbf{C}}:\mathbf{E}=-\dot{\lambda}\mathbf{E}:\boldsymbol{M}:\mathbf{E}=\dot{\lambda}\bar{\boldsymbol{M}}$, in cui $\bar{\boldsymbol{M}}$ è il tensore del 4^o ordine simmetrico e definito negativo che definisce la "direzione" di degradazione di rigidezza. Utilizzando la relazione (3.9) si ottiene il quadro riassuntivo del modello costitutivo 'elastic-degrading' con formulazione negli sforzi nel caso di incremento anelastico:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_{\text{ED}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{con} \quad \mathbf{E}_{\text{ED}} = \mathbf{E} - \dfrac{\mathbf{E} : \boldsymbol{M} : \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{E}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \boldsymbol{M} : \boldsymbol{\sigma}} \\[2ex] \dot{\mathbf{E}} = -\dfrac{\mathbf{n} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \boldsymbol{M} : \boldsymbol{\sigma}} \ \mathbf{E} : \boldsymbol{M} : \mathbf{E} \end{array}} \tag{3.10}$$

3.1.1 Associatività nello spazio delle deformazioni

Il concetto di legge di scorrimento plastico associata viene esteso direttamente anche al caso 'elastic-degrading'. In quest'ambito si possono definire vari livelli di associatività mutuamente correlati (Carol et al.-1994a,b). Il primo livello è quello del 2^o ordine, corrispondente alle deformazioni incrementali, che è pertinente anche alla teoria della plasticità. Considerando la legge di degradazione $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{D}}=\dot{\lambda}\mathbf{m}$ delle deformazioni anelastiche, il modello di degradazione di rigidezza si dice *"associato nello spazio delle deformazioni"* se la direzione di degradazione risulta parallela al gradiente della funzione di fratturazione F

$$\text{\textit{'Associativity in strain space'}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \parallel \mathbf{m} \ \text{ o } \ \mathbf{n} = \mathbf{m} \tag{3.11}$$

Per imporre una legge associata si deve quindi scegliere $\boldsymbol{M}$ in modo che $(\boldsymbol{M}:\boldsymbol{\sigma})\|\mathbf{n}$, in cui $\mathbf{n}$ è assegnato una volta definita la funzione di carico F del modello. Questa circostanza evidenzia la necessità di definire l'associatività direttamente al livello tensoriale del 4^o ordine dal quale segua l'associatività al livello inferiore. Se il modello 'elastic-degrading' è associato, gli operatori tangenti risultano completamente simmetrici, proprietà molto importante nel definire le gerarchie esistenti tra i vari indici di rovina al livello materiale. Qualora la direzione $\mathbf{m}$ sia ottenuta come gradiente di un potenziale di degradazione Q, $\mathbf{m}=\partial Q/\partial\boldsymbol{\sigma}$, la legge di degradazione può dirsi associata se $Q=F$, in analogia al caso elastoplastico.

3.1.2 Associatività nello spazio delle cedevolezze

Prima di introdurre il concetto di associatività nello spazio delle cedevolezze è necessario considerare gli aspetti termodinamici del processo di degradazione e determinare la dissipazione energetica ad esso connessa. L'*"energia libera"* (*'free energy'*, Coleman and Gurtin-1967) per unità di volume rappresenta la quantità di energia recuperabile allo scarico, come mostrato in Fig. 3.4 per un materiale 'elastic-degrading' (Dougill-1976), pari al lavoro speso meno la dissipazione energetica d:

$$w = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\, dt - d \tag{3.12}$$

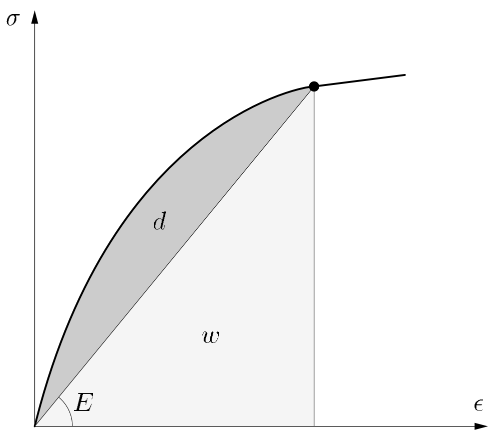


Figura 3.4: Dissipazione energetica d ed energia libera w.

L'energia libera coincide con l'energia elastica $w{=}\boldsymbol{\sigma}{:}\boldsymbol{\epsilon}/2$, rappresentabile in funzione di deformazioni o sforzi:

$$w[\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{E}] = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon} \qquad \text{o} \qquad w[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}] = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3.13}$$

L'incremento di energia libera si ottiene differenziando ad es. la prima delle (3.13):

$$\dot{w} = \left.\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{\mathbf{E}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\boldsymbol{\epsilon}} :: \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - (-\bar{\mathbf{Y}}) :: \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{d} \tag{3.14}$$

in cui $\dot{d}{=}(-\bar{\mathbf{Y}}){::}\dot{\mathbf{E}}$ indica l'incremento di dissipazione energetica ed il tensore del 4^o ordine $(-\bar{\mathbf{Y}})$ rappresenta la *"forza termodinamica associata alla rigidezza"* $\mathbf{E}$, definita come

$$(-\bar{\mathbf{Y}}) = -\left.\frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\boldsymbol{\epsilon}} = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon} \otimes \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.15}$$

Il segno '$-$' nella definizione della forza termodinamica $(-\bar{\mathbf{Y}})$ viene di solito introdotto in letteratura per ottenere un incremento di dissipazione energetica positivo in concomitanza di un decremento di rigidezza elastica. L'incremento di dissipazione energetica si può anche esprimere in funzione dell'incremento di cedevolezza elastica utilizzando l'Eq. (3.2) od in termini del prodotto interno tra sforzo ed incremento di deformazione anelastica ricordando la relazione (3.7):

$$\dot{d} = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon} : \dot{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}} \tag{3.16}$$

Quest'ultima relazione chiarisce ulteriormente il significato fisico di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ che, come si è detto, risulta strettamente legato all'entità della dissipazione energetica in gioco. Poichè la degradazione di rigidezza è un processo irreversibile, nel rispetto del secondo principio della termodinamica ci si aspetta $\dot{d}{\geq}0$. Utilizzando le leggi di fratturazione $\dot{\mathbf{C}}{=}\dot{\lambda}\boldsymbol{M}$, $\dot{\mathbf{E}}{=}\dot{\lambda}\bar{\boldsymbol{M}}$ con $\dot{\lambda}{\geq}0$ in (3.16), si giunge alla conclusione che i tensori $\boldsymbol{M}$ ed $\bar{\boldsymbol{M}}$ devono essere non solo completamente simmetrici ma anche l'uno definito positivo e l'altro definito negativo.

Il concetto di forza termodinamica viene qui di seguito richiamato per chiarezza. La forza termodinamica associata ad una certa quantità viene definita in modo tale da ottenere l'incremento di dissipazione energetica dal relativo prodotto interno con l'incremento della quantità stessa. Con riferimento all'espressione (3.16) possiamo dire che $\boldsymbol{\sigma}/2$ è la forza termodinamica associata ad $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{D}}$. Si definiscono con $(-\mathbf{Y})$ e $(-\bar{\mathbf{Y}})$ le forze termodinamiche associate rispettivamente a $\mathbf{C}$ ed $\mathbf{E}$:

$$\dot{d} = (-\mathbf{Y}) :: \dot{\mathbf{C}} = (-\bar{\mathbf{Y}}) :: \dot{\mathbf{E}}\ ; \qquad (-\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}\ ; \quad (-\bar{\mathbf{Y}}) = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon}\otimes\boldsymbol{\epsilon} \tag{3.17}$$

La forza termodinamica associata alla cedevolezza appare essere una generalizzazione al livello tensoriale del 4^o ordine dello sforzo (forza associata alla deformazione). Di conseguenza risulta spontaneo definire anche il gradiente generalizzato di F rispetto a $(-\mathbf{Y})$, che è l'analogo del gradiente $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{N} = \left.\frac{\partial F}{\partial(-\mathbf{Y})}\right|_{\lambda} \tag{3.18}$$

Il tensore $\boldsymbol{N}$ è simmetrico in quanto $(-\mathbf{Y})$ lo è.

Risulta ora possibile definire il concetto di *"associatività nello spazio delle cedevolezze"* quando i tensori $\boldsymbol{N}$ ed $\boldsymbol{M}$ sono tra di loro proporzionali

$$\textit{`Associativity in compliance space'} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{M} \ \text{ o } \ \boldsymbol{N} = \boldsymbol{M} \tag{3.19}$$

L'associatività al livello tensoriale del 4^o ordine implica anche associatività al livello del 2^o ordine. Infatti per derivazione composta ed espansione delle derivate si ottiene

$$\mathbf{n} = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_{\lambda} = \left.\frac{\partial F}{\partial(-\mathbf{Y})}\right|_{\lambda} :: \frac{\partial(-\mathbf{Y})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3.20}$$

Poichè anche le leggi di degradazione sono legate dalla relazione $(\mathbf{m}{=}\boldsymbol{M}{:}\boldsymbol{\sigma})$ possiamo affermare che associatività al livello di $\boldsymbol{N}$ ed $\boldsymbol{M}$ implica associatività al livello di $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$:

$$\boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} \parallel \mathbf{m} \tag{3.21}$$

Nel caso $\boldsymbol{M}$ sia definito come gradiente generalizzato di un potenziale di dissipazione Q' la legge di degradazione si dice associata se $Q'{=}Q{=}F$ (si veda la Tab. 3.1; per altri dettagli in proposito si rimanda a Carol et al.-1994a,b).

3.2 Materiali 'elastic-degrading': formulazione nelle deformazioni

Come nel caso elastoplastico, si può elaborare una formulazione duale nelle deformazioni che in realtà è piú usuale nei modelli di danneggiamento di quanto non sia una formulazione negli sforzi. La funzione di degradazione viene ora definita nelle deformazioni ed in termini delle variabili interne $\bar{\mathbf{q}}$: $F{=}F[\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{q}}]$. L'omologo dell'incremento di deformazione anelastica $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ diviene l'incremento di sforzo anelastico $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}{=}\dot{\mathbf{E}}{:}\boldsymbol{\epsilon}$ (Dougill-1976), definito in modo tale che $\dot{\boldsymbol{\sigma}}{=}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}{+}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}$ e

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}} \tag{3.22}$$

Gli incrementi anelastici di sforzo e deformazione sono correlati dalle relazioni $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}{=}{-}\mathbf{C}{:}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}$ e $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}{=}{-}\mathbf{E}{:}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$. Seguendo la procedura usuale, la legge di degradazione di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ e la legge di consistenza per carico in regime di degradazione si scrivono

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}} = \dot{\lambda}\ \bar{\mathbf{m}} \\ &\dot{F} = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{\lambda} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left.\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right|_{\boldsymbol{\epsilon}} \dot{\lambda} = \bar{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \bar{H}\ \dot{\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

in cui $\bar{\mathbf{n}}$ rappresenta il gradiente nello spazio delle deformazioni ed $\bar{H}$ il relativo parametro di 'hardening'. Risolvendo la condizione di consistenza rispetto a $\dot{\lambda}$ ed esprimendolo in funzione di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ od $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ si ottiene

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{\bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}}} \qquad \text{o} \qquad \dot{\lambda} = \frac{\bar{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\bar{H}} \tag{3.24}$$

Sostituendo i moltiplicatori anelastici nella legge elastica (3.22) si ricavano gli operatori di cedevolezza e rigidezza tangenti:

$$\boxed{\mathbf{C}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C}}{\bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}}} \qquad \mathbf{E}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{E} + \frac{\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}}} \tag{3.25}$$

Si noti la dualità delle espressioni (3.6), (3.25). La completa simmetria formale è dovuta alla scelta di definire $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}$ in modo che valga la decomposizione additiva $\dot{\boldsymbol{\sigma}}{=}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}{+}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}$ duale di quella delle deformazioni ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}{=}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}}{+}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$). Altri autori (ad es. Han and Chen-1986, Petryk-1989) definiscono $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}$ in modo da avere $\dot{\boldsymbol{\sigma}}{=}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}{-}\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}$. Tale definizione rompe l'analogia formale tra gli operatori tangenti ma mantiene la simmetria formale delle altre relazioni che verranno derivate nel seguito, simmetria che manca in alcune delle relazioni fondate sulla presente definizione (si veda la Tab. 3.1). Gli stessi commenti già esposti per il caso elastoplastico nel Capitolo 2 valgono anche in questo caso. Il parametro $\bar{H}$ può assumere solo valori di incrudimento positivi e gli operatori tangenti sono formalmente simili a quelli elastoplastici qualora si sostituisca la rigidezza secante corrente $\mathbf{E}$ con quella iniziale $\mathbf{E}_o$. Nel caso 'elastic-degrading' occorre tuttavia fornire anche una legge di evoluzione per $\mathbf{E}$, dalla quale discenda la direzione di degradazione $\bar{\mathbf{m}}$. Le relazioni tra quantità soprassegnate e non, sono state già presentate nel Capitolo 2 per il caso elastoplastico e vengono di seguito riassunte:

$$\begin{array}{lll} \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{E} : \mathbf{n} & \bar{\mathbf{m}} = -\mathbf{E} : \mathbf{m} & \bar{H} = H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m} \\ \mathbf{n} = \mathbf{C} : \bar{\mathbf{n}} & \mathbf{m} = -\mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}} & H = \bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}} \end{array} \tag{3.26}$$

La legge di degradazione di $\mathbf{E}$ generalizza al livello tensoriale del 4^o ordine quella di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}$ analogamente a quanto già formulato per $\dot{\mathbf{C}}$:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda}\ \bar{\boldsymbol{M}} \tag{3.27}$$

Il tensore $\bar{\boldsymbol{M}}$ deve essere completamente simmetrico e definito negativo per avere un incremento di dissipazione energetica (3.16) positivo. Anche in questo caso le direzioni $\bar{\mathbf{m}}$ ed $\bar{\boldsymbol{M}}$ sono legate tra loro. Una volta assegnato $\bar{\boldsymbol{M}}$, $\bar{\mathbf{m}}$ segue dalla relazione

$$\boxed{\bar{\mathbf{m}} = \bar{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{\epsilon}} \tag{3.28}$$

ottenibile dalla definizione $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}=\dot{\mathbf{E}}:\boldsymbol{\epsilon}$, eliminando i moltiplicatori anelastici. Le leggi di degradazione $\bar{\boldsymbol{M}}$ ed $\boldsymbol{M}$ sono legate da una relazione conseguente alle Eq. (3.2):

$$\bar{\boldsymbol{M}} = -\mathbf{E} : \boldsymbol{M} : \mathbf{E} \qquad \boldsymbol{M} = -\mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{M}} : \mathbf{C} \tag{3.29}$$

Le relazioni governanti la formulazione 'elastic-degrading' nelle deformazioni nel caso di ulteriore carico anelastico si riassumono nel quadro seguente:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_{\mathrm{ED}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{con} \quad \mathbf{E}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{E} + \dfrac{\bar{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{\epsilon} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}} \\ \dot{\mathbf{E}} = \dfrac{\bar{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\bar{H}} \; \bar{\boldsymbol{M}} \end{array}} \tag{3.30}$$

3.2.1 Associatività negli spazi di sforzi e rigidezze

I concetti di associatività si estendono anche agli spazi di sforzi e rigidezze. Nello spazio degli sforzi la simmetria degli operatori tangenti si ottiene quando $\bar{\mathbf{n}}$ ed $\bar{\mathbf{m}}$ risultano proporzionali:

$$\text{'}\textit{Associativity in stress space}\text{'} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{n}} \parallel \bar{\mathbf{m}} \quad \text{o} \quad \bar{\mathbf{m}} = -\bar{\mathbf{n}} \tag{3.31}$$

Per definire il concetto di associatività al livello tensoriale del 4^o ordine occorre prima definire il gradiente generalizzato della funzione di carico F rispetto alla forza termodinamica $(-\bar{\mathbf{Y}})$=$-\boldsymbol{\epsilon}\otimes\boldsymbol{\epsilon}/2$ associata alla rigidezza secante $\mathbf{E}$:

$$\bar{\boldsymbol{N}} = \left.\frac{\partial F}{\partial(-\bar{\mathbf{Y}})}\right|_{\lambda} \tag{3.32}$$

Il caso associato nello spazio delle rigidezze corrisponde ad una scelta di funzione di degradazione F e legge di degradazione $\bar{\boldsymbol{M}}$ tali che $\bar{\boldsymbol{N}}$ e $\bar{\boldsymbol{M}}$ siano tra loro proporzionali:

$$\text{'}\textit{Associativity in stiffness space}\text{'} \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{N}} \parallel \bar{\boldsymbol{M}} \quad \text{o} \quad \bar{\boldsymbol{M}} = -\bar{\boldsymbol{N}} \tag{3.33}$$

Inoltre, per derivazione composta si ottiene la relazione

$$\bar{\mathbf{n}} = \left.\frac{\partial F}{\partial(-\bar{\mathbf{Y}})}\right|_{\lambda} : \frac{\partial(-\bar{\mathbf{Y}})}{\partial\boldsymbol{\epsilon}} = -\bar{\boldsymbol{N}} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.34}$$

analoga alla (3.28). Possiamo affermare che se il modello è associato al livello del 4^o ordine lo è anche nello spazio degli sforzi:

$$\bar{\boldsymbol{N}} \parallel \bar{\boldsymbol{M}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{n}} \parallel \bar{\mathbf{m}} \tag{3.35}$$

Se le direzioni di degradazione $\bar{\mathbf{m}}$ e $\bar{\mathbf{M}}$ si ottengono come gradienti di potenziali di degradazione $\bar{Q}$ e $\bar{Q}'$ (Tab. 3.1), le condizioni di associatività possono essere riformulate come $\bar{Q}'$=$\bar{Q}$=F (si veda Carol et al.-1994a,b). Infine, si ricavano le relazioni tra i tensori $\boldsymbol{N}$ ed $\bar{\boldsymbol{N}}$ duali delle (3.29):

$$\bar{\boldsymbol{N}} = -\mathbf{E} : \boldsymbol{N} : \mathbf{E} \qquad \boldsymbol{N} = -\mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{N}} : \mathbf{C} \tag{3.36}$$

Le relazioni fondamentali della teoria costitutiva per materiali 'elastic-degrading' sono riassunte in Tab. 3.1.

Tabella 3.1: Sinossi delle equazioni dei materiali 'elastic-degrading': formulazioni negli sforzi e nelle deformazioni.

MATERIALI 'ELASTIC-DEGRADING'		
Relazione secante	$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}$
Formulazione	SFORZI $F[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}]$	DEFORMAZIONI $F[\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{q}}]$
	SPAZIO DEFORMAZIONI	*SPAZIO SFORZI*
Legge di flusso	$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}} = \dot{\lambda}\ \mathbf{m} \quad \left(\mathrm{o}\ \ \mathbf{m} = \dfrac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}} = \dot{\lambda}\ \bar{\mathbf{m}} \quad \left(\mathrm{o}\ \ \bar{\mathbf{m}} = \dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right)$
Gradiente/'Hardening'	$\mathbf{n} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\|_{\lambda} \quad H = -\left.\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}\right\|_{\boldsymbol{\sigma}}$	$\bar{\mathbf{n}} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right\|_{\lambda} \quad \bar{H} = -\left.\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}\right\|_{\boldsymbol{\epsilon}}$
Rigidezza tangente	$\mathbf{E}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{E} - \dfrac{\mathbf{E} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{E}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m}}$	$\mathbf{E}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{E} + \dfrac{\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}}$
Cedevolezza tangente	$\mathbf{C}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{C} + \dfrac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}{H}$	$\mathbf{C}_{\mathrm{ED}} = \mathbf{C} - \dfrac{\mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C}}{\bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}}}$
Relazioni mutue	$\mathbf{m} = -\mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}}$ $\mathbf{n} = \mathbf{C} : \bar{\mathbf{n}}$ $H = \bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}}$	$\bar{\mathbf{m}} = -\mathbf{E} : \mathbf{m}$ $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{E} : \mathbf{n}$ $\bar{H} = H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m}$
Associatività	$\mathbf{n} \parallel \mathbf{m} \quad (\mathrm{o}\ Q = F)$	$\bar{\mathbf{n}} \parallel \bar{\mathbf{m}} \quad (\mathrm{o}\ \bar{Q} = F)$
	SPAZIO CEDEVOLEZZE	*SPAZIO RIGIDEZZE*
Legge di degradazione	$\dot{\mathbf{C}} = \dot{\lambda}\, \boldsymbol{M} \left(\mathrm{o}\ \boldsymbol{M} = \dfrac{\partial Q'}{\partial(-\mathbf{Y})}\right)$	$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda}\, \bar{\boldsymbol{M}} \left(\mathrm{o}\ \bar{\boldsymbol{M}} = \dfrac{\partial \bar{Q}'}{\partial(-\bar{\mathbf{Y}})}\right)$
Forza termodinamica	$(-\mathbf{Y}) = \left.\dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{C}}\right\|_{\boldsymbol{\sigma}} = \dfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}$	$(-\bar{\mathbf{Y}}) = -\left.\dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}\right\|_{\boldsymbol{\epsilon}} = -\dfrac{1}{2}\, \boldsymbol{\epsilon} \otimes \boldsymbol{\epsilon}$
Gradiente generalizzato	$\boldsymbol{N} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial(-\mathbf{Y})}\right\|_{\lambda}$	$\bar{\boldsymbol{N}} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial(-\bar{\mathbf{Y}})}\right\|_{\lambda}$
L. flusso/L. degradazione	$\mathbf{m} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{\sigma}$	$\bar{\mathbf{m}} = \bar{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{\epsilon}$
Gradiente/Gradiente gen.	$\mathbf{n} = \boldsymbol{N} : \boldsymbol{\sigma}$	$\bar{\mathbf{n}} = -\bar{\boldsymbol{N}} : \boldsymbol{\epsilon}$
Relazioni mutue	$\boldsymbol{M} = -\mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{M}} : \mathbf{C}$ $\boldsymbol{N} = -\mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{N}} : \mathbf{C}$	$\bar{\boldsymbol{M}} = -\mathbf{E} : \boldsymbol{M} : \mathbf{E}$ $\bar{\boldsymbol{N}} = -\mathbf{E} : \boldsymbol{N} : \mathbf{E}$
Associatività	$\boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{M} \quad (\mathrm{o}\ Q' = Q = F)$	$\bar{\boldsymbol{N}} \parallel \bar{\boldsymbol{M}} \quad (\mathrm{o}\ \bar{Q}' = \bar{Q} = F)$

3.3 Modelli di danno discendenti da modelli 'elastic-degrading'

La *"meccanica del danneggiamento"* (*'Continuum Damage Mechanics'*) ha subito recentemente un rapidissimo sviluppo (si veda ad es. Lemaitre-1992). Le variabili di danno vengono introdotte per descrivere la perdita di rigidezza elastica in modelli costitutivi atti a descrivere anche fenomeni anelastici differenti, ad es. plastici o viscosi. Nel presente contesto ci si limita al puro comportamento elastico e si inquadra la formulazione dei modelli di danno nell'ambito della formulazione piú generale 'elastic-degrading' appena presentata.

In questi modelli di degradazione di rigidezza elastica occorre definire i tensori del 4^o ordine $\boldsymbol{M}$ od $\bar{\boldsymbol{M}}$ in termini di 21 parametri indipendenti. Sembra quindi spontaneo cercare di introdurre un numero inferiore di variabili indipendenti per semplificare la formulazione e la gestione del modello. In questo senso i modelli di danneggiamento con superficie di danno rientrano nella categoria dei materiali 'elastic-degrading' qualora si introducano opportune relazioni che definiscano le 21 componenti cercate in funzione di un numero ridotto di variabili di danno indipendenti.

Le variabili di danno vengono qui introdotte in tal senso ed indicate con i simboli grafici $\mathcal{D}$ o $\bar{\mathcal{D}}$, che indicano variabili tensoriali di ordine imprecisato: scalari, vettoriali, del 2^o ordine, del 4^o ordine. La definizione della variabile di danno scaturisce dai concetti tipici della meccanica del danneggiamento che verranno trattati nella successiva Sez. 3.4. In questa sezione ci si occupa dell'inquadramento dei modelli di danno all'interno della teoria 'elastic-degrading'.

Introduciamo le variabili di danno in modo da definire i valori correnti di rigidezza e cedevolezza elastica mediante funzioni continue e differenziabili dei loro valori iniziali e dello stato corrente di danneggiamento:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}[\mathbf{C}_o, \mathcal{D}] \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{E} = \mathbf{E}[\mathbf{E}_o, \bar{\mathcal{D}}] \tag{3.37}$$

La prima espressione conduce ad una formulazione nello spazio delle cedevolezze. Il secondo approccio nelle rigidezze è quello tipico della meccanica del danneggiamento ma viene presentato successivamente seguendo lo stesso ordine concettuale utilizzato nello sviluppo della teoria generale di degradazione di rigidezza elastica. Le soprassegnature delle variabili $\bar{\mathcal{D}}$ indicano variabili di danno nello spazio delle rigidezze duali delle variabili $\mathcal{D}$ nello spazio delle cedevolezze anche se tipicamente le $\bar{\mathcal{D}}$ sono le variabili base dei modelli di danneggiamento.

3.3.1 Formulazione nello spazio delle cedevolzze

L'incremento di cedevolezza elastica si ricava per differenziazione della relazione generale:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}[\mathbf{C}_o, \mathcal{D}] \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} \star \dot{\mathcal{D}} \tag{3.38}$$

Il simbolo '$\star$' indica un prodotto interno con contrazione tensoriale di un numero di indici dipendente dalla natura tensoriale della variabile $\mathcal{D}$. Ad es., nel caso di un danneggiamento del 2^o ordine, '$\star$' coincide con ':' e si ha $\dot{C}_{ijkl}{=}\partial C_{ijkl}/\partial D_{pq} D_{pq}$.

Estendiamo la legge di degradazione nello spazio del danneggiamento in modo analogo a quanto fatto nello spazio degli sforzi e delle cedevolezze. L'incremento della variabile di danno risulti proporzionale ad un tensore $\mathcal{M}$ che definisce la direzione di danneggiamento:

$$\dot{\mathcal{D}} = \dot{\lambda}\, \mathcal{M} \tag{3.39}$$

Poichè la legge di degradazione è assegnata dalla legge $\dot{\mathbf{C}}=\dot{\lambda}\boldsymbol{M}$, eliminando i moltiplicatori anelastici in $\dot{\lambda}\boldsymbol{M}=\dot{\lambda}\partial\mathbf{C}/\partial\mathcal{D}\star\mathcal{M}$ si ottiene la relazione che lega la direzione di danneggiamento a quella di degradazione,

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} \star \mathcal{M}} \tag{3.40}$$

Quindi, assegnata la legge di danneggiamento con le relazioni (3.38) e (3.39) la legge di degradazione segue dalla (3.40). Anche se il tensore $\mathcal{D}$ può avere un ordine tensoriale inferiore al 4^o, l'affermazione appena fatta vale in quanto l'informazione al livello del 4^o ordine deriva dalla funzione $\mathbf{C}[\mathbf{C}_o, \mathcal{D}]$ che va parimenti assegnata. Anche la legge di degradazione per $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}=\dot{\lambda}\mathbf{m}$ consegue da $\mathcal{M}$ attraverso la relazione

$$\mathbf{m} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} \star \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3.41}$$

La direzione $\mathbf{m}$ va quindi sostituita nell'espressione (3.6) degli operatori tangenti $\mathbf{E}_{\mathrm{ED}}$ e $\mathbf{C}_{\mathrm{ED}}$ della teoria generale 'elastic-degrading'. Si ricorda che la definizione di un modello di danno nell'ambito di questa formulazione richiede l'introduzione di una funzione di carico F che definisca la soglia corrente di danneggiamento.

3.3.2 Formulazione nello spazio delle rigidezze

Come si è detto l'approccio nelle rigidezze è quello tradizionale nella meccanica del danneggiamento, in cui le variabili $\bar{\mathcal{D}}$ vengono introdotte direttamente nel prescrivere il legame tra rigidezza corrente e rigidezza iniziale mediante una relazione del tipo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{E}_o, \bar{\mathcal{D}}) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \dot{\bar{\mathcal{D}}} \tag{3.42}$$

Le variabili $\bar{\mathcal{D}}$ risultano differenti dalle variabili $\mathcal{D}$ precedentemente introdotte nel definire la funzione di cedevolezza, anche se possono essere correlate.

Procedendo in modo analogo a quanto fatto al punto precedente si definisce una legge di danno

$$\dot{\bar{\mathcal{D}}} = \dot{\lambda}\, \bar{\mathcal{M}} \tag{3.43}$$

che può essere sostituita nella (3.42). Utilizzando la legge di degradazione $\dot{\mathbf{E}}=\dot{\lambda}\bar{\boldsymbol{M}}$ ed eliminando i moltiplicatori anelastici si ottiene la relazione tra $\bar{\boldsymbol{M}}$ ed $\bar{\mathcal{M}}$:

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{M}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \bar{\mathcal{M}}} \tag{3.44}$$

Conseguentemente segue anche la direzione di degradazione al livello tensoriale del 2^o ordine $\bar{\mathbf{m}}$, nella legge di degradazione $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{D}}=\dot{\lambda}\bar{\mathbf{m}}$:

$$\bar{\mathbf{m}} = \bar{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \bar{\mathcal{M}} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.45}$$

Tale relazione va sostituita nelle espressioni (3.25) degli operatori tangenti della teoria 'elastic-degrading' specificandone cosí la formulazione di meccanica del danneggiamento.

3.3.3 Associatività nello spazio delle variabili di danno

Il concetto di associatività può essere esteso allo spazio delle variabili di danneggiamento definendo ulteriori gradienti generalizzati della condizione di danneggiamento, $\mathcal{N}$ od $\bar{\mathcal{N}}$, da paragonarsi con le corrispondenti direzioni $\mathcal{M}$ od $\bar{\mathcal{M}}$. Prima di ciò occorre definire le forze termodinamiche $(-\mathcal{Y})$ e $(-\bar{\mathcal{Y}})$ associate alle variabili di danno $\mathcal{D}$ e $\bar{\mathcal{D}}$ nell'espressione della dissipazione energetica $\dot{d}=(-\mathbf{Y})::\dot{\mathbf{C}}=(-\bar{\mathbf{Y}})::\dot{\mathbf{E}}$,

$$\dot{d} = (-\mathbf{Y}) :: \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} \star \dot{\mathcal{D}} = (-\mathcal{Y}) \star \dot{\mathcal{D}}\ ; \qquad \dot{d} = (-\bar{\mathbf{Y}}) :: \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \dot{\bar{\mathcal{D}}} = (-\bar{\mathcal{Y}}) \star \dot{\bar{\mathcal{D}}} \tag{3.46}$$

In cui le forze termodinamiche associate alle varabili di danno si definiscono come

$$(-\mathcal{Y}) = (-\mathbf{Y}) :: \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}}\ ; \qquad (-\bar{\mathcal{Y}}) = (-\bar{\mathbf{Y}}) :: \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \tag{3.47}$$

Siamo ora in grado di definire i gradienti generalizzati della funzione di danneggiamento rispetto alle forze termodinamiche associate alle variabili di danno

$$\mathcal{N} = \left.\frac{\partial F}{\partial(-\mathcal{Y})}\right|_{\lambda} \qquad \text{ed} \qquad \bar{\mathcal{N}} = \left.\frac{\partial F}{\partial(-\bar{\mathcal{Y}})}\right|_{\lambda} \tag{3.48}$$

La formulazione con danneggiamento si dice associata nello spazio delle variabili di danno qualora le quantità $\mathcal{N}$ ed $\mathcal{M}$ oppure $\bar{\mathcal{N}}$ ed $\bar{\mathcal{M}}$ siano tra loro proporzionali

$$\text{'}\textit{Associativity in damage space}\text{'} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N} \parallel \mathcal{M} \quad \text{o} \quad \bar{\mathcal{N}} \parallel \bar{\mathcal{M}} \tag{3.49}$$

L'associatività al livello del danno può essere correlata all'associatività nello spazio delle rigidezze e delle cedevolezze. Utilizzando la regola di derivazione di funzioni composte si può infatti ricavare la relazione

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} \star \mathcal{N} \qquad \text{ed} \qquad \bar{\boldsymbol{N}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \bar{\mathcal{N}}} \tag{3.50}$$

Paragonando queste espressioni con le relazioni (3.40) tra $\boldsymbol{M}$ ed $\mathcal{M}$ e (3.44) tra $\bar{\boldsymbol{M}}$ ed $\bar{\mathcal{M}}$ possiamo concludere che associatività nello spazio delle variabili di danno implica associatività nello spazio delle cedevolezze e delle rigidezze e conseguentemente implica anche associatività nello spazio di deformazioni e sforzi

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} \parallel \mathcal{M} & \Rightarrow & \boldsymbol{N} \parallel \boldsymbol{M} & \Rightarrow & \mathbf{n} \parallel \mathbf{m} \\ \bar{\mathcal{N}} \parallel \bar{\mathcal{M}} & \Rightarrow & \bar{\boldsymbol{N}} \parallel \bar{\boldsymbol{M}} & \Rightarrow & \bar{\mathbf{n}} \parallel \bar{\mathbf{m}} \end{array} \tag{3.51}$$

Anche a questo livello se le direzioni di danneggiamento $\mathcal{M}$, $\bar{\mathcal{M}}$ sono gradienti generalizzati di potenziali di danno Q'', $\bar{Q}''$ (Tab. 3.2, 3.3), si può riformulare la condizione di associatività in termini di $Q''=Q'=Q=$F, oppure $\bar{Q}''=\bar{Q}'=\bar{Q}=$F (Carol et al.-1994a,b).

A completamento della teoria si possono anche ricavare le relazioni tra $\mathcal{M}$ ed $\bar{\mathcal{M}}$, e le corrispondenze tra $\mathcal{N}$ ed $\bar{\mathcal{N}}$. Ad es., nel caso di $\bar{\mathcal{M}}$ in funzione di $\mathcal{M}$ si utilizza la prima delle (3.29) e sostituendo la (3.40) per $\boldsymbol{M}$ e la (3.44) per $\bar{\boldsymbol{M}}$ si ottiene

$$\bar{\mathcal{M}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}}\right)^{-1} \star \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \left(\mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} : \mathbf{E}\right)\right) \star \mathcal{M} \tag{3.52}$$

Una espressione analoga si può trovare anche per la relazione inversa

$$\mathcal{M} = -\left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}}\right)^{-1} \star \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \left(\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} : \mathbf{C}\right)\right) \star \bar{\mathcal{M}} \tag{3.53}$$

Infine, utilizzando le espressioni (3.36), si ricavano anche le corrispondenti relazioni tra $\mathcal{N}$ ed $\bar{\mathcal{N}}$:

$$\bar{\mathcal{N}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}}\right)^{-1} \star \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \left(\mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} : \mathbf{E}\right)\right) \star \mathcal{N} \tag{3.54}$$

$$\mathcal{N} = -\left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}}\right)^{-1} \star \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \left(\mathbf{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} : \mathbf{C}\right)\right) \star \bar{\mathcal{N}} \tag{3.55}$$

Le equazioni fondamentali dei modelli 'elastic-degrading' con danneggiamento sono riassunte in Tab. 3.2 per la formulazione nelle cedevolezze ed in Tab. 3.3 per la formulazione nelle rigidezze.

Tabella 3.2: Sinossi delle equazioni dei materiali 'elastic-degrading' con danneggiamento: formulazione nelle cedevolezze.

MATERIALI 'ELASTIC-DEGRADING' CON DANNEGGIAMENTO	
	SPAZIO DANNO-CEDEVOLEZZE
Formulazione	SFORZI $F[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}]$
Relazione secante	$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C}[\mathbf{C}_o, \mathcal{D}] : \boldsymbol{\sigma}$
Legge di danno	$\dot{\mathcal{D}} = \dot{\lambda}\, \mathcal{M} \qquad \left(\text{o } \mathcal{M} = \dfrac{\partial Q''}{\partial(-\mathcal{Y})}\right)$
Forza termodinamica	$(-\mathcal{Y}) = \left.\dfrac{\partial w}{\partial \mathcal{D}}\right\|_{\boldsymbol{\sigma}} = (-\mathbf{Y}) :: \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}}$
Gradiente generalizzato	$\mathcal{N} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial(-\mathcal{Y})}\right\|_{\lambda}$
L. degradazione/L. danno	$\boldsymbol{M} = \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} \star \mathcal{M}$
Gradiente gen./Gradiente gen.	$\boldsymbol{N} = \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} \star \mathcal{N}$
Relazioni mutue	$\mathcal{M} = -\left(\dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}}\right)^{-1} \star \left(\dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \left(\mathbf{C} : \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} : \mathbf{C}\right)\right) \star \bar{\mathcal{M}}$ $\mathcal{N} = -\left(\dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}}\right)^{-1} \star \left(\dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} :: \left(\mathbf{C} : \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} : \mathbf{C}\right)\right) \star \bar{\mathcal{N}}$
Associatività	$\mathcal{N} \parallel \mathcal{M} \qquad (\text{o } Q'' = Q' = Q = F)$

Tabella 3.3: Sinossi delle equazioni dei materiali 'elastic-degrading' con danneggiamento: formulazione nelle rigidezze.

MATERIALI 'ELASTIC-DEGRADING' CON DANNEGGIAMENTO	
	SPAZIO DANNO-RIGIDEZZE
Formulazione	DEFORMAZIONI $F[\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{q}}]$
Relazione secante	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}[\mathbf{E}_o, \bar{\mathcal{D}}] : \boldsymbol{\epsilon}$
Legge di danno	$\dot{\bar{\mathcal{D}}} = \dot{\lambda}\, \bar{\mathcal{M}} \qquad \left(\text{o } \bar{\mathcal{M}} = \dfrac{\partial \bar{Q}''}{\partial(-\bar{\mathcal{Y}})} \right)$
Forza termodinamica	$(-\bar{\mathcal{Y}}) = - \left. \dfrac{\partial w}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \right\|_{\boldsymbol{\epsilon}} = (-\bar{\mathbf{Y}}) :: \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}}$
Gradiente generalizzato	$\bar{\mathcal{N}} = \left. \dfrac{\partial F}{\partial(-\bar{\mathcal{Y}})} \right\|_{\lambda}$
L. degradazione/L. danno	$\bar{\boldsymbol{M}} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \bar{\mathcal{M}}$
Gradiente gen./Gradiente gen.	$\bar{\boldsymbol{N}} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \bar{\mathcal{N}}$
Relazioni mutue	$\bar{\mathcal{M}} = - \left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \right)^{-1} \star \left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \left(\mathbf{E} : \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} : \mathbf{E} \right) \right) \star \mathcal{M}$ $\bar{\mathcal{N}} = - \left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \right)^{-1} \star \left(\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} :: \left(\mathbf{E} : \dfrac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathcal{D}} : \mathbf{E} \right) \right) \star \mathcal{N}$
Associatività	$\bar{\mathcal{N}} \parallel \bar{\mathcal{M}} \qquad (\text{o } \bar{Q}'' = \bar{Q}' = \bar{Q} = F)$

3.4 Le variabili di danno nella meccanica del danneggiamento

Nell'ambito della meccanica del danneggiamento le leggi costitutive secanti $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}[\mathbf{E}_o, \bar{\mathcal{D}}]:\boldsymbol{\epsilon}$ ed $\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{C}[\mathbf{C}_o, \mathcal{D}]:\boldsymbol{\sigma}$ sono descritte mediante l'introduzione di opportune variabili di danno $\bar{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}$ atte a tenere in conto la perdita di rigidezza del materiale. Poichè nell'approccio tipico della meccanica del danneggiamento le variabili primarie di danneggiamento sono connesse alla rigidezza, le variabili $\bar{\mathcal{D}}$, quando esplicitate, verranno indicate senza la soprassegnatura, come ad es. per α, D, $\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Si consideri una prova di trazione monoassiale di un provino con sezione iniziale A_o e lunghezza iniziale l_o. Per effetto del carico applicato P il provino subisce un allungamento δ, e gli sforzi e deformazioni *"nominali"* vengono definiti come $\sigma=P/A_o$, $\epsilon=\delta/l_o$ nell'ipotesi di risposta omogenea in tutti i punti del provino. Tuttavia possiamo ipotizzare che il danneggiamento all'interno del materiale dovuto alla crescita e coalescenza delle microfratture causi in realtà una riduzione dell'area effettivamente in grado di trasmettere lo stato di sforzo (si veda la rappresentazione simbolica in Fig. 3.5). Di conseguenza la parte integra A della sezione iniziale sarà solo una parte di essa, $A=\alpha A_o$ e quindi risulterà soggetta a sforzi e deformazioni *"effettivi"* od *"efficaci"* (*'effective'*, si veda ad es. SIMO AND JU-1987) di entità differente rispetto a quelli nominali.

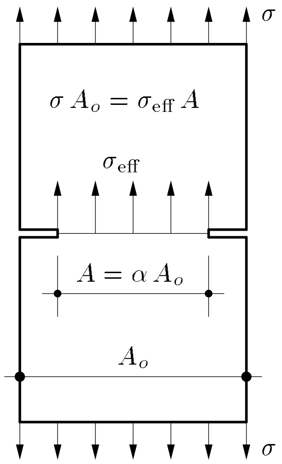


Figura 3.5: Rappresentazione simbolica di sforzi nominale ed effettivo nel caso monoassiale.

Le quantità effettive sono pertanto relative al materiale integro e sono quindi espresse dalla legge elastica del materiale. L'introduzione delle variabili di danno definisce la trasformazione di leggi costitutive in termini di quantità effettive a relazioni in termini delle quantità fisiche nominali che si utilizzano nella modellazione. Si opera quindi secondo lo schema di Fig. 3.6, passando attraverso la definizione di relazioni intermedie tra quantità nominali e grandezze effettive, statiche o cinematiche. Una delle due relazioni viene definita in termini della variabile di danno introdotta. L'altra relazione scaturisce per *"equivalenza degli sforzi"*, *"equivalenza delle deformazioni"* od *"equivalenza energetica"* (dai termini *'stress equivalence'*, *'strain equivalence'*, *'energy equivalence'*, nella letteratura in lingua inglese), (si veda CAROL ET AL.-1995b).

	SFORZO	DEFORMAZIONE
NOMINALE	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\epsilon}$
EFFETTIVO	$\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$	$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}$

Figura 3.6: Leggi costitutive nominali ed effettive.

3.4.1 Ipotesi di equivalenza delle deformazioni

Nell'ipotesi di equivalenza delle deformazioni si suppone che il materiale sia formato da un insieme di fibre poste in parallelo all'asse di carico. Al progredire del danno l'area di ciascuna fibra diminuisce ma la deformazione di ciascuna delle fibre rimane la stessa ed eguaglia quella complessiva mentre lo sforzo si ridistribuisce in modo che lo sforzo risultante sia pari a quello nominale. Si assume quindi eguaglianza tra deformazioni nominali ed effettive:

$$\epsilon = \epsilon_{\text{eff}} \tag{3.56}$$

Il legame tra sforzi nominale ed effettivo si impone con la condizione di equilibrio (Fig. 3.5)

$$\sigma\ A_o = \sigma_{\text{eff}}\ A \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \frac{A}{A_o}\ \sigma_{\text{eff}} = \alpha\ \sigma_{\text{eff}} \tag{3.57}$$

dove α indica la variabile d'integrità compresa tra 0 ed 1 (Valanis-1990): per α=0 il materiale risulta completamente danneggiato e non rimane alcuna area resistente disponibile; per α=1 il materiale è ancora integro. Viceversa, la variabile complementare di danno D=1−α aumenta da 0 ad 1 nel corso del fenomeno di danneggiamento. Sostituendo nella legge costitutiva del materiale integro σ_{eff}=$E_o\epsilon_{\text{eff}}$ le relazioni ϵ_{eff}=ϵ, σ_{eff}=σ/α, si ricava la legge costitutiva in termini di quantità nominali, σ=$\alpha E_o\epsilon$=$(1-D)E_o\epsilon$. In definitiva si può pensare che il processo di danneggiamento venga riassunto da una perdita di rigidezza in termini di quantità nominali, E=αE_o=$(1-D)E_o$.

Una volta definita le legge costitutiva nel caso monoassiale la si generalizza al tridimensionale procedendo in modo analogo. Si definisce la relazione tra sforzi effettivi e nominali mediante un tensore integrità del 4^o ordine $\boldsymbol{\alpha}$ ed un tensore danno del 4^o ordine $\mathbf{D}$ che possiedono in generale solo le simmetrie minori:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} = (\mathbf{i}_4 - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} \tag{3.58}$$

Assumendo l'equivalenza delle deformazioni, $\boldsymbol{\epsilon}$=$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}$, si ottiene $\boldsymbol{\sigma}$=$\boldsymbol{\alpha}$:$\mathbf{E}_o$:$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}$=$\boldsymbol{\alpha}$:$\mathbf{E}_o$:$\boldsymbol{\epsilon}$. Di conseguenza l'espressione della rigidezza secante appare essere una generalizzazione della legge monoassiale $E{=}\alpha E_o$:

$$\boxed{\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{E}_o = (\mathbf{i}_4 - \mathbf{D}) : \mathbf{E}_o} \tag{3.59}$$

3.4.2 Ipotesi di equivalenza degli sforzi

L'approccio duale di equivalenza degli sforzi formula l'ipotesi $\sigma{=}\sigma_{\text{eff}}$, conseguente all'assunzione di un insieme di strati di materiale posti in serie nella direzione dell'asse di carico. La deformazione effettiva risulta ridotta rispetto alla deformazione nominale a causa dell'apertura di microcricche che aumentano la lunghezza originaria l_o al valore l. Si introduce una seconda variabile di integrità $0{\leq}\alpha{\leq}1$ definita in modo tale da rispettare la condizione di congruenza

$$\epsilon_{\text{eff}}\, l = \epsilon\, l_o \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon_{\text{eff}} = \frac{l_o}{l}\,\epsilon = \alpha\epsilon \tag{3.60}$$

Con tale definizione della variabile di integrità si perviene alla stessa espressione della rigidezza secante $E{=}\alpha E_o$. Infatti combinando l'equivalenza degli sforzi, la legge del materiale integro e la relazione di congruenza si ottiene $\alpha\epsilon{=}\epsilon_{\text{eff}}{=}C_o\sigma_{\text{eff}}{=}C_o\sigma$ e quindi $\sigma{=}\alpha E_o\epsilon$.

La generalizzazione al caso tridimensionale fornisce invece un'espressione leggermente diversa qualora la variabile tensoriale di integrità $\boldsymbol{\alpha}$, definita nel modo seguente, non possieda le simmetrie maggiori ($\boldsymbol{\alpha}{\neq}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, $\alpha_{ijkl}{\neq}\alpha_{klij}$),

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}} = \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.61}$$

Gli sforzi si ricavano quindi come $\boldsymbol{\sigma}{=}\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}{=}\mathbf{E}_o{:}\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}{=}\mathbf{E}_o{:}\boldsymbol{\alpha}{:}\boldsymbol{\epsilon}$ e la rigidezza secante si esprime

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_o : \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} : \mathbf{E}_o} \tag{3.62}$$

Entrambe le espressioni (3.59), (3.62) non trasmettono in generale le simmetrie maggiori di $\mathbf{E}_o$ ad $\mathbf{E}$, anche nel caso in cui il tensore integrità possieda le simmetrie maggiori ($\boldsymbol{\alpha}{=}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$). Al contrario, la successiva ipotesi di equivalenza energetica preserva automaticamente le simmetrie maggiori del tensore di rigidezza.

3.4.3 Ipotesi di equivalenza energetica

In questo approccio, una volta definita una delle due relazioni tra quantità nominali ed effettive l'altra si ottiene dall'eguaglianza dei lavori virtuali interni negli spazi nominali ed effettivi. Supponendo che gli sforzi siano legati dalla relazione $\sigma{=}\alpha\sigma_{\text{eff}}$, con $0{\leq}\alpha{\leq}1$, l'eguaglianza dei lavori virtuali fornisce

$$\epsilon\,\delta\sigma = \epsilon_{\text{eff}}\,\delta\sigma_{\text{eff}} \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon_{\text{eff}} = \alpha\,\epsilon \tag{3.63}$$

D'altro canto, ipotizzando $\epsilon_{\text{eff}}{=}\alpha\epsilon$, per una variazione virtuale di deformazione si impone l'eguaglianza

$$\sigma\,\delta\epsilon = \sigma_{\text{eff}}\,\delta\epsilon_{\text{eff}} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \alpha\,\sigma_{\text{eff}} \tag{3.64}$$

L'equivalenza energetica fornisce quindi un approccio intermedio tra i due precedenti nel senso che entrambe le quantità effettive differiscono da quelle nominali durante il processo di danneggiamento. La rigidezza secante si ottiene dalla legge del materiale integro e dalle relazioni appena menzionate $\sigma{=}\alpha\sigma_{\text{eff}}{=}\alpha E_o\epsilon_{\text{eff}}{=}\alpha E_o\alpha\epsilon$, da cui $E{=}\alpha E_o\alpha{=}\alpha^2 E_o$.

La generalizzazione al tridimensionale conduce a due differenti espressioni della rigidezza secante. Nel primo caso se $\boldsymbol{\sigma}{=}\boldsymbol{\alpha}{:}\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$, essendo $\boldsymbol{\alpha}$ la variabile integrità del 4^o ordine, dall'eguaglianza dei lavori interni si ha $\boldsymbol{\epsilon}{:}\delta\boldsymbol{\sigma}{=}\boldsymbol{\epsilon}{:}\boldsymbol{\alpha}{:}\delta\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}{:}\delta\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$ e quindi $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}{:}\boldsymbol{\epsilon}$. La rigidezza secante si esprime come $\boldsymbol{\sigma}{=}\boldsymbol{\alpha}{:}\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\alpha}{:}\mathbf{E}_o{:}\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\alpha}{:}\mathbf{E}_o{:}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}{:}\boldsymbol{\epsilon}$, cioè

$$\boxed{\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{E}_o : \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}} \tag{3.65}$$

Come fatto rilevare in precedenza risulta ora direttamente $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}{=}\mathbf{E}$, come richiesto da una legge elastica che postuli l'esistenza di un'energia di deformazione $w[\boldsymbol{\epsilon}]$.

Nel secondo modo si assume la relazione $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\alpha}{:}\boldsymbol{\epsilon}$ tra le deformazioni e l'identità dei lavori virtuali fornisce $\boldsymbol{\sigma}{:}\delta\boldsymbol{\epsilon}{=}\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}{:}\delta\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}{:}\boldsymbol{\alpha}{:}\delta\boldsymbol{\epsilon}$, da cui $\boldsymbol{\sigma}{=}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}{:}\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$. Di conseguenza si ha $\boldsymbol{\sigma}{=}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}{:}\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}{:}\mathbf{E}_o{:}\boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}}{=}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}{:}\mathbf{E}_o{:}\boldsymbol{\alpha}{:}\boldsymbol{\epsilon}$ e si ottiene la rigidezza secante simmetrica

$$\boxed{\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} : \mathbf{E}_o : \boldsymbol{\alpha}} \tag{3.66}$$

Le due espressioni (3.65), (3.66) coincidono qualora il tensore $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfi le simmetrie maggiori $\alpha_{ijkl}{=}\alpha_{klij}$.

Le espressioni della rigidezza secante ottenute con i diversi approcci di omogeneizzazione possono essere riassunte in forma moltiplicativa utilizzando un tensore dell'8^o ordine $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ che possiamo chiamare *"tensore di effetto danno"* (*'damage effect tensor'*) nel senso che definisce l'effetto del danno sulla rigidezza materiale anche se la descrizione tensoriale di danno è in genere inferiore all'8^o ordine. In altre parole l'effettiva natura tensoriale del danno è definita dalle sue variabili indipendenti attraverso le quali si costruisce un tensore di effetto danno. Anche lo stesso tensore $\boldsymbol{\alpha}$ del 4^o ordine precedentemente introdotto rappresenta l'effetto del danno su sforzi, deformazioni e rigidezza ma può essere espresso per mezzo di variabili tensoriali di ordine inferiore. In modo analogo si definisce anche un tensore duale $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ che rappresenta l'effetto di danneggiamento sulla cedevolezza $\mathbf{C}_o$:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\Omega} :: \mathbf{E}_o \qquad\qquad \mathbf{C} = \bar{\boldsymbol{\Omega}} :: \mathbf{C}_o \tag{3.67}$$

Ad es. si può verificare che le espressioni (3.59), (3.62), (3.65), si ritrovano assumendo

$$\begin{aligned} \textit{'Strain equivalence'} &\;\Rightarrow\; \Omega_{ijklpqrs} = \alpha_{ijpq}\,\delta_{kr}\,\delta_{ls} \\ \textit{'Stress equivalence'} &\;\Rightarrow\; \Omega_{ijklpqrs} = \delta_{ip}\,\delta_{jq}\,\alpha_{rskl} \\ \textit{'Energy equivalence'} &\;\Rightarrow\; \Omega_{ijklpqrs} = \alpha_{ijpq}\,\alpha_{klrs} \end{aligned} \tag{3.68}$$

3.4.4 Natura tensoriale delle variabili di danno

In letteratura sono stati proposti diversi tipi di variabili di danneggiamento: scalari, vettoriali, tensoriali del 2^o, 4^o od 8^o ordine (Leckie and Onat-1980, Ju-1990, Lemaitre-1992). La maggior parte di queste formulazioni rientra nell'ambito generale fin qui presentato, mentre altre forniscono direttamente l'espressione della rigidezza senza utilizzare alcun concetto di omogeneizzazione ed equivalenza. In questa sezione si descriverà in dettaglio una forma di danneggiamento scalare alquanto generale mentre si accennerà brevemente alle forme tensoriali delle variabili di danno.

3.4.4.1 Forma tradizionale di danno scalare

Il modo piú semplice di esprimere la perdita di rigidezza per mezzo di variabili di danneggiamento consiste nell'utilizzo di un'unica variabile scalare. In questo caso il tensore $\boldsymbol{\alpha}$ di effetto danno su sforzi e deformazioni assume la forma isotropa $\boldsymbol{\alpha}=\alpha\mathbf{i}_4$ di modo che le relazioni tra quantità nominali ed effettive si semplificano come

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha\, \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} = (1-D)\, \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} \qquad \text{o/e} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}} = \alpha\, \boldsymbol{\epsilon} = (1-D)\, \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.69}$$

Tutte le componenti della rigidezza secante variano secondo lo stesso fattore di proporzionalità $\mathbf{E}=\beta\mathbf{E}_o$. Nel caso dell'ipotesi usuale di equivalenza degli sforzi o delle deformazioni $\beta=(1-D)$, nel caso di equivalenza energetica $\beta=(1-D)^2$, ove D indica la variabile di danno scalare $0\leq D\leq 1$. La cedevolezza secante consegue per inversione come $\mathbf{C}=\bar{\beta}\mathbf{C}_o$, ove $\bar{\beta}=1/\beta$. Questa forma di danno scalare è isotropa in quanto il fattore scalare modifica tutte le componenti di $\mathbf{E}_o$ proporzionalmente, ma non rappresenta certo la forma piú generale di danno isotropo (si veda in proposito la successiva discussione sui tensori di danno del 4^o ordine). Riassumendo, nel caso classico di equivalenza degli sforzi o delle deformazioni che verrà qui considerato si ritrovano le espressioni tradizionali:

$$\mathbf{E} = (1-D)\, \mathbf{E}_o\, ; \qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}_o/(1-D) \tag{3.70}$$

In questa forma tradizionale di danno scalare isotropo solo il modulo di Young si degrada al progredire del danno D, $E=(1-D)E_o$. Il coefficiente di Poisson rimane costante $\nu=\nu_o$ (Ju-1990). Infatti entrambe le costanti di Lamé sono moltiplicate dallo stesso fattore di proporzionalità e quindi

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\mu_o}{\lambda_o} = \frac{1}{2\nu_o} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \nu = \nu_o \tag{3.71}$$

Altre forme piú generali di danno scalare sono proposte nel punto seguente.

Nell'ambito della teoria costitutiva brevemente presentata in questo capitolo è possibile fornire una formulazione generale di un modello di danneggiamento scalare con legge di degradazione associata a tutti i livelli (Carol et al.-1994a,b). Per ottenere un modello di danno scalare associato la condizione di danneggiamento deve essere espressa in funzione dell'energia elastica relativa al materiale non danneggiato $\bar{w}_o$ nella forma generale

$$F = f[\bar{w}_o, D] - r[D] \qquad \text{con} \qquad \bar{w}_o = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{E}_o : \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.72}$$

Ne consegue un'espressione dell'operatore tangente in grado di rappresentare molte delle formulazioni esistenti in letteratura (ad es. MAZARS AND LEMAITRE-1984, SIMO AND JU-1987, JU-1989, BENALLAL ET AL.-1989, NEILSEN AND SCHREYER-1992):

$$\mathbf{E}_{\mathrm{ED}} = (1-D)\,\mathbf{E}_o - \beta[\bar{w}_o, D]\ \boldsymbol{\sigma}_o \otimes \boldsymbol{\sigma}_o\, ;\quad \beta[\bar{w}_o, D] = \frac{1}{\bar{H}}\,\frac{\partial f}{\partial \bar{w}_o}\bigg|_D \ ;\ \ \bar{H} = -\left.\frac{\partial F}{\partial D}\right|_{\bar{w}_o} \tag{3.73}$$

in cui $\boldsymbol{\sigma}_o$=$\mathbf{E}_o$:$\boldsymbol{\epsilon}$=$\boldsymbol{\sigma}/(1-D)$ indica lo sforzo calcolato con la rigidezza del materiale non danneggiato e β è una funzione che dipende dalle specifiche del modello di danno. La struttura dell'operatore tangente è quindi unica e contiene una modifica di rango uno della rigidezza secante, modifica formata dal prodotto tensoriale dei due tensori di sforzo $\boldsymbol{\sigma}_o$.

3.4.4.2 Forme generali di danno scalare

Accanto alla classica formulazione del tipo $(1-D)$ si possono proporre altre forme di danno scalare, in cui le componenti del tensore di rigidezza variano tra di loro in modo differente. Il valore corrente di rigidezza $\mathbf{E}$ si esprime in modo molto generale ed intuitivo come somma del valore iniziale $\mathbf{E}_o$ piú una variazione di rigidezza dipendente dal valore attuale del danno

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \lambda[D]\ \bar{\boldsymbol{M}}\ ; \qquad\qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}_o + \lambda[D]\ \boldsymbol{M} \tag{3.74}$$

in cui $\bar{\boldsymbol{M}}$ ed $\boldsymbol{M}$ sono tensori costanti del 4^o ordine. Si noti che se $\bar{\boldsymbol{M}}$ ed $\boldsymbol{M}$ sono assegnati in forma isotropa, la formulazione di danneggiamento scalare fornisce un modello di danno isotropo. In caso di tensori $\bar{\boldsymbol{M}}$ ed $\boldsymbol{M}$ anisotropi, il danno scalare crea un effetto anisotropo sugli operatori secanti (si veda anche il punto successivo sulle variabili tensoriali del 4^o ordine).

La competente formulazione 'elastic-degrading' con danneggiamento risulta associata a tutti i livelli qualora la condizione di danno F=0 venga espressa nella forma

$$F[\boldsymbol{\sigma}, \lambda] = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} - r[\lambda] = 0 \quad \text{od} \quad F[\boldsymbol{\epsilon}, \lambda] = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\epsilon} : (-\bar{\mathbf{M}}) : \boldsymbol{\epsilon} - r[\lambda] = 0 \tag{3.75}$$

L'associatività al livello del 2^o ordine segue immediatamente ricavando il gradiente della funzione di danneggiamento. Infatti, ricordando la (3.9) si ottiene

$$\mathbf{n} = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_\lambda = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{m} \qquad \text{o} \qquad \bar{\mathbf{n}} = \left.\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_\lambda = -\bar{\mathbf{M}} : \boldsymbol{\epsilon} = -\bar{\mathbf{m}} \tag{3.76}$$

Differenziando le espressioni (3.74) si ottiene

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda}\ \bar{\boldsymbol{M}} \qquad\qquad \dot{\mathbf{C}} = \dot{\lambda}\ \boldsymbol{M} \tag{3.77}$$

quindi i tensori $\bar{\boldsymbol{M}}$ ed $\boldsymbol{M}$ in (3.74) sono anche quelli che definiscono la legge di fratturazione nella teoria di materiali 'elastic-degrading'.

La formulazione tradizionale si riottiene immediatamente ponendo $\bar{\boldsymbol{M}}$=$-\mathbf{E}_o$ con λ=D oppure $\boldsymbol{M}$=$\mathbf{C}_o$ con λ=$D/(1-D)$. Come visto si ottiene una variazione lineare di E con la variabile di danno, mentre ν rimane costante (Fig. 3.7, 3.8)

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \mathbf{C}_o \quad \Rightarrow \quad E = (1-D)\ E_o\ ; \qquad \nu = \nu_o} \tag{3.78}$$

Altre forme di danno scalare si ottengono assegnando il tensore direzione $\boldsymbol{M}$ in modi diversi. In particolare vengono qui proposte due formulazioni alternative di danno scalare isotropo, $\boldsymbol{M}=\mathbf{i}_4^s$ ed $\boldsymbol{M}=\mathbf{P}_d$, in entrambe le quali si definisce la legge $\lambda[D]$ in modo che $G=(1-D)\,G_o$, cioè con $\lambda[D]=D/2\mu_o(1-D)$.

Nel primo caso, $\boldsymbol{M}=\mathbf{i}_4^s$, imponendo l'eguaglianza tra le componenti di $\mathbf{C}$ e quelle di $\mathbf{C}_o+\lambda\boldsymbol{M}$,

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_o + \lambda\, \boldsymbol{M} = -\frac{\nu_o}{E_o}\, \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \frac{1}{1-D}\, \frac{1+\nu_o}{E_o}\, \mathbf{i}_4^s \tag{3.79}$$

si ottiene il seguente sistema di equazioni nelle incognite E e ν,

$$\begin{cases} -\dfrac{\nu}{E} = -\dfrac{\nu_o}{E_o} \\ \dfrac{1+\nu}{E} = \dfrac{1}{1-D}\, \dfrac{1+\nu_o}{E_o} \end{cases} \tag{3.80}$$

Risolvendo il sistema risulta:

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \mathbf{i}_4^s \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{(1-D)\,E_o}{1+\nu_o\,D} \quad ; \qquad \nu = \frac{(1-D)\,\nu_o}{1+\nu_o\,D}} \tag{3.81}$$

Il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson diminuiscono al progredire del danno D come mostrato nelle Fig. 3.7, 3.8. Un modello di degradazione di rigidezza elastica con $\boldsymbol{M}=\mathbf{i}_4^s$ è stato proposto da Ortiz-1985 per il comportamento della malta nel quadro di un modello costitutivo per il calcestruzzo.

Una seconda possibilità interessante si ha quando $\boldsymbol{M}=\mathbf{P}_d$, essendo $\mathbf{P}_d$ l'operatore di proiezione deviatorica $\mathbf{P}_d=\mathbf{i}_4^s-\mathbf{P}_v=\mathbf{i}_4^s-\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2/3$ che compare nella rappresentazione spettrale $\mathbf{C}=\mathbf{P}_v/3K+\mathbf{P}_d/2G$ della cedevolezza elastica, in cui $3K=E/(1-2\nu)$. In questo caso solo il modulo di taglio viene danneggiato, mentre quello di volume rimane costante e la formulazione 'elastic-degrading' è del tipo di von Mises, in quanto $\boldsymbol{\sigma}{:}\mathbf{P}_d{:}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_d{:}\boldsymbol{\sigma}_d$ nella prima delle (3.75) (Neilsen and Schreyer-1992). La variazione dei parametri elastici E, ν in funzione del danno D si trova risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{1-2\nu}{E} = \dfrac{1-2\nu_o}{E_o} \\ \dfrac{1+\nu}{E} = \dfrac{1}{1-D}\, \dfrac{1+\nu_o}{E_o} \end{cases} \tag{3.82}$$

rispetto alle incognite E, ν. La soluzione fornisce non solo una degradazione non lineare del modulo di Young ma anche una diminuzione non lineare del coefficiente di Poisson al progredire del danno (Fig. 3.7, 3.8):

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \mathbf{P}_d \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{3\,(1-D)\,E_o}{3-(1-2\nu_o)\,D} \quad ; \qquad \nu = \frac{3\nu_o+(1-2\nu_o)\,D}{3-(1-2\nu_o)\,D}} \tag{3.83}$$

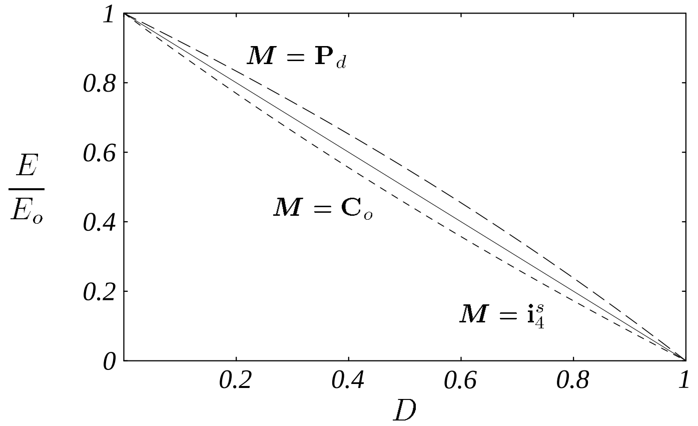


Figura 3.7: Modelli di danneggiamento scalare: modulo di Young in funzione della variabile di danneggiamento D ($\nu_o = 0.2$).

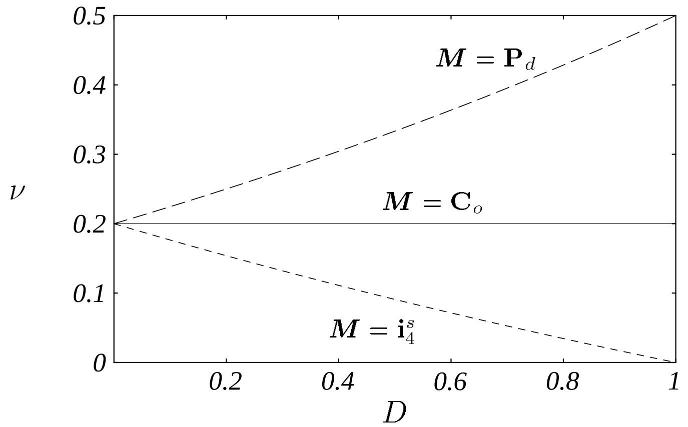


Figura 3.8: Modelli di danneggiamento scalare: coefficiente di Poisson in funzione della variabile di danneggiamento D ($\nu_o = 0.2$).

3.4.4.3 Danno vettoriale

Nel caso di variabile di danno vettoriale il vettore $\mathbf{D}$ di componenti D_i definisce il fenomeno di degradazione. Nella proposta originale di Krajcinovic and Fonseka-1981, il vettore danneggiamento definisce la densità e l'orientamento di un insieme di microcricche piane di forma arbitraria all'interno del corpo ed assume quindi un chiaro significato fisico. La rigidezza secante viene definita in termini del vettore danneggiamento dall'espressione

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} + C_1(\delta_{ij}D_kD_l + \delta_{kl}D_iD_j) + C_2(\delta_{jk}D_iD_l + \delta_{il}D_jD_k) \qquad (3.84)$$

C_1 e C_2 sono due costanti del materiale e D_i rappresentano le densità dei vuoti in piani di normale $\mathbf{N}$. Nel caso di materiale integro le componenti di $\mathbf{D}$ sono tutte nulle e si riottiene la rigidezza iniziale del materiale. Nel caso di materiale completamente danneggiato nella direzione $\mathbf{N}$ (D_N=$\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}$=1), la proiezione di rigidezza E_N=$E_{ijkl}N_iN_jN_kN_l$ in tale direzione E_N=λ+2μ+$2(C_1$+$C_2)\,D_N^2$ si deve annullare. Ciò impone un vincolo sui valori ammissibili delle costanti C_1 e C_2: $C_1+C_2=-\lambda/2-\mu$. L'espressione di $\mathbf{E}$ proposta sembra indipendente dai concetti di equivalenza introdotti precedentemente. Tuttavia si può ricavare la forma generale (3.67) ponendo $C_1=-\lambda/2$, $C_2=-\mu$, ed assegnando il tensore $\boldsymbol{\Omega}$ in termini di combinazioni di delta di Kronecker δ_{ij} e di componenti del vettore di danno D_i (Carol et al.-1995b). L'approccio di variabile vettoriale di danno costituisce senz'altro un miglioramento rispetto al semplice modello scalare in quanto introduce la direzionalità del danneggiamento. Tuttavia sembra impossibile rappresentare con tale descrizione un caso piú generale di vuoti distribuiti a caso in varie direzioni. L'insieme di tre vettori di danno rappresentanti le distribuzioni di densità secondo tre direzioni ortogonali potrebbe fornire una descrizione piú appropriata. Questa eventualità conduce in effetti alla definizione di un tensore di danno del 2^o ordine i cui autovettori siano coincidenti con i tre vettori di danno mutuamente perpendicolari.

3.4.4.4 Danno tensoriale del 2^o ordine

La nozione di danno del 2^o ordine acquisisce immediatamente un significato fisico legato alla natura tensoriale di $\mathbf{D}$. Considerando un piano generico identificato dalla sua normale $\mathbf{N}$, e dato il tensore $\mathbf{D}$, il danneggiamento in un'area sezionata da tale piano può essere rappresentato, nel senso di riduzione dell'area reagente (Kachanov-1958), dalla proiezione di $\mathbf{D}$ nella direzione $\mathbf{N}$, $D_N=\mathbf{N}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{N}$. In letteratura il tensore $\mathbf{D}$ viene solitamente definito in modo che sia $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ in assenza di danno e $\mathbf{D}=\mathbf{i}_2$ per danno totale (Murakami and Ohno-1980, Sidoroff-1981, Cordebois and Sidoroff-1982, Murakami-1987, Mazars et al.-1992). Tuttavia altri autori utilizzano il tensore integrità $\boldsymbol{\phi}=\mathbf{i}_2-\mathbf{D}$ variabile tra $\mathbf{i}_2$ e $\mathbf{0}$ al progredire del danno (Betten-1983, Valanis-1990).

Il tensore di danno del 2^o ordine viene di solito introdotto per correlare sforzi nominali ed effettivi: $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}\cdot\boldsymbol{\phi}$, oppure $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$. In questo caso si ha comunque lo svantaggio di non mantenere la simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$ anche assumendo simmetria di $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$ o viceversa, mentre in un continuo tradizionale non polare ci si attende il rispetto di tali simmetrie. Si vedono qui due modi di imporre la simmetria:

$$\begin{aligned} \text{“\textit{tipo prodotto}”} \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}\cdot\boldsymbol{\omega} \\ \text{“\textit{tipo somma}”} \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}+\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}\cdot\boldsymbol{\phi}\right) \end{aligned} \tag{3.85}$$

in cui $\boldsymbol{\phi}$ ed $\boldsymbol{\omega}$ sono tensori simmetrici del 2^o ordine ed $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\phi}^{1/2}$, cioè $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$.

La rigidezza secante è ricavabile definendo dapprima il tensore del 4^o ordine $\boldsymbol{\alpha}$ che fornisce il legame tra sforzi nominali ed effettivi $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}}$, utilizzando uno dei concetti di equivalenza introdotti precedentemente. In seguito si può esplicitare anche l'espressione del tensore dell'8^o ordine $\boldsymbol{\Omega}$. Nei due casi di simmetrizzazione (3.85) il tensore $\boldsymbol{\alpha}$ può essere definito nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{“\textit{tipo prodotto}”} \quad &\Rightarrow \quad \alpha_{ijkl} = \omega_{ik}\,\omega_{jl} \\ \text{“\textit{tipo somma}”} \quad &\Rightarrow \quad \alpha_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\phi_{ik}\delta_{jl}+\delta_{ik}\phi_{lj}\right) \end{aligned} \tag{3.86}$$

Si noti la simmetria del tensore $\boldsymbol{\alpha}$, $\alpha_{ijkl}=\alpha_{klij}$, conseguente alla simmetria di $\boldsymbol{\phi}$ ed $\boldsymbol{\omega}$.

Un'espressione interessante di $\mathbf{E}$ si ottiene dalla simmetrizzazione di tipo prodotto utilizzando l'ipotesi di equivalenza energetica che fornisce $\mathbf{E}=\boldsymbol{\alpha}:\mathbf{E}_o:\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. Sostituendo la prima espressione di (3.86) ed utilizzando la definizione $\omega_{ik}\omega_{kj}=\phi_{ij}$, si ottiene

$$E_{ijkl} = \lambda_o\, \phi_{ij}\phi_{kl} + 2\mu_o\, \frac{1}{2}(\phi_{ik}\phi_{jl} + \phi_{il}\phi_{jk}) \tag{3.87}$$

Questo tipo di degradazione di rigidezza elastica è stato proposto indipendentemente da Valanis-1990: le componenti $\mathbf{i}_2$ di $\mathbf{E}_o$ vengono sostituite dalle componenti del tensore di integrità $\boldsymbol{\phi}$. Per $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{i}_2$, cioè per materiale completamente integro, si riottiene la rigidezza elastica iniziale. Il tensore dell'ottavo ordine in questo caso si esprime come

$$\Omega_{ijklpqrs} = \alpha_{ijpq}\, \alpha_{rskl} = \omega_{ip}\, \omega_{jq}\, \omega_{kr}\, \omega_{ls} \tag{3.88}$$

3.4.4.5 Danno tensoriale del 4^o ordine

La rappresentazione tensoriale del 4^o ordine del danno sembra la piú completa possibile pur mantenendo un grado di complicazione plausibile. In effetti la definizione e l'uso di un tensore di danno dell'8^o ordine sembra troppo difficile da gestire. La rappresentazione tensoriale del 4^o ordine presenta anche il vantaggio di essere allo stesso livello tensoriale di quella costitutiva in termini di rigidezza secante. Il tensore di danno del 4^o ordine viene solitamente formulato in modo da definire la relazione tra quantità nominali ed effettive di sforzi (3.58) o deformazioni (3.61)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} = (\mathbf{i}_4 - \mathbf{D}) : \boldsymbol{\sigma}_{\text{eff}} \qquad \text{o/e} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eff}} = \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.89}$$

In altre parole si definisce direttamente il tensore $\boldsymbol{\alpha}$ come variabile tensoriale del 4^o ordine indipendente. Utilizzando la notazione di Ju-1990, il tensore di danneggiamento $\mathbf{D}$ generalizza la definizione di variabile di danno scalare D. Questa definizione viene normalmente posta nell'approccio di equivalenza delle deformazioni che fornisce un'espressione di $\mathbf{E}$ duale del caso scalare $\mathbf{E}=(1-D)\mathbf{E}_o$:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{E}_o = (\mathbf{i}_4 - \mathbf{D}) : \mathbf{E}_o \tag{3.90}$$

Una volta definito il tensore $\boldsymbol{\alpha}$, si possono utilizzare anche gli altri approcci di equivalenza energetica o degli sforzi. Si ricorda che solo l'equivalenza energetica fornisce una rigidezza tangente completamente simmetrica.

Il vantaggio principale nell'utilizzo di un modello di danno del 4^o ordine consiste nella possibilità di trattare il caso di danneggiamento anisotropo. Secondo Ju-1990, il danneggiamento anisotropo è ottenuto quando il tensore effetto di danno cambia la forma della rigidezza iniziale. Viceversa un danno isotropo preserva le caratteristiche direzionali della rigidezza $\mathbf{E}_o$: se $\mathbf{E}_o$ è isotropo anche la rigidezza secante rimane isotropa; se $\mathbf{E}_o$ è assegnato in forma anisotropa, anche $\mathbf{E}$ mantiene la stessa forma di anisotropia. Il piú generale tensore effetto danno isotropo si può assegnare per mezzo di due variabili scalari indipendenti D_1 e D_2 nel modo seguente

$$\mathbf{D} = D_1 \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + D_2 \mathbf{i}_4^s \tag{3.91}$$

definendo un modello di danneggiamento a due scalari. Il caso di un'unica variabile di danno scalare è quindi solo una variante della rappresentazione piú generale di danno isotropo contrariamente all'accezione comune di interpretare il danneggiamento scalare del tipo $(1-D)$ come sinonimo di danno isotropo.

3.5 Analisi degli indici di rovina dei materiali 'elastic-degrading'

La teoria costitutiva 'elastic-degrading' qui presentata, contenente come caso particolare i modelli di danneggiamento, fornisce l'espressione generale degli operatori tangenti della risposta incrementale. A questo punto è possibile l'analisi degli indici di rovina definiti nel Capitolo 2 per il caso elastoplastico, con l'intenzione di paragonarne le condizioni di innesco e le modalità di attuazione rispetto al caso elastoplastico.

Da un lato la condizione di *"rovina diffusa"* o *"continua"* corrisponde a singolarità dell'operatore di rigidezza tangente $det[\mathbf{E}_{\mathrm{ED}}]{=}0$ nella sua forma "debole" (Sobh et al.-1990, Willam et al.-1987) od alla perdita di stabilità $d^2W{=}\dot{\boldsymbol{\sigma}}{:}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}{=}0$ nella sua forma "forte", che coinvolge la singolarità della parte simmetrica dell'operatore (si vedano ad es. Hill-1958, Maier and Hueckel-1979, Runesson and Mroz-1989, Bigoni and Hueckel-1991a, Neilsen and Schreyer-1993, Guzina et al.-1995). Dall'altro lato la *"rovina localizzata"* o *"discontinua"* risulta associata alle singolarità del tensore di localizzazione $\mathbf{Q}_{\mathrm{ED}}{=}\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{E}_{\mathrm{ED}}{\cdot}\mathbf{N}$ o della sua parte simmetrica. La condizione di localizzazione "debole" è sinonimo di $det[\mathbf{Q}_{\mathrm{ED}}]{=}0$ (Rudnicki and Rice-1975), mentre la condizione "forte" è associata all'annullamento della forma quadratica $\rho c^2{=}\mathbf{M}{\cdot}\mathbf{Q}_{\mathrm{ED}}{\cdot}\mathbf{M}$ (si vedano ad es. Hill-1962, Sobh at al.-1990, Neilsen and Schreyer-1993).

Nel caso di materiali con perdita di rigidezza elastica, Maier and Hueckel-1979 hanno considerato le singolarità materiali di $\mathbf{E}_{\mathrm{ED}}$ in 'elastoplastic coupling', vale a dire nel caso in cui la perdita di rigidezza elastica sia funzione dell'accumulo di deformazione plastica e si traduca in una deviazione dalla legge di normalità di un caso plastico associato. Bigoni and Hueckel-1991 hanno poi ottenuto anche le condizioni di localizzazione per tali materiali. Desoyer and Cormery-1994 hanno analizzato la perdita di stabilità in piccolo e la localizzazione in modelli di danno scalare associati. Gli indici di rovina vengono qui analizzati nel caso più generale 'elastic-degrading'. Si forniscono soluzioni esplicite dell'analisi di localizzazione nel caso di modelli di danneggiamento scalare in senso tradizionale in termini di direzioni critiche di localizzazione e di valori critici dei parametri di incrudimento. Si utilizza un criterio geometrico di localizzazione (Benallal and Comi-1995) per rappresentare la condizione di localizzazione nel piano di Mohr di sforzi o deformazioni e per derivare le soluzioni in forma chiusa alternativa.

3.5.1 Singolarità dell'operatore di rigidezza tangente

La condizione di singolarità costitutiva $det[\mathbf{E}_{\mathrm{ED}}]{=}0$ conduce a risultati del tutto analoghi a quelli elastoplastici in quanto la struttura formale degli operatori tangenti è la stessa. Si consideri l'espressione (3.6) dell'operatore di rigidezza tangente per un materiale 'elastic-degrading' con formulazione negli sforzi e si supponga l'esistenza di un incremento critico di deformazione $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf}=\alpha\mathbf{m}$, con $\alpha=cost\neq 0$. La condizione di annullamento dell'incremento di sforzo diviene

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_{\text{ED}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf} = \alpha \left(\mathbf{E} : \mathbf{m} - \frac{\mathbf{E} : \mathbf{m}\,(\mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m})}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m}} \right) = \mathbf{0} \tag{3.92}$$

L'incremento di sforzo si annulla quando $H(\mathbf{E}{:}\mathbf{m})/(H{+}\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m})=\mathbf{0}$. Come nel caso elastoplastico la singolarità costitutiva si manifesta quindi nel caso perfettamente 'elastic-degrading' con $H=0$, in quanto il denominatore è comunque assunto positivo e la rigidezza secante $\mathbf{E}$ è definita positiva. Riassumendo, la condizione di *"rovina continua"* ('continuous failure') di una *formulazione 'elastic-degrading' negli sforzi* viene attivata per

$$det[\mathbf{E}_{\text{ED}}] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad H_{cf} = 0 \qquad \text{con} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf} = \alpha\ \mathbf{m} \tag{3.93}$$

Anche in questo caso la condizione forte di perdita di stabilità in piccolo può essere già raggiunta nel regime di 'hardening' prima di arrivare al punto limite come mostrato nel Capitolo 4.

Analoghi risultati si ottengono per una formulazione nelle deformazioni in cui l'operatore tangente si scriva mediante la seconda delle (3.25) ed assumendo un incremento critico di deformazione $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf}=\alpha\mathbf{C}{:}\bar{\mathbf{m}}$. La condizione di *"rovina continua"* per *formulazioni 'elastic-degrading' nelle deformazioni* si riassume come

$$det[\mathbf{E}_{\text{ED}}] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{H}_{cf} = \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : (-\bar{\mathbf{m}}) \qquad \text{con} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf} = \alpha\ \mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}} \tag{3.94}$$

Gli stessi risultati si ricavano anche utilizzando le relazioni mutue $\mathbf{n}=\mathbf{C}{:}\bar{\mathbf{n}}$, $\mathbf{m}=-\mathbf{C}{:}\bar{\mathbf{m}}$ ed $H=\bar{H}+\bar{\mathbf{n}}{:}\mathbf{C}{:}\bar{\mathbf{m}}$ nella condizione (3.93). In effetti la forma dell'operatore tangente è unica dal punto di vista matematico e non fa alcuna distinzione tra le due formulazioni qualora si utilizzino le interrelazioni tra quantità non soprassegnate e grandezze duali con soprassegnatura. Si noti che il segno meno in (3.94) è dovuto alla definizione fatta di incremento di sforzo anelastico $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{D}}$, la quale implica $\bar{\mathbf{m}}=-\mathbf{E}{:}\mathbf{m}$, ma non significa che $\bar{H}_{cf}<0$ (ad es. nel caso associato, $\mathbf{m}=\mathbf{n}$ fornisce $\bar{\mathbf{m}}=-\bar{\mathbf{n}}$, e quindi la forma quadratica $\bar{\mathbf{n}}{:}\mathbf{C}{:}\bar{\mathbf{n}}$ risulta positiva, essendo $\mathbf{C}$ un tensore simmetrico e definito positivo).

A titolo di esempio si consideri la forma di danno scalare proposta da Neilsen and Schreyer-1992 in cui $F=\boldsymbol{\sigma}{:}\mathbf{C}_o{:}\boldsymbol{\sigma}/2-r=0$, $r=r_o+HD$, che si ottiene dalla forma generale (3.72) ponendo $f[\bar{w}_o, D]=(1-D)^2\bar{w}_o$. L'operatore di rigidezza tangente si ottiene dalla (3.6) come $\mathbf{E}_{\text{ED}}=(1-D)\,\mathbf{E}_o-\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}/(H+\boldsymbol{\sigma}{:}\mathbf{C}{:}\boldsymbol{\sigma})$ e nel caso di stato di sforzo piano si semplifica nella forma matriciale 3×3

$$\mathbf{E}_{\text{ED}} = \frac{(1-D)E_o}{1-\nu_o^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_o & 0 \\ \nu_o & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu_o}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{H + \dfrac{2r}{1-D}} \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{11} & \sigma_{11}\sigma_{22} & \sigma_{11}\sigma_{12} \\ \sigma_{22}\sigma_{11} & \sigma_{22}\sigma_{22} & \sigma_{22}\sigma_{12} \\ \sigma_{12}\sigma_{11} & \sigma_{12}\sigma_{22} & \sigma_{12}\sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

in cui $\boldsymbol{\sigma}^{\text{T}}=\{\sigma_{11}\,\sigma_{22}\,\sigma_{12}\}$ è lo stato di sforzo appartenente alla condizione di danneggiamento $F=0$. L'indice normalizzato di rovina continua e

$$e = \frac{det[\mathbf{E}_{\text{ED}}]}{det[\mathbf{E}_o]} = \frac{(1-D)^4\ H}{(1-D)\ H + 2\ r} \tag{3.96}$$

viene rappresentato tridimensionalmente in Fig. 3.9 in funzione della variabile di danno D e del modulo di 'hardening' H. Le singolarità si sviluppano secondo due linee: per 'hardening' nullo, H=0, e per D=1, dove la rigidezza secante viene totalmente a mancare.

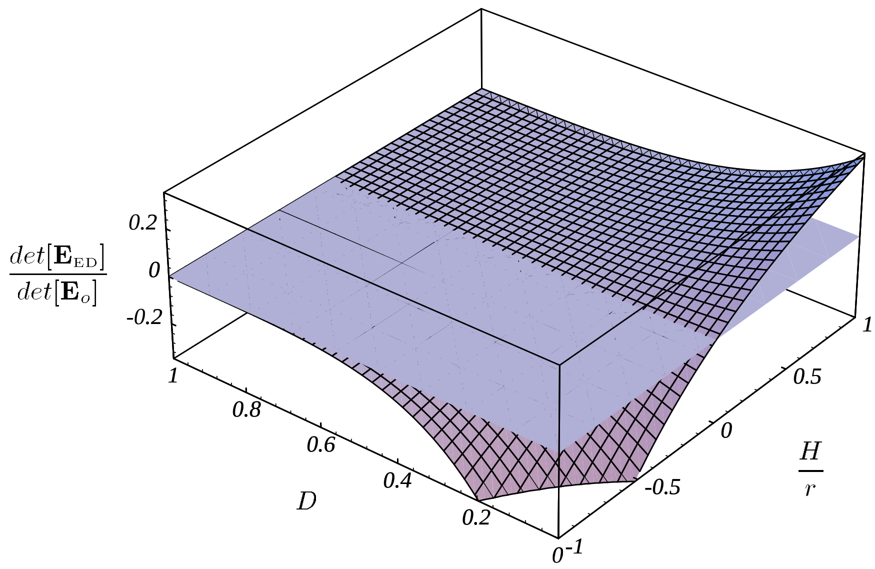


Figura 3.9: Singolarità dell'operatore di rigidezza tangente di un modello di danno scalare associato per H=0.

3.5.2 Analisi di localizzazione dei materiali 'elastic-degrading'

L'innesco di discontinuità spaziali delle deformazioni incrementali attraverso una superficie di discontinuità è segnalato dalla condizione di singolarità del tensore di localizzazione ottenuto per doppio prodotto scalare tra l'operatore tangente $\mathbf{E}_{\text{ED}}$ e la normale $\mathbf{N}$ a tale superficie:

$$\mathbf{Q}_{\text{ED}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_{\text{ED}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}}{\bar{H}} \tag{3.97}$$

In questa espressione $\mathbf{Q}$=$\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{N}$ indica il tensore acustico elastico relativo alla rigidezza secante corrente del materiale, ed $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sono i 'traction vectors' (Hill, 1962). Nel caso di una formulazione negli sforzi, $\bar{H}$=H+$\mathbf{n}$:$\mathbf{E}$:$\mathbf{m}$, $\mathbf{a}$=$\mathbf{n}$:$\mathbf{E}\cdot\mathbf{N}$ e $\mathbf{b}$=$\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}$:$\mathbf{m}$. Per una formulazione nelle deformazioni $\bar{H}$ è direttamente il parametro di incrudimento, mentre $\mathbf{a}$=$\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{N}$ e $\mathbf{b}$=$-\mathbf{N}\cdot\bar{\mathbf{m}}$.

Per analizzare l'innesco di localizzazione $det[\mathbf{Q}_{\text{ED}}]$=0 si considera, in analogia al caso elastoplastico, il problema agli autovalori generalizzato

$$\mathbf{Q}_{\text{ED}} \cdot \mathbf{x} = \omega^* \, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{\text{ED}}) \cdot \mathbf{x} = \omega^* \, \mathbf{x} \tag{3.98}$$

in cui ω^* sono gli autovalori del tensore $\mathbf{B}$=$\mathbf{i}_2-\mathbf{Q}^{-1}\cdot(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})/\bar{H}$. Due degli autovalori sono di valore unitario, ω_1^*=ω_2^*=1; il terzo si ottiene dalla relazione ω_3^*=$tr[\mathbf{B}]-2$ e rappresenta il determinante normalizzato del tensore di localizzazione che si annulla all'innesco di biforcazione,

$$det[\mathbf{B}] = \frac{det[\mathbf{Q}_{\text{ED}}]}{det[\mathbf{Q}]} = \omega_3^* = 1 - \frac{1}{\bar{H}}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b} = 0 \tag{3.99}$$

Questa condizione di localizzazione si risolve rispetto al valore di 'hardening' necessario ad attivare rovina discontinua ('<u>d</u>iscontinuous <u>f</u>ailure') nella direzione $\mathbf{N}$, $\bar{H}^{\text{N}}_{df}$=$\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b}$. Conseguentemente, in relazione al tipo di formulazione, si ha:

$$\begin{array}{lll} \textit{Form. negli sforzi} & \Rightarrow & H^{\text{N}}_{df} = -\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{m} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b} \\ \textit{Form. nelle deformazioni} & \Rightarrow & \bar{H}^{\text{N}}_{df} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b} \end{array} \tag{3.100}$$

Il primo innesco di localizzazione si manifesta per il massimo dei valori critici di incrudimento al variare di tutte le possibili direzioni $\mathbf{N}$:

$$H_{df} = \max_{\|\mathbf{N}\|=1}[H^{\text{N}}_{df}] \qquad\qquad \bar{H}_{df} = \max_{\|\mathbf{N}\|=1}[\bar{H}^{\text{N}}_{df}] \tag{3.101}$$

Si noti che il problema di massimizzazione è lo stesso per le due formulazioni in quanto il termine $-\mathbf{n}$:$\mathbf{E}$:$\mathbf{m}$ non dipende dalla direzione $\mathbf{N}$. Le direzione critiche di localizzazione rimangono immutate mentre il modulo di incrudimento critico cambia secondo il fattore additivo $-\mathbf{n}$:$\mathbf{E}$:$\mathbf{m}$.

Questo problema di massimizzazione è stato risolto analiticamente col metodo dei moltiplicatori di Lagrange da Ottosen and Runesson-1991a per formulazioni elastoplastiche negli sforzi non associate, fornendo espressioni esplicite nel caso di rigidezza elastica isotropa ($\mathbf{E}$=$\mathbf{E}_o$=$\lambda_o\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2$+$2\mu_o\mathbf{i}_4^s$, ove λ_o e μ_o sono le costanti elastiche iniziali di Lamé). Bigoni and Hueckel-1991 propongono un procedimento analogo anche per trattare l''elastoplastic coupling' in cui la rigidezza corrente è funzione della deformazione plastica accumulata.

Nel caso 'elastic-degrading' per risolvere il problema di massimizzazione occorre introdurre le leggi di degradazione di rigidezza all'interno dei vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Ciò richiede una forma esplicita di $\mathbf{E}$ che in generale può risultare anisotropa se la microfessurazione avviene secondo direzioni preferenziali all'interno del materiale. In tal caso la soluzione in forma chiusa del problema di massimizzazione non è immediata e dipende dal caso particolare di degradazione anisotropa considerata. Guzina et al.-1995 hanno fornito alcuni risultati numerici nel caso dei modelli 'smeared crack' in cui la rigidezza elastica assume una forma ortotropa. Nel caso in cui si supponga invece isotropia elastica iniziale, conservata anche durante il progredire del danneggiamento, la procedura risolutiva si semplifica notevolmente. Nel caso di danneggiamento scalare tradizionale in cui $\mathbf{E}$=$(1-D)\mathbf{E}_o$, si possono utilizzare direttamente i risultati dell'analisi elastoplastica come verrà mostrato nei punti seguenti.

Un approccio innovativo alla soluzione del problema è stato ideato da Benallal-1992 nell'ambito della termoelastoplasticità, successivamente perfezionato ed esteso a leggi elastoplastiche di carattere piuttosto generale (Benallal and Comi-1995) ed a modelli di danneggiamento locali e non locali (Pijaudier-Cabot and Benallal-1993). La condizione di localizzazione viene rappresentata in termini di coordinate di Mohr di sforzo o deformazione e viene rappresentata in generale da una curva del 4^o ordine e da un'ellisse nel caso di danno scalare.

La rappresentazione è particolarmente vantaggiosa poichè fornisce un significato geometrico diretto all'analisi di localizzazione, in relazione allo stato di sforzo o deformazione imposto, anch'esso rappresentato nel piano mediante i cerchi di Mohr.

Si consideri la forma generale dell'operatore di rigidezza tangente di materiali elastoplastici od 'elastic-degrading', $\mathbf{E}_t$=$\mathbf{E}$+$\bar{\mathbf{m}}\otimes\bar{\mathbf{n}}/\bar{H}$ ($\mathbf{E}$=$\mathbf{E}_o$ nel caso elastoplastico). Assumendo una condizione di anelasticità isotropa, la funzione F dipende dai soli invarianti di sforzo o deformazione (che viene qui considerato; si procede analogamente nel caso di formulazione negli sforzi). Si definiscano tali invarianti come I_1=$tr[\boldsymbol{\epsilon}]$, I_2=$tr[\boldsymbol{\epsilon}^2]$ ed I_3=$tr[\boldsymbol{\epsilon}^3]$ in cui si ha $\boldsymbol{\epsilon}^2$=$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$, cioè $(\boldsymbol{\epsilon}^2)_{ik}$=$\epsilon_{ij}\epsilon_{jk}$ ed $\boldsymbol{\epsilon}^3$=$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$, vale a dire $(\boldsymbol{\epsilon}^3)_{il}$=$\epsilon_{ij}\epsilon_{jk}\epsilon_{kl}$. Il gradiente della funzione F contiene un'espansione in serie di potenze di $\boldsymbol{\epsilon}$ sino all'ordine secondo. Infatti, differenziando $F[I_1, I_2, I_3]$ si ottiene:

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{\partial F[I_1, I_2, I_3]}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial F}{\partial I_1}\,\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial F}{\partial I_2}\,\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial F}{\partial I_3}\,\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = F_1[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{i}_2 + F_2[\boldsymbol{\epsilon}]\;\boldsymbol{\epsilon} + F_3[\boldsymbol{\epsilon}]\;\boldsymbol{\epsilon}^2 \quad (3.102)$$

Nel caso si assuma anche l'esistenza di un potenziale di degradazione Q dipendente dai soli invarianti, $Q[I_1, I_2, I_3]$, anche per il gradiente $\bar{\mathbf{m}}$ si ricava un'espressione analoga. In definitiva la rappresentazione generale dei tensori $\bar{\mathbf{n}}$ e $\bar{\mathbf{m}}$ comporta i termini

$$\bar{\mathbf{n}} = F_1[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{i}_2 + F_2[\boldsymbol{\epsilon}]\;\boldsymbol{\epsilon} + F_3[\boldsymbol{\epsilon}]\;\boldsymbol{\epsilon}^2\;; \quad \bar{\mathbf{m}} = Q_1[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{i}_2 + Q_2[\boldsymbol{\epsilon}]\;\boldsymbol{\epsilon} + Q_3[\boldsymbol{\epsilon}]\;\boldsymbol{\epsilon}^2 \quad (3.103)$$

A fronte di questa espansione, i 'traction vectors' $\mathbf{a}$=$\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{N}$ e $\mathbf{b}$=$-\mathbf{N}\cdot\bar{\mathbf{m}}$ si esprimono come

$$\mathbf{a} = F_1[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{N} + F_2[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{t}_\epsilon + F_3[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{t}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\epsilon}\;; \quad -\mathbf{b} = Q_1[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{N} + Q_2[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{t}_\epsilon + Q_3[\boldsymbol{\epsilon}]\;\mathbf{t}_\epsilon\cdot\boldsymbol{\epsilon} \quad (3.104)$$

in cui $\mathbf{t}_\epsilon$=$\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\epsilon}$ indica il vettore deformazione relativo alla normale $\mathbf{N}$. Le coordinate di Mohr ϵ−γ ad esso corrispondenti sono la proiezione di $\mathbf{t}_\epsilon$ lungo la direzione $\mathbf{N}$ e lungo una direzione $\mathbf{T}$ ad essa perpendicolare, $\mathbf{T}\perp\mathbf{N}$:

$$\epsilon = \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{N} \qquad\qquad \gamma = \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{T} \quad (3.105)$$

Si assuma isotropia della risposta elastica. Il tensore di localizzazione elastico ed il suo inverso si esprimono in termini dei valori correnti delle costanti di Lamé λ e μ:

$$\mathbf{Q} = \mu\mathbf{i}_2 + (\lambda+\mu)\,(\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{\mu}\,\mathbf{i}_2 - \frac{\lambda+\mu}{\mu\,(\lambda+2\mu)}\,(\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}) \quad (3.106)$$

Sostituendo $\mathbf{Q}^{-1}$ dalla (3.106) ed $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ dalla (3.104) nella condizione di localizzazione (3.99) (che fornisce $\bar{H}$=$\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b}$) ed esaminando l'espansione dei vari termini, si riconosce che il massimo esponente delle coordinate di Mohr ϵ e γ è il quarto. Di conseguenza la curva di localizzazione nel piano di Mohr è del 4^o ordine. Inoltre se le funzioni F e Q non dipendono dal terzo invariante, vengono coinvolti solo i termini di 2^o grado e la condizione di localizzazione viene rappresentata da una curva di 2^o grado nel piano di Mohr. Questa conclusione concorda con i risultati di Benallal and Comi-1995 che assumono la coassialità tra $\bar{\mathbf{m}}$ ed $\bar{\mathbf{n}}$.

Nel caso di modelli di danno scalare associati nella forma (3.75) ed isotropi, il tensore direzione di degradazione $\bar{\boldsymbol{M}}$ di tipo isotropo (e simmetrico), risulta $\bar{\boldsymbol{M}}$=$\alpha_1\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2$+$\alpha_2\mathbf{i}_4^s$.

Quindi si ha $-\bar{\mathbf{n}}=\bar{\mathbf{m}}=\bar{\boldsymbol{M}}:\boldsymbol{\epsilon}=\alpha_1 tr[\boldsymbol{\epsilon}]\mathbf{i}_2+\alpha_2\boldsymbol{\epsilon}$, cioè la funzione di danneggiamento F non dipende dal terzo invariante in quanto $F_1[\boldsymbol{\epsilon}]=-\alpha_1 tr[\boldsymbol{\epsilon}]$, $F_2[\boldsymbol{\epsilon}]=-\alpha_2$ ed $F_3[\boldsymbol{\epsilon}]=0$. La curva di localizzazione è quindi del 2^o ordine nelle coordinate di Mohr. Nel caso di modello tradizionale di danno scalare ($\alpha_1=-\lambda_o$, $\alpha_2=-\mu_o$), la curva di localizzazione coincide con un'ellisse simmetrica rispetto all'asse delle ascisse come si mostra nei punti seguenti.

3.6 Analisi di localizzazione per modelli di danno scalare nel caso tridimensionale

Nel caso dei modelli di danno scalare in senso tradizionale lo scalare $(1-D)$ rappresenta il comune fattore di proporzionalità delle componenti di rigidezza secante rispetto alle componenti di rigidezza elastica iniziale. Il tensore $\mathbf{E}$ e l'inverso del relativo tensore acustico si esprimono quindi come $\mathbf{E}=(1-D)\mathbf{E}_o$ e $\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}_o^{-1}/(1-D)$, in cui $\mathbf{Q}_o=\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_o\cdot\mathbf{N}$ indica il tensore acustico relativo al materiale integro. Le espressioni dei parametri di 'hardening' critici (3.100) divengono

$$\begin{aligned} &\textit{Form. negli sforzi} && \Rightarrow \quad \frac{H_{df}^{\mathrm{N}}}{1-D} = -\mathbf{n}:\mathbf{E}_o:\mathbf{m}+\mathbf{a}_o\cdot\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot\mathbf{b}_o \\ &\textit{Form. nelle deformazioni} && \Rightarrow \quad \frac{\bar{H}_{df}^{\mathrm{N}}}{1-D} = \mathbf{a}_o\cdot\mathbf{Q}_o^{-1}\cdot\mathbf{b}_o \end{aligned} \tag{3.107}$$

in cui $\mathbf{a}_o=\mathbf{n}:\mathbf{E}_o:\mathbf{N}$, $\mathbf{b}_o=\mathbf{N}:\mathbf{E}_o:\mathbf{m}$. A meno del fattore scalare $(1-D)$, si ritrova lo stesso formato elastoplastico considerato da Ottosen and Runesson-1991a, e si possono utilizzare gli stessi risultati analitici, perlomeno in una formulazione negli sforzi. La formulazione nelle deformazioni conduce comunque a risultati analoghi in quanto il termine $-\mathbf{n}:\mathbf{E}_o:\mathbf{m}$ in (3.107) non influenza il problema di massimizzazione rispetto alla direzione di localizzazione. Le direzioni critiche di localizzazione risultano comuni a tutti i modelli di danno scalare che rientrano nella forma 'elastic-degrading' qui considerata. I valori critici di 'hardening' dipendono invece dalle specifiche dei vari modelli. Nei punti seguenti si presentano i risultati dell'analisi di localizzazione per modelli di danno scalare associati nei due scenari di stato di sforzo tridimensionale e di stato di sforzo piano. Si utilizza anche la rappresentazione geometrica nel piano di Mohr delle deformazioni per derivare le soluzioni in forma chiusa in un modo di significato fisico piú immediato.

3.6.1 Soluzione analitica di localizzazione nel caso tridimensionale

Si considera il caso di modello scalare associato in cui la superficie di danneggiamento viene rappresentata dall'espressione (3.75). I tensori $\mathbf{n}$ e $\bar{\mathbf{n}}$ sono proporzionali ad $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ od anche a $\boldsymbol{\epsilon}_o=\mathbf{C}_o:\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}_o=\mathbf{E}_o:\boldsymbol{\epsilon}$. Si utilizzano i risultati analitici di Ottosen and Runesson-1991a.

Estensione monoassiale. Si impone una deformazione assiale in modo che $\epsilon_1>0$, $\epsilon_2=0$ e $\sigma_3=0$. La componente fuori piano ϵ_2 di $\boldsymbol{\epsilon}$ si annulla (siamo cioè in presenza di uno stato di deformazione piano anche se trattato in ambito tridimensionale senza imposizioni a priori del relativo vincolo cinematico) e la componente ϵ_3 risulta libera e legata al coefficiente di contrazione trasversale. Dalla relazione $\boldsymbol{\epsilon}_o=\mathbf{C}_o:\boldsymbol{\sigma}$, imponendo $\epsilon_2^o=0$ e $\sigma_3=0$ si ottiene $\sigma_2=\nu\sigma_1$, ed il quoziente tra la massima e la minima componente principale di $\boldsymbol{\epsilon}$ risulta $\epsilon_1^o/\epsilon_3^o=(\nu-1)/\nu$. Si ricorda che il coefficiente di Poisson non viene modificato dal danneggiamento scalare qui trattato ($\nu=\nu_o$). Si ottiene cosí la direzione critica di localizzazione θ_{df}, cioè l'angolo tra l'asse di carico x_1 e la direzione $\mathbf{N}$ normale alla banda di localizzazione

$$\boxed{\tan^2\theta_{df} = -\frac{\epsilon_3^o}{\epsilon_1^o} = \frac{\nu}{1-\nu}} \tag{3.108}$$

L'inclinazione della banda di localizzazione dipende quindi dal coefficiente di Poisson:

$$\textit{Estensione monoassiale} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nu = 0.0 & \Rightarrow \quad \theta_{df} = 0.00^o \\ \nu = 0.3 & \Rightarrow \quad \theta_{df} = 33.21^o \\ \nu = 0.5 & \Rightarrow \quad \theta_{df} = 45.00^o \end{cases} \tag{3.109}$$

Questi risultati sono in accordo con la soluzione numerica di Neilsen and Schreyer-1992, in termini di una 'shear band' inclinata di circa 57^o rispetto all'asse di carico per $\nu=0.3$. Quando il coefficiente di Poisson tende a valori nulli ci si avvicina ad un modo di pura apertura di tipo Rankine. All'estremo opposto, al tendere verso l'incompressibilità elastica del materiale, $\nu=0.5$, si ritrova un modo di localizzazione di puro taglio con $\theta_{df}=45^o$.

Tensione monoassiale. Anche nel caso di tensione monoassiale trattato in ambito tridimensionale ove $\sigma_1>0$, $\sigma_2=\sigma_3=0$, si trovano gli stessi risultati. Ciò risulta contrastare l'analisi per stato di sforzo piano, in cui la struttura matematica dell'operatore tangente risulta modificata dall'inserimento del vincolo statico di sforzo piano. In condizioni di sforzo piano la localizzazione è maggiormente suscettibile di un facile innesco in quanto il salto delle deformazioni incrementali fuori piano non è impedito. Le direzioni di localizzazione sono influenzate dal coefficiente di Poisson in modo differente rispetto al caso della plasticità di von Mises presentato nel Capitolo 2 (Fig. 2.1).

Taglio puro. Nel caso di pure deformazioni taglianti con $\epsilon_1^o=-\epsilon_3^o$, $\epsilon_2^o=0$, si ottiene una inclinazione critica di 45^o indipendentemente dal coefficiente di Poisson, in quanto $\tan^2\theta_{df}=1$.

Si ricorda che le direzioni di localizzazione qui ricavate sono comuni a tutti i modelli di danneggiamento scalare associati mentre il modulo critico di incrudimento dipende dal particolare modello di danno considerato. Considerando il modello di danno scalare di Simo and Ju-1987 in cui si assuma $\bar{\mathcal{M}}=\sqrt{2\bar{w}_o}$, l'operatore tangente si esprime come

$$\mathbf{E}_{\text{ED}} = (1-D)\,\mathbf{E}_o - \frac{\boldsymbol{\sigma}_o \otimes \boldsymbol{\sigma}_o}{\bar{H}} \tag{3.110}$$

ed il parametro di incrudimento necessario per localizzazione nella direzione $\mathbf{N}$ diviene $\bar{H}_{df}^{\mathrm{N}}=\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\sigma}_o\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}_o\cdot\mathbf{N}$. Il valore massimo $\bar{H}_{df}$ di $\bar{H}_{df}^{\mathrm{N}}$ dipende dal valore del coefficiente di Poisson come mostrato dalle Fig. 3.10, 3.11 in cui si rappresenta la quantità adimensionale $\bar{H}_{df}^{\mathrm{N}}\,E/(\sigma_1^o)^2$ in estensione monoassiale. Le direzioni critiche di localizzazione θ_{df} in corrispondenza dei punti di massimo sono quelle derivate in precedenza. I valori massimi di $\bar{H}_{df}^{\mathrm{N}}$ soddisfano la relazione $\bar{H}_{df}\,E/(\sigma_1^o)^2=(1-\nu^2)$, in corrispondenza dei quali si ha

$H_{df}=\bar{H}_{df}-\boldsymbol{\sigma}_o{:}\mathbf{C}{:}\boldsymbol{\sigma}_o=0$. La localizzazione si manifesta cioè in corrispondenza del punto limite come si vede in Fig. 3.12 che rappresenta l'indice di localizzazione $q=det[\mathbf{Q}_{\text{ED}}]/det[\mathbf{Q}]$ in funzione dell'angolo θ per $H_{df}=0$ nel caso di estensione monoassiale in deformazioni piane. Le direzioni critiche che minimizzano q coincidono con quelle che massimizzano il parametro di incrudimento H_{df}^{N} necessario per localizzazione nella direzione $\mathbf{N}$, derivate in precedenza.

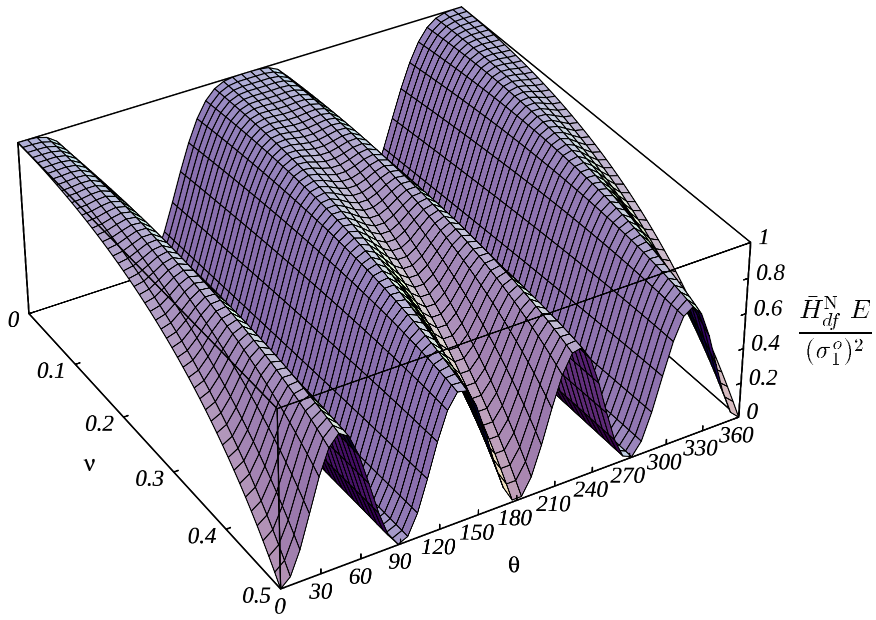


Figura 3.10: Danno scalare in estensione monoassiale: $\bar{H}_{df}^{N}$ in funzione di θ, ν.

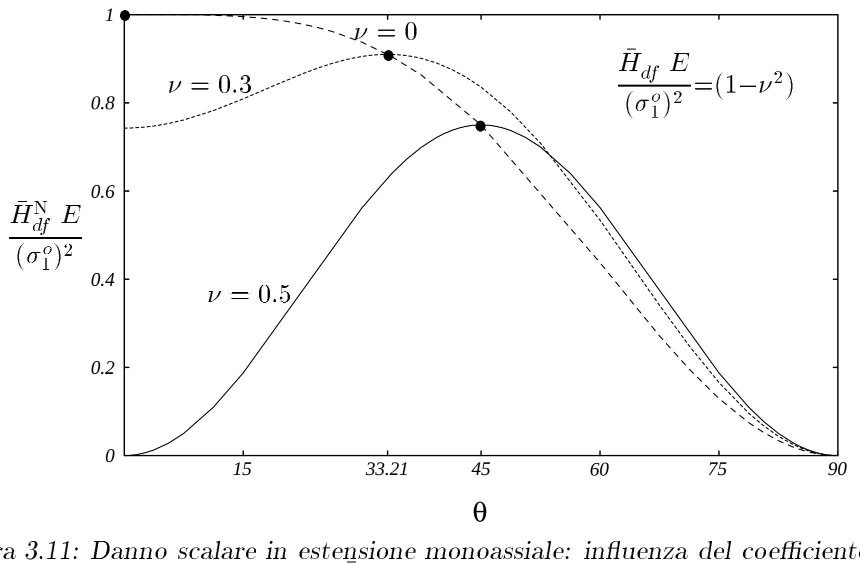


Figura 3.11: Danno scalare in estensione monoassiale: influenza del coefficiente di Poisson sui valori massimi di $\bar{H}_{df}^{N}$ corrispondenti a θ_{df}.

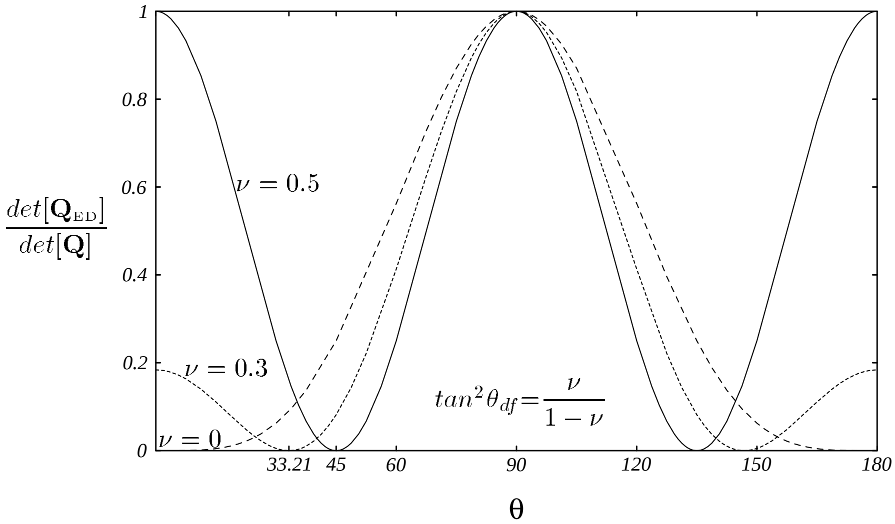


Figura 3.12: Indice di localizzazione in estensione monoassiale in deformazioni piane: innesco di localizzazione al punto limite (H_{df}=0).

3.6.2 Soluzione geometrica di localizzazione nel caso tridimensionale

Utilizzando la rappresentazione geometrica della condizione di localizzazione in termini delle coordinate di deformazione di Mohr ϵ e γ si può pervenire agli stessi risultati in forma chiusa. Nel caso dei modelli di danneggiamento scalare con operatore tangente rappresentato dall'Eq. (3.73), la condizione di localizzazione si riduce a β^{-1}=$\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}$ ed utilizzando la relazione (3.106) per $\mathbf{Q}^{-1}$ fornisce

$$\frac{1-D}{\beta} = \frac{1}{\mu_o}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \frac{\lambda_o+\mu_o}{\mu_o\,(\lambda_o+2\mu_o)}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{N})^2 \tag{3.111}$$

in cui $\mathbf{a}$=$\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_o$:$\boldsymbol{\epsilon}$=$\lambda_o tr[\boldsymbol{\epsilon}]\mathbf{N}$+$2\mu_o\mathbf{t}_\epsilon$. Espandendo i prodotti scalari si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} &= (\lambda_o\,tr[\boldsymbol{\epsilon}])^2 + 4\,\lambda_o\,\mu_o\,tr[\boldsymbol{\epsilon}]\;\epsilon + 4\,\mu_o^2\;(\epsilon^2+\gamma^2) \\
&= 4\,\mu_o^2\,\gamma^2 + (\lambda_o\,tr[\boldsymbol{\epsilon}] + 2\mu_o\,\epsilon)^2 \\
\mathbf{a}\cdot\mathbf{N} &= \lambda_o\,tr[\boldsymbol{\epsilon}] + 2\mu_o\,\epsilon
\end{aligned} \tag{3.112}$$

La condizione di localizzazione diventa quindi:

$$\boxed{\frac{1-D}{\beta} = 4\,\mu_o\,\gamma^2 + \frac{1}{\lambda_o+2\mu_o}\;\;(\lambda_o\,tr[\boldsymbol{\epsilon}] + 2\mu_o\,\epsilon)^2} \tag{3.113}$$

L'espressione (3.113) rappresenta l'equazione di una famiglia di ellissi nel piano di Mohr delle deformazioni. Le ellissi sono simmetriche rispetto all'asse delle ϵ e la posizione del centro dell'ellisse è proporzionale alla componente sferica del tensore di deformazione. La dimensione dell'ellisse dipende dalla stato di danneggiamento corrente e dal valore del modulo di incrudimento. Per una dimensione dell'ellisse data, i punti del piano di Mohr interni all'ellisse rappresentano uno stato di deformazione che non attiva la condizione di localizzazione, in quanto $det[\mathbf{Q}_{\text{ED}}]$>0. In punti esterni all'ellisse si ha invece $det[\mathbf{Q}_{\text{ED}}]$<0, mentre $det[\mathbf{Q}_{\text{ED}}]$=0 nei punti appartenenti all'ellisse (Fig. 3.13).

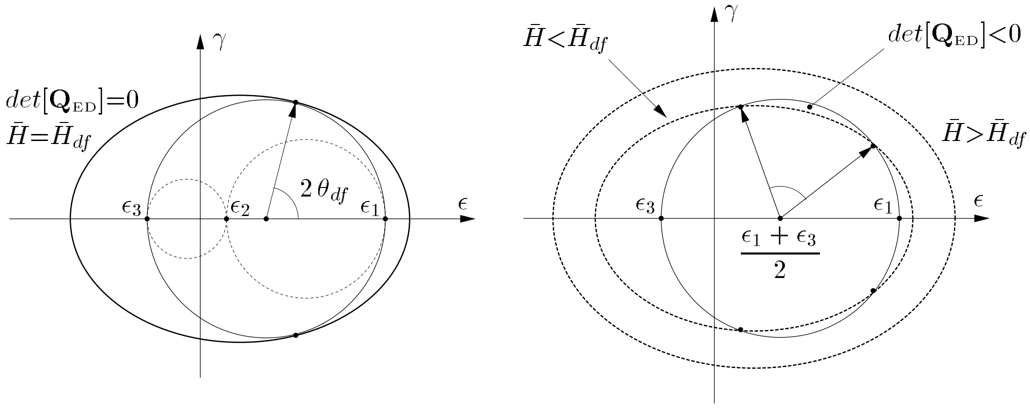


Figura 3.13: Rappresentazione geometrica della condizione di localizzazione per modelli di danno scalare nel piano di Mohr delle deformazioni.

Il cerchio di Mohr rappresentante lo stato di deformazione è definito in termini dei valori principali $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$. Fino a quando l'ellisse contiene il cerchio di Mohr piú grande non si ha localizzazione. Il primo innesco di biforcazione si ottiene quando il cerchio di Mohr piú largo risulta tangente all'ellisse. In corrispondenza di questa dimensione dell'ellisse si ottengono i valori critici di incrudimento e danno necessari per localizzazione e la direzione critica di localizzazione si legge dal diagramma di Mohr. Se l'ellisse interseca il cerchio piú grande si forma un cono di possibili direzioni di localizzazione ove $det[\mathbf{Q}_{\mathrm{ED}}] \leq 0$ (Fig. 3.13).

La condizione di tangenza conduce alla soluzione di un sistema contenente le due equazioni non lineari dell'ellisse e del cerchio piú largo

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_e^2 &= \frac{1-D}{4\mu_o \beta} - \frac{\mu_o}{\lambda_o + 2\mu_o} \left(\epsilon + \frac{\lambda_o}{2\mu_o}\, tr[\boldsymbol{\epsilon}] \right)^2 \\ \gamma_c^2 &= \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \right)^2 - \left(\epsilon - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} \right)^2 \end{aligned} \right. \tag{3.114}$$

La condizione $\gamma_e^2 = \gamma_c^2$ si riduce alla soluzione dell'equazione di secondo grado $a\epsilon^2 + b\epsilon + c = 0$, in cui le costanti a, b, c valgono:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\lambda_o + \mu_o}{\lambda_o + 2\mu_o} \qquad\qquad b = (\epsilon_1 + \epsilon_3) + \frac{\lambda_o}{\lambda_o + 2\mu_o}\, tr[\boldsymbol{\epsilon}] \\ c &= \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2} \right)^2 + \frac{\lambda_o^2}{4\mu_o\,(\lambda_o + 2\mu_o)}\, tr^2[\boldsymbol{\epsilon}] - \frac{1-D}{4\mu_o \beta} \end{aligned} \tag{3.115}$$

La condizione di tangenza corrisponde alla soluzione con due radici coincidenti relativa all'annullamento del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Questa relazione fornisce il valore di $\bar{H}_{df}$ necessario per innescare localizzazione ad un valore di danno dato. Per $\Delta = 0$ la soluzione del sistema fornisce:

$$\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_3) + \frac{\lambda_o}{2(\lambda_o + \mu_o)}\, \epsilon_2 \tag{3.116}$$

che risulta accettabile se $\epsilon_1 \geq \epsilon \geq \epsilon_3$. La direzione di localizzazione si ottiene dall'analisi del cerchio di Mohr. Utilizzando la relazione $\lambda_o/(\lambda_o+\mu_o)=2\nu_o=2\nu$ tra i moduli elastici si ottiene

$$\tan^2 2\theta_{df} = \frac{(\epsilon_1-\epsilon_3)^2-(\epsilon_1+\epsilon_3+2\nu\,\epsilon_2)^2}{(\epsilon_1+\epsilon_3+2\nu\,\epsilon_2)^2} \tag{3.117}$$

Infine utilizzando le relazioni trigonometriche si perviene alla

$$\boxed{\tan^2\theta_{df} = \frac{(\epsilon_1-\epsilon_3)^2-(\epsilon_1+\epsilon_3+2\nu\,\epsilon_2)^2}{(2\epsilon_1+2\nu\,\epsilon_2)^2}} \tag{3.118}$$

Questa soluzione esplicita fornisce gli stessi risultati presentati al punto precedente. In particolare, nel caso di deformazioni piane nei quali la deformazione principale intermedia sia nulla, $\epsilon_2=0$, come in estensione monoassiale e taglio puro, si ottiene $\tan^2\theta_{cr}=-\epsilon_3/\epsilon_1$. In deformazioni piane, se due componenti principali di deformazione sono positive non è possibile attivare la condizione di localizzazione, poichè per $\epsilon_1>0$, $\epsilon_2>0$, $\epsilon_3=0$, l'Eq. (3.116) fornirebbe la soluzione inammissibile $\epsilon>\epsilon_1$.

3.7 Analisi di localizzazione per modelli di danno scalare nel caso di sforzo piano

La trattazione analitica del caso tridimensionale o di deformazioni piane presentato nella sezione precedente può essere estesa al caso di stato di sforzo piano in cui si introduce il vincolo statico negli operatori tangenti che modificano di conseguenza la loro struttura. L'analisi diventa bidimensionale e gli indici tensoriali, indicati da lettere greche, variano tra 1 e 2. La rigidezza secante si esprime con notazione compatta ed indiciale, nel modo seguente:

$$\mathbf{E} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}\,\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2 + 2G\,\mathbf{i}_4^s\,; \quad E_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + 2G\,\frac{1}{2}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \tag{3.119}$$

Il tensore acustico elastico $\mathbf{Q}$ viene rappresentato da una matrice 2×2 cosí come il suo inverso,

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{G}\left(\mathbf{i}_2 - \frac{1+\nu}{2}\,\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\right) \tag{3.120}$$

3.7.1 Soluzione analitica di localizzazione nel caso di sforzo piano

Estendiamo la soluzione di localizzazione per materiali elastoplastici con formulazione negli sforzi di Runesson et al.-1991 al caso di una formulazione 'elastic-degrading' nelle deformazioni. Il modulo di 'hardening' necessario per localizzazione nella direzione $\mathbf{N}$, risulta come visto $\bar{H}_{df}^{\mathrm{N}}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b}$, in cui i 'traction vectors' si esprimono come $\mathbf{a}=\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{N}$, $\mathbf{b}=-\mathbf{N}\cdot\bar{\mathbf{m}}=\mathbf{N}\cdot\tilde{\mathbf{m}}$. Introducendo la (3.120), si ottiene

$$\bar{H}_{df}^{\mathrm{N}} = \frac{1}{G}\left(-\frac{1+\nu}{2}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{N})\,(\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}) + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right) \tag{3.121}$$

ed in notazione indiciale $2G\bar{H}^{\rm N}_{df}{=}-(1{+}\nu)(N_\alpha \bar{n}_{\alpha\beta} N_\beta)(N_\gamma \tilde{m}_{\gamma\delta} N_\delta){+}2N_\alpha \bar{n}_{\alpha\beta}\tilde{m}_{\beta\gamma}N_\gamma$.

Per semplicità si supponga che $\bar{\mathbf{n}}$ ed $\tilde{\mathbf{m}}$ abbiano le stesse direzioni principali. Le componenti nel piano siano indicate con i primi due indici e soddisfino le diseguaglianze $\bar{n}_1{\geq}\bar{n}_2$, $\tilde{m}_1{\geq}\tilde{m}_2$. Portando il sistema di riferimento a coincidere con quello principale ed introducendo il vincolo $N_2^2{=}1{-}N_1^2$, il modulo critico di incrudimento diviene

$$2G\bar{H}_{df} = -(1{+}\nu)((\bar{n}_1{-}\bar{n}_2)N_1^2{+}\bar{n}_2)((\tilde{m}_1{-}\tilde{m}_2)N_1^2{+}\tilde{m}_2){+}2((\bar{n}_1\tilde{m}_1{-}\bar{n}_2\tilde{m}_2)N_1^2{+}\bar{n}_2\tilde{m}_2) \tag{3.122}$$

La massimizzazione di $\bar{H}^{\rm N}_{df}$ rispetto ad $\mathbf{N}$, conduce alle condizioni seguenti:

$$\begin{aligned}\frac{d\,(2G\,\bar{H}_{df})}{d\,(N_1^2)} = & -(1+\nu)(\bar{n}_1-\bar{n}_2)((\tilde{m}_1-\tilde{m}_2)N_1^2+\tilde{m}_2)+\\ & -(1+\nu)(\tilde{m}_1-\tilde{m}_2)((\bar{n}_1-\bar{n}_2)N_1^2+\bar{n}_2)+2(\bar{n}_1\tilde{m}_1-\bar{n}_2\tilde{m}_2)=0\end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\frac{d^2\,(2G\,\bar{H}_{df})}{d\,(N_1^2)^2} = -2\,(1+\nu)\,(\bar{n}_1-\bar{n}_2)\,(\tilde{m}_1-\tilde{m}_2)\;\leq\;0 \tag{3.124}$$

La prima condizione può essere riscritta come $-(1{+}\nu)\,(c_1{-}c_2)\,N_1^2{+}c_1{-}\nu\,c_2{=}0$, nella quale si è posto $c_1{=}\bar{n}_1(\tilde{m}_1{-}\tilde{m}_2){+}\tilde{m}_1(\bar{n}_1{-}\bar{n}_2)$ e $c_2{=}\bar{n}_2(\tilde{m}_1{-}\tilde{m}_2){+}\tilde{m}_2(\bar{n}_1{-}\bar{n}_2)$. Considerando per semplicità solo il caso $\bar{n}_1{>}\bar{n}_2$, $\tilde{m}_1{>}\tilde{m}_2$, e risolvendo rispetto ad N_1^2 ed $N_2^2{=}1{-}N_1^2$, si ottiene

$$N_1^2 = \frac{c_1-\nu\,c_2}{(1+\nu)\,(c_1-c_2)};\qquad N_2^2 = \frac{\nu\,c_1-c_2}{(1+\nu)\,(c_1-c_2)} \tag{3.125}$$

in cui si devono soddisfare le condizioni $c_1{-}\nu c_2{\geq}0$ e $\nu c_1{-}c_2{\geq}0$, poichè si ha $c_1{-}c_2{>}0$. L'Eq. (3.125) fornisce le inclinazioni critiche della normale $\mathbf{N}$ rispetto all'asse x_1 che si semplificano ulteriormente nel caso associato in cui si ha $\tilde{\mathbf{m}}{=}\bar{\mathbf{n}}$,

$$\tan^2\theta_{df} = \frac{\nu\,c_1-c_2}{c_1-\nu\,c_2}\quad\Rightarrow\;(\tilde{\mathbf{m}}=\bar{\mathbf{n}})\;\Rightarrow\quad \tan^2\theta_{df} = \frac{\nu\,\bar{n}_1-\bar{n}_2}{\bar{n}_1-\nu\bar{n}_2} \tag{3.126}$$

<u>*Tensione monoassiale in sforzo piano.*</u> Per il modello tradizionale di danno scalare associato si ha $\bar{\mathbf{n}}{\div}\tilde{\mathbf{m}}{=}\boldsymbol{\sigma}_o$. Nel caso di tensione monoassiale, con $\sigma_1^o{>}0$, $\sigma_2^o{=}\sigma_3^o{=}0$, la seconda delle (3.126) fornisce

$$\tan^2\theta_{df} = \nu\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{lcl}\nu=0.0 & \Rightarrow & \theta_{df} = 0.00^o\\ \nu=0.3 & \Rightarrow & \theta_{df} = 28.71^o\\ \nu=0.5 & \Rightarrow & \theta_{df} = 35.26^o\end{array}\right. \tag{3.127}$$

Per $\nu{=}0$ si ottiene lo stesso modo di localizzazione di tipo Rankine ricavato nel caso tridimensionale o di deformazioni piane. Il risultato classico $\theta_{df}{=}35.26^o$ per plasticità di von Mises (si veda il Capitolo 2) si ritrova per incomprimibilità elastica, $\nu{=}0.5$. Se $\nu{=}0.3$ l'inclinazione critica di 28.71^o si confronta col valore 33.21^o dell'analisi tridimensionale e mostra le differenze esistenti tra le due predizioni di localizzazione presenti anche nel caso elasto-plastico. L'influenza del coefficiente di Poisson viene mantenuta anche nel caso di sforzo piano, mentre per plasticità di von Mises i risultati di localizzazione in sforzo piano sono indipendenti dal coefficiente di contrazione trasversale.

Le direzioni critiche di localizzazione sono comuni a tutta la famiglia di modelli di danno scalare. I moduli critici di incrudimento dipendono invece dalle differenti versioni del modello. Nel caso del modello di Simo and Ju-1987 negli sforzi, il primo innesco di localizzazione si ha in corrispondenza del punto limite $H_{df}=0$, come nel caso elastoplastico di von Mises. Le Fig. 3.14, 3.15 mostrano l'effetto del coefficiente di Poisson sull'indice di localizzazione $q=det[\mathbf{Q}_{\text{ED}}]/det[\mathbf{Q}]$.

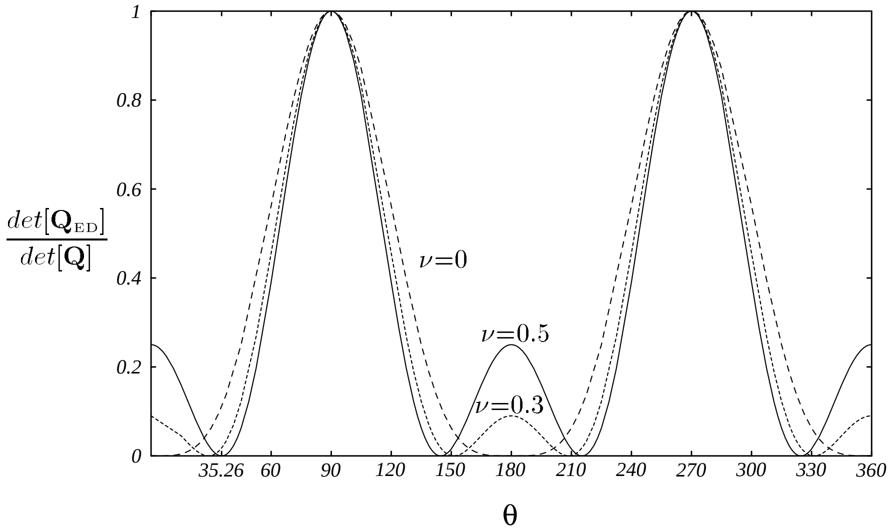


Figura 3.14: Indice di localizzazione in tensione monoassiale in sforzo piano: influenza di ν sulle direzioni critiche θ_{df} (H_{df}=0).

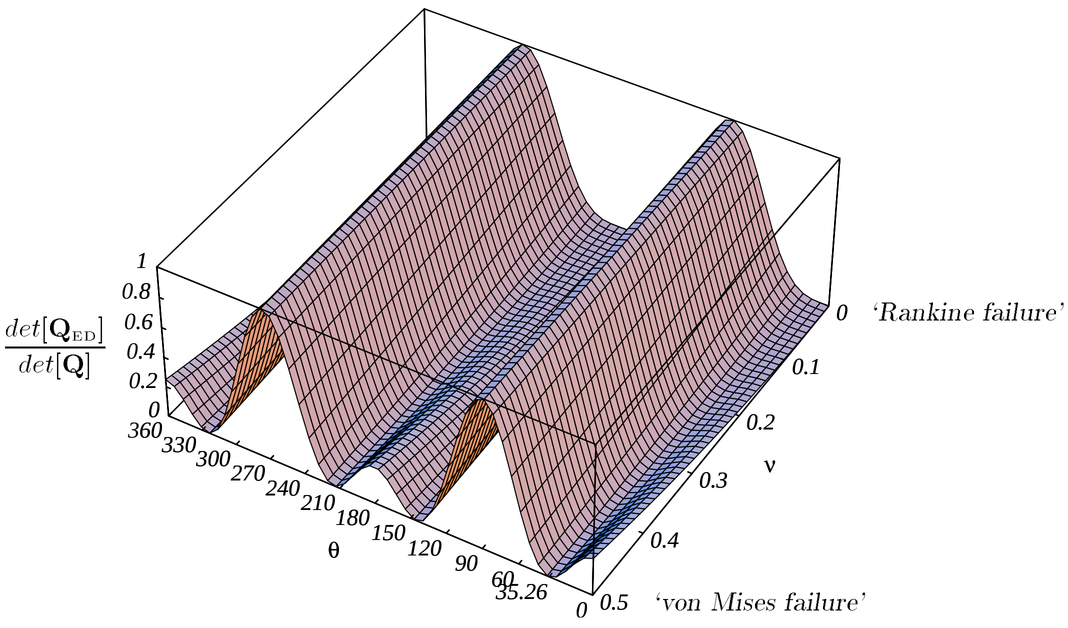


Figura 3.15: Danno scalare in tensione monoassiale in sforzo piano: indice di localizzazione in funzione di θ, ν.

Taglio puro in sforzo piano. Nel caso di taglio puro si ha $\bar{n}_1=\sigma_o$, $\bar{n}_2=-\sigma_o$. La direzione critica di localizzazione non cambia al variare del coefficiente di Poisson: $\tan^2\theta_{df}=1 \Rightarrow \theta_{df}=45^o$ (Fig. 3.16).

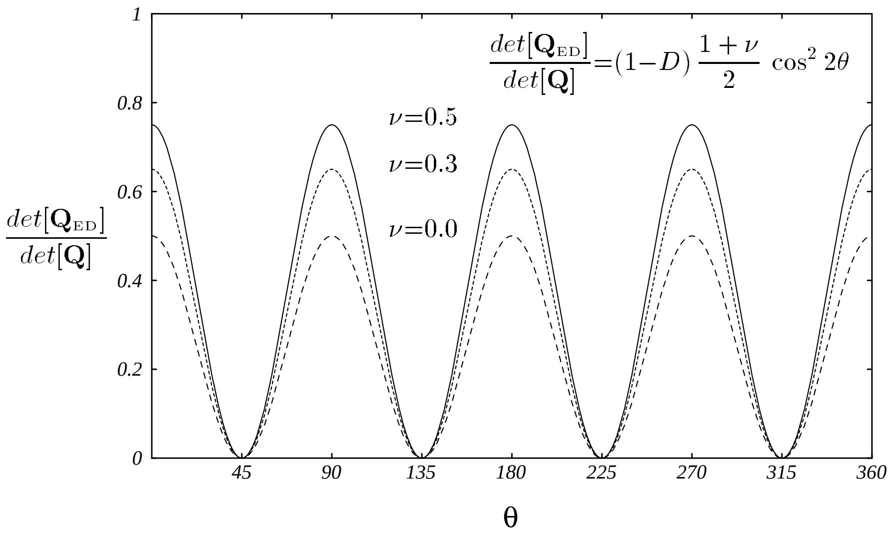


Figura 3.16: Indice di localizzazione in taglio puro: innesco di localizzazione al punto limite (H_{df}=0) senza dipendenza dal coefficiente di Poisson.

3.7.2 Soluzione geometrica di localizzazione nel caso di sforzo piano

I risultati precedenti si possono ricavare anche utilizzando la rappresentazione geometrica nel piano di Mohr. La procedura è analoga a quella presentata nel caso tridimensionale ad eccezione della forma (3.120) del tensore acustico elastico e del suo inverso. La condizione di localizzazione nel caso di sforzo piano si scrive $\beta^{-1}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b}=a_\alpha(Q^{-1})_{\alpha\beta}b_\beta$, in cui nel caso associato $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\sigma}_o=\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_o:\boldsymbol{\epsilon}$. Sostituendo $\mathbf{E}_o$ e $\mathbf{Q}^{-1}$ la condizione di localizzazione diviene

$$\frac{1-D}{\beta}=\frac{1}{G_o}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\frac{1+\nu}{2\,G_o}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{N})^2 \tag{3.128}$$

in cui $\mathbf{a}=(\nu E_o\epsilon_{\alpha\alpha})/(1-\nu^2)\mathbf{N}+2G_o\mathbf{t}_\epsilon$. Espandendo algebricamente i vari termini si ottiene nuovamente una famiglia di ellissi nel piano di Mohr delle deformazioni:

$$\frac{1-D}{\beta}=4\,G_o\,\gamma^2+2\,G_o\,(1-\nu)\,(\epsilon+\frac{\nu}{1-\nu}\,\epsilon_{\alpha\alpha})^2 \tag{3.129}$$

La relazione precedente può essere riscritta in termini dei moduli di Lamé ricordando le relazioni tra i parametri elastici $1-\nu=(\lambda_o+2\mu_o)/2(\lambda_o+\mu_o)$, $\nu/(1-\nu)=\lambda_o/(\lambda_o+2\mu_o)$:

$$\boxed{\frac{1-D}{\beta}=4\,\mu_o\,\gamma^2+\mu_o\,\frac{\lambda_o+2\mu_o}{\lambda_o+\mu_o}\,\left(\frac{\lambda_o}{\lambda_o+2\mu_o}\,\epsilon_{\alpha\alpha}+\epsilon\right)^2} \tag{3.130}$$

I parametri elastici giocano un ruolo leggermente differente in questo caso di sforzo piano quando paragonato al caso tridimensionale o di deformazioni piane (3.113) a causa del vincolo statico introdotto, risultante in direzioni di localizzazione differenti.

Lo stato deformativo viene rappresentato nel piano di Mohr dai tre cerchi di Mohr definiti dai valori principali $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$. La componente fuori piano ϵ_{33} si determina dalla condizione $\sigma_{33}=0$, che fornisce $\epsilon_{33}=-\lambda(\epsilon_{11}+\epsilon_{22})/(\lambda+2\mu)=-\nu(\epsilon_{11}+\epsilon_{22})/(1-\nu)$. L'intersezione tra l'ellisse ed il cerchio di Mohr piú largo si ottiene dalla relazione $\gamma_e^2=\gamma_c^2$, che conduce alla soluzione dell'equazione di 2^o grado $a\epsilon^2+b\epsilon+c=0$, in cui

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1+\nu}{2} \qquad\qquad b = (\epsilon_1+\epsilon_3)+\nu\,\epsilon_{\alpha\alpha} \\ c &= \left(\frac{\epsilon_1-\epsilon_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\epsilon_1+\epsilon_3}{2}\right)^2+\frac{\nu^2}{2\,(1-\nu)}\,\epsilon_{\alpha\alpha}^2-\frac{1-D}{4\,G_o\beta} \end{aligned} \tag{3.131}$$

La condizione di tangenza tra cerchio ed ellisse si ottiene nel caso di radici coincidenti per $\Delta=b^2-4ac=0$ e fornisce il modulo di incrudimento critico $\bar{H}_{df}$ necessario per localizzazione nello stato di danno assegnato. Per $\Delta=0$ la soluzione del sistema $\gamma_e^2=\gamma_c^2$ fornisce $\epsilon=(\epsilon_1+\epsilon_3+\nu\epsilon_{\alpha\alpha})/(1+\nu)$, che risulta ammissibile qualora $\epsilon_1 \geq \epsilon \geq \epsilon_3$. Le direzioni critiche di localizzazione si ottengono quindi con l'analisi di Mohr

$$\tan^2 2\theta_{df} = \frac{((1+\nu)\,(\epsilon_1-\epsilon_3))^2-((1-\nu)\,(\epsilon_1+\epsilon_3)+2\nu\,\epsilon_{\alpha\alpha})^2}{((1-\nu)\,(\epsilon_1+\epsilon_3)+2\nu\,\epsilon_{\alpha\alpha})^2} \tag{3.132}$$

oppure, usando le relazioni trigonometriche,

$$\boxed{\tan^2\theta_{df} = \frac{((1+\nu)\,(\epsilon_1-\epsilon_3))^2-((1-\nu)\,(\epsilon_1+\epsilon_3)+2\nu\,\epsilon_{\alpha\alpha})^2}{((1+\nu)\,(\epsilon_1-\epsilon_3)+(1-\nu)\,(\epsilon_1+\epsilon_3)+2\nu\,\epsilon_{\alpha\alpha})^2}} \tag{3.133}$$

Nel caso di *tensione monoassiale* con $\sigma_{11}=\sigma$, $\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$, si ottengono i valori principali $\epsilon_1=\sigma/E$, $\epsilon_2=\epsilon_3-\nu\epsilon_1$. Quindi $\epsilon_{\alpha\alpha}=(1-\nu)\epsilon_1$, e le direzioni critiche divengono $\tan^2\theta_{df}=\nu$, come trovato in precedenza. In *taglio puro*, con $\sigma_{11}=\sigma$, $\sigma_{22}=-\sigma$, $\sigma_{33}=0$, si riottiene $\theta_{df}=45^o$ indipendentemente dal valore di ν, poichè $\epsilon_{\alpha\alpha}=0$, e quindi $\tan^2\theta_{df}=1$. Il valore di 'hardening' critico segue dalla condizione $\Delta=0$:

$$-4\,\frac{1+\nu}{2}\left(-\epsilon_{11}^2+\frac{1-D}{4\,\mu_o\,\beta}\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_{df}=\frac{1-D}{4\,\mu_o\,\epsilon_{11}^2} \tag{3.134}$$

Introducendo le specifiche del modello di danno nelle deformazioni di Simo and Ju-1987 con l'espressione (3.110) della rigidezza tangente, si ha $\beta=1/\bar{H}$ ed $\bar{H}_{df}=(\sigma_1^o)^2/G$, cui consegue anche $H_{df}=0$. L'innesco di localizzazione avviene quindi in corrispondenza del punto limite e con direzioni indipendenti dai valori assunti dal coefficiente di Poisson (Fig. 3.16).

3.8 Considerazioni conclusive

Nella letteratura sui modelli costitutivi per degradazione di rigidezza elastica sono presenti numerosi contributi sviluppati con approcci e terminologie diverse, spesso complicati dall'abbinamento con la trattazione simultanea di altri effetti anelastici quali la plasticità e la viscosità del materiale. Spesso viene inoltre utilizzata la terminologia tipica della termodinamica dei mezzi continui a variabili interne a scapito della chiarezza di piú immediate nozioni di carattere ingegneristico. Pertanto risulta opportuno ed utile elaborare un denominatore comune sufficientemente generale, tale da reggere il confronto con quello ormai consolidato della teoria della plasticità. Quanto è stato esposto in questo capitolo è inteso come un contributo in questa direzione di ricerca.

Nella prima parte del capitolo si è presentata una teoria costitutiva per materiali con perdita di rigidezza elastica alla cui formulazione lo scrivente ha contribuito insieme ad altri autori (Carol et al.-1994). Tale teoria tratta la degradazione elastica in modo sufficientemente generale, mantenendo ove possibile un'analogia formale con la teoria della plasticità e ricorrendo alle nozioni della termodinamica dei mezzi continui solo per estendere il concetto di associatività nello spazio di rigidezze, cedevolezze e variabili di danno. I modelli di danneggiamento con superficie di danno sono stati introdotti come caso particolare della teoria costitutiva. Le equazioni fondamentali dei modelli 'elastic-degrading' sono state riassunte nelle tre tabelle del capitolo ove appaiono anche le espressioni generali degli operatori tangenti i cui indici di rovina sono stati analizzati nella seconda parte del capitolo. Nel capitolo sono stati anche presentati alcuni concetti di meccanica del danneggiamento e sono state definite formulazioni di danno scalare alternative a quella classica del tipo $(1-D)$ e formulazioni di danno tensoriale di vario ordine attraverso i concetti di equivalenza di sforzi, deformazioni od energetica.

Nella seconda parte del capitolo si sono analizzate le instabilità costitutive dei materiali 'elastic-degrading'. Si è evidenziato che l'operatore di rigidezza tangente ed il corrispondente tensore di localizzazione conducono formalmente alle stesse analisi del caso elastoplastico e che la singolarità dell'operatore tangente si manifesta nel punto limite di 'hardening' nullo. Nell'analisi di localizzazione occorre invece inserire la legge di degradazione della rigidezza elastica, in generale anisotropa. Ciò può complicare notevolmente l'analisi di localizzazione. Nel caso di danno isotropo si possono utilizzare senza particolari difficoltà le soluzioni fornite in letteratura per il caso elastoplastico. I risultati della seconda parte del capitolo sono stati anche ricavati, in modo indipendente, utilizzando la rappresentazione innovativa della condizione di localizzazione nel piano di Mohr (di sforzi o deformazioni) dove la condizione di biforcazione nel caso di un modello di danno scalare risulta rappresentabile con una famiglia di ellissi simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Si sono mostrate le differenze esistenti tra le predizioni di localizzazione in materiali con danno scalare rispetto alle analisi classiche in ambito elastoplastico. In particolare si è mostrato come in stato di sforzo piano venga mantenuta la dipendenza dal coefficiente di Poisson delle direzioni critiche di localizzazione mentre ciò non avviene nel caso di plasticità di von Mises. Le differenze tra analisi in ambito tridimensionale ed in stato di sforzo piano vengono confermate anche per materiali con danno. Le direzioni critiche di localizzazione differiscono sensibilmente al variare del coefficiente di Poisson nelle due analisi. L'innesco di localizzazione nel modello di danno considerato coincide in tutti i casi con il punto limite di incrudimento nullo, mentre nel caso elastoplastico di von Mises in ambito tridimensionale è necessario inoltrarsi nel ramo 'softening' per innescare la localizzazione.

I risultati di questo capitolo si inseriscono nel presente contesto di ricerca sui modelli costitutivi per degradazione di rigidezza elastica e sui modelli di danneggiamento. Si intravedono molte direzioni di sviluppo futuro: formulazione di leggi di degradazione anisotrope e su base micromeccanica (si veda Kachanov-1992, Lubarda and Krajcinovic-1993), sviluppo di modelli di danno di ordine tensoriale differente (Carol et al.-1995b), calibrazione dei modelli costitutivi su risultati sperimentali ed implementazione delle leggi costitutive, abbinamento con modelli plastici (si veda il Capitolo 4) e/o viscosi in modo da modellare in modo appropriato il comportamento effettivo del materiale di cui si è parlato all'inizio del capitolo, introduzione della non località, ad es. con approccio al gradiente o danno non locale (si veda il Capitolo 5). Le analisi di localizzazione sono state esplicitate nel caso di forma isotropa della rigidezza elastica ed in Guzina et al.-1995 nel caso di rigidezza tangente di forma ortotropa, ma andrebbero estese a casi piú generali di danno comunque anisotropo con derivazioni possibilmente analitiche.

CAPITOLO 4

MODIFICHE DI RANGO UNO IN MATERIALI MULTIDISSIPATIVI E RELATIVI INDICI DI ROVINA

Il comportamento irreversibile non lineare dei materiali si origina dalla presenza di meccanismi multipli di dissipazione energetica che si attivano durante il processo di carico. Nella formulazione matematica di un modello costitutivo atto a rappresentare correttamente un comportamento fisico di questo tipo è necessario individuare i vari meccanismi in gioco e combinarli in modo da ottenere una formulazione a variabili interne che, tra varie esigenze, sia anzitutto rispettosa delle leggi della termodinamica dei fenomeni irreversibili nei mezzi continui (Coleman and Gurtin-1967, Maugin-1992, Hansen and Schreyer-1994).

In una teoria costitutiva incrementale per tali *"materiali multidissipativi"* che prenda spunto dalla classica teoria della plasticità, i vari meccanismi di dissipazione possibili vengono individuati e definiti mediante *"leggi di scorrimento"* (*'flow rules'*) appropriate. In particolare, nel caso ormai consolidato e generalmente adottato di leggi di scorrimento dette "lineari", un moltiplicatore anelastico viene introdotto per ogni meccanismo attivabile. In tal caso gli operatori tangenti che esprimono la legge incrementale risultano formati da *"modifiche multiple di rango uno"* dei corrispondenti operatori elastici in dipendenza dal numero di meccanismi effettivamente attivati. Per modifica di rango uno (seguendo la terminologia *'rank-one update'* usata da Dennis and Schnabel-1983 nei metodi di ottimizzazione) si intende dire che un tensore di rango unitario, cioè un tensore con un unico autovalore eventualmente non nullo, viene sommato (o sottratto) al tensore elastico definito positivo per ottenere l'operatore tangente. Questo è il caso classico di materiale monodissipativo in elastoplasticità e di materiali con perdita di rigidezza (Carol et al.-1994a,b), dei modelli di tipo 'smeared cracking' (Rots and Blaauwendraad-1989, Guzina et al.-1995) e dell' 'elastoplastic coupling' (Maier and Hueckel-1979, Han and Chen-1986, Simo and Ju-1987, Ju-1989).

Il caso di operatori tangenti con modifiche multiple è tipico della teoria dell'elastoplasticità a multipotenziale dove i meccanismi di dissipazione si individuano negli scorrimenti relativi lungo piani di diverso orientamento. La teoria di scorrimento plastico (*'slip theory of plasticity'*) proposta originariamente da Batdorf and Budiansky-1949, è stata successivamente formalizzata matematicamente da Koiter-1953 nel caso di meccanismi di snervamento indipendenti (o non interagenti) e poi estesa al caso di meccanismi interagenti da vari autori, sia a riguardo degli aspetti prettamente teorici (Mandel-1965, Hill-1966-67, Maier-1969-70a, Sewell-1972-73-74, Christoffersen and Hutchinson-1979), sia nei riguardi delle applicazioni numeriche (Simo et al.-1988, Pramono and Willam-1989, Feenstra-1993). Allo stesso formalismo dei materiali multidissipativi appartengono anche i modelli elastoplastici combinati con modelli per degradazione di rigidezza elastica (Bažant and Kim-1979, Dragon and Mróz-1979, Yazdani and Schreyer-1990, Hansen and Schreyer-1994) ed i modelli *'multicrack'* (Carol et al.-1993-95).

Le proprietà spettrali di questi operatori tangenti forniscono informazioni sulle condizioni ed i meccanismi di rottura possibili al livello materiale, in termini di instabilità intrinseca per biforcazione continua o discontinua della risposta incrementale. Secondo la terminologia introdotta nel Capitolo 2, per *"biforcazione continua"* si intende parlare delle possibili singolarità della rigidezza tangente o della sua parte simmetrica quando l'incremento di deformazione resta spazialmente continuo all'interno del mezzo (Maier and Hueckel-1979, Runesson and Mróz-1989, Bigoni and Hueckel-1991, Neilsen and Schreyer-1993). Nel caso di *"biforcazione discontinua"* si studiano le singolarità del tensore di localizzazione o della sua parte simmetrica conseguenti a possibili discontinuità spaziali delle deformazioni incrementali (Ottosen and Runesson-1991a-b, Bigoni and Hueckel-1991, Neilsen and Schreyer-1993). I determinanti degli operatori tangenti, normalizzati rispetto ai determinanti dei relativi operatori elastici, costituiscono gli *"indici di rovina"* ('failure indicators') da analizzarsi per lo studio di queste possibili singolarità.

Lo studio della possibilità di biforcazione nei materiali multidissipativi è stato motivato originariamente dal tentativo di spiegare le differenze esistenti tra osservazioni sperimentali e predizioni teoriche basate su teorie di plasticità classiche (cioè con condizioni di plasticità continue e senza punti angolosi) eccessivamente conservative, nell'ambito dell'instabilitá strutturale elastoplastica (Sewell-1972-73), e dei fenomeni di strizione e formazione di bande di taglio nei provini metallici sottili (Stören and Rice-1975, Christoffersen and Hutchinson-1979) o nei materiali frizionali (Rudnicki and Rice-1975). L'introduzione di vertici (*'corners'*) nelle condizioni di plasticità riduce la sovrastima teorica delle risorse strutturali in quantità dipendenti dal grado di accoppiamento assunto tra i vari meccanismi. Tali conclusioni erano state già rilevate da Mandel-1965 con riferimento alla propagazione di onde d'accelerazione nei continui elastoplastici (Hill-1962). Lavori recenti sulle instabilità costitutive dei modelli a multipotenziale confermano la convinzione del generale effetto destabilizzante dovuto alla presenza dei vertici (Petryk-1989-92, Petryk and Thermann-1992, Ichicawa et al.-1990, Aubry and Modaressi-1992). In ogni caso occorre notare che allo stato attuale manca ancora una trattazione esaustiva e sufficientemente generale delle condizioni di instabilità che consideri un generico grado di accoppiamento tra i meccanismi con incrudimento non simmetrico (o meglio ad interazione non reciproca tra i modi) e con nonassociatività delle leggi di scorrimento. Pertanto l'argomento qui trattato si inserisce a pieno titolo nel contesto della ricerca presente e di immediato futuro nella meccanica dei materiali.

In questo capitolo della tesi si studiano le instabilità costitutive di materiali a multipotenziale per mezzo di un'analisi algebrica sistematica dei problemi agli autovalori per operatori tangenti con modifiche multiple di rango uno. Le componenti degli operatori tangenti sono rappresentabili in forma matriciale: il tensore di rigidezza tangente del 4^o ordine con matrice 6×6 ed il tensore di localizzazione del 2^o ordine con matrice 3×3. A questo scopo si considerano i problemi agli autovalori per matrici $m\times m$ ottenute come somma di n contributi di rango uno e per matrici identità modificate da n contributi di rango uno. Si ottiene un problema agli autovalori associato ai precedenti e risolvibile in forma analitica per $n \leq 4$. La soluzione del problema agli autovalori per $n \leq 2$ fornisce gli autovalori in forma chiusa e di conseguenza anche l'espressione del determinante di una matrice ottenuta come modifica di rango due della matrice identità. Questo risultato coincide con la *"formula di perturbazione di un determinante"* fornita precedentemente da Pearson-1969 e fornisce uno strumento immediato per lo studio dei fenomeni di instabilità costitutiva nei materiali mono e bidissipativi.

Alla luce dei nuovi risultati le condizioni di singolarità dei materiali monodissipativi, già trattate nei Capitoli 2 e 3, vengono riderivate in forma compatta e ridiscusse, mentre vengono sviluppate per il caso in cui si manifestino due meccanismi di dissipazione, in particolare quando si combinino plasticità con degradazione di rigidezza elastica. Vengono presentati risultati nel caso di meccanismi indipendenti nello spazio degli sforzi e delle deformazioni. Si mostra come l'interazione tra lo scorrimento plastico ed il fenomeno di danneggiamento destabilizzi in generale gli operatori tangenti mentre possa altresí creare fenomeni spuri di irrigidimento nel caso di 'softening' intenso. Le condizioni di punto limite e di localizzazione possono essere raggiunte quando entrambi i meccanismi sono ancora nel regime di incrudimento positivo. Gli esempi presentati si riferiscono al caso di un meccanismo plastico di von Mises e di un meccanismo di degradazione di rigidezza elastica descritto da un modello di danno scalare. L'effetto destabilizzante sul tensore di localizzazione è chiaramente mostrato nei casi di tensione monoassiale e di taglio puro. In entrambi i casi l'innesco della localizzazione è possibile quando i meccanismi sono separatamente in 'hardening', situazione che non condurrebbe a localizzazione nel caso in cui uno solo dei due processi anelastici fosse presente.

4.1 Materiali multidissipativi

Nella descrizione generale dei materiali multidissipativi nell'ambito dei piccoli gradienti di spostamento ("piccole deformazioni") assumiamo la decomposizione additiva dell'incremento ('rate') di deformazione totale in un contributo elastico (reversibile) $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}}$ ed in un addendo anelastico (irreversibile) $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{I}}$. Quest'ultimo si esprime a sua volta come somma dei singoli contributi provenienti dagli n_d processi dissipativi che possono essere attivati. I vari contributi anelastici vengono definiti a mezzo di leggi di scorrimento analoghe a quelle della plasticità classica:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{I}} \qquad\qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{I}} = \sum_{\alpha=1}^{n_d} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\alpha} = \dot{\lambda}_{\alpha}\, \mathbf{m}^{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \boldsymbol{m} \tag{4.1}$$

Il segno di sommatoria richiama l'impiego della convenzione di somma sugli indici ripetuti adottata nella tesi.

Le varie leggi di scorrimento sono quindi espresse per mezzo dei moltiplicatori anelastici $\dot{\lambda}_{\alpha}$ che definiscono l'ampiezza del relativo contributo anelastico incrementale e dei tensori $\mathbf{m}^{\alpha}$ che forniscono le "direzioni" di tali incrementi. I moltiplicatori anelastici vengono raggruppati nel vettore $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{R}^{n_d}$ e le varie direzioni nella tabella a tre indici $\boldsymbol{m} \in \mathcal{R}^{n_d \times 3 \times 3}$ tale che $m^{\alpha}_{kl} = (\mathbf{m}^{\alpha})_{kl}$.

Lo stato di ogni processo di dissipazione viene definito mediante una condizione di anelasticità $F_\alpha[\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}]$ che stabilisce la soglia elastica corrente in dipendenza dei valori attuali delle n_d variabili interne raggruppate nel vettore $\mathbf{q}\in\mathcal{R}^{n_d}$. Tali variabili interne dipendono in ultima analisi dal valore $\boldsymbol{\lambda}$ accumulato durante la storia di carico. Nel caso generalmente accoppiato si ha $q_\alpha=q_\alpha[\boldsymbol{\lambda}]$ (Mandel-1965), mentre per meccanismi indipendenti si assume $q_\alpha=q_\alpha[\lambda_\alpha]$ (eventualmente $q_\alpha=\lambda_\alpha$) (Koiter-1953). L'insieme delle condizioni anelastiche viene rappresentato in forma compatta dalla funzione vettoriale $\mathbf{F}\in\mathcal{R}^{n_d}$.

La condizione che esclude l'attivazione dei meccanismi per i quali lo stato di sforzo corrente non appartiene alle relative condizioni di anelasticità viene governata dalle condizioni di complementarità (Maier-1969-70a, Simo et al.-1988)

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{F}[\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}] \leq \mathbf{0} \qquad\qquad F[\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}]\cdot\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \tag{4.2}$$

La mutua esclusione tra carico anelastico e scarico elastico viene imposta dalle condizioni di consistenza

$$\dot{\mathbf{F}} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{H}\cdot\dot{\boldsymbol{\lambda}} \leq \mathbf{0} \qquad\qquad \dot{\mathbf{F}}[\boldsymbol{\sigma},\mathbf{q}]\cdot\dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \tag{4.3}$$

La matrice di 'hardening' $\mathbf{H}\in\mathcal{R}^{n_d\times n_d}$ contiene i parametri di incrudimento $H_{\alpha\beta}=-\partial F_\alpha/\partial\lambda_\beta$ dove la derivata parziale è per sforzo costante (questo chiarimento è necessario per enfatizzare la distinzione con la formulazione nello spazio delle deformazioni di cui si parlerà poco piú avanti). La tabella a tre indici $\boldsymbol{n}\in\mathcal{R}^{n_d\times 3\times 3}$ assembla i gradienti delle funzioni di anelasticità $n^\alpha_{kl}=(\partial F_\alpha/\partial\boldsymbol{\sigma})_{kl}=(\mathbf{n}^\alpha)_{kl}$. Utilizzando la notazione compatta, le condizioni di complementarità (4.2) e di consistenza (4.3) sono formalmente simili alle condizioni scalari relative ad un materiale monodissipativo.

L'esistenza e l'unicità della relazione $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]$ in un algoritmo a sforzo imposto è stata discussa da Mandel-1965, Maier-1969-70a, Sewell-1973 sulla base delle proprietà della matrice $\mathbf{H}$. Nel caso in cui le "direzioni" $\mathbf{n}^\alpha$ siano linearmente indipendenti, l'esistenza e l'unicità sono garantite quando $\mathbf{H}$ è una *'P-matrix'*, cioè una matrice con tutti i minori principali positivi (Maier-1969), od anche quando $\mathbf{H}$ è simmetrica e definita positiva (una "matrice-P" simmetrica è definita positiva). Questo generalizza al caso multipotenziale la limitazione $H>0$ per un materiale monodissipativo nel definire un'espressione univoca della cedevolezza tangente (Carol et al.-1994a,b). Altre proprietà, tra cui l'ambito di validità del *"Postulato di Drucker"* (Drucker-1964) sono state discusse in dettaglio da Maier-1969. Nell'ambito degli scopi enunciati nell'introduzione di questo capitolo, non si intende qui fare una trattazione esaustiva delle leggi costitutive a multipotenziale, ma pervenire ad un'espressione degli operatori tangenti per la relativa analisi dei loro indici di rovina. Si indichi con n il numero effettivo dei meccanismi ulteriormente attivi in campo anelastico, per cui la condizione di consistenza valga col segno di uguale, $\dot{\mathbf{F}}=0$ (in un sottovettore n di $\mathbf{F}$). Il sottosistema lineare (4.3) di $n\times n$ equazioni si può risolvere in funzione di $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ invertendo la sottomatrice di incrudimento $\mathbf{H}$:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{H}^{-1}\cdot\boldsymbol{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\lambda}_\alpha = (\mathbf{H}^{-1})_{\alpha\beta}(\mathbf{n}^\beta)_{kl}\dot{\sigma}_{kl} \tag{4.4}$$

Sostituendo la (4.4) in $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}=\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{E}}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\boldsymbol{m}$, nella quale la risposta elastica è definita dalla legge di Hooke generalizzata $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{E}}=\mathbf{C}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, in cui $\mathbf{C}$ è la cedevolezza di scarico elastico, simmetrica e definita positiva (che eguaglia la cedevolezza iniziale $\mathbf{C}_o$ se la perdita di rigidezza non viene considerata tra i possibili meccanismi di dissipazione), si ottiene l'espressione della cedevolezza tangente che fornisce la legge incrementale $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}=\mathbf{C}_t:\dot{\boldsymbol{\sigma}}$,

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C} + \mathbf{H}^{\text{-}1} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n}) \qquad \Leftrightarrow \qquad C^t_{ijkl} = C_{ijkl} + (\mathbf{H}^{\text{-}1})_{\alpha\beta} m^\alpha_{ij} n^\beta_{kl} \tag{4.5}$$

Questa espressione sembra mostrare che $\mathbf{C}_t$ derivi da $n\times n$ modifiche di rango uno della cedevolezza elastica. Tuttavia i contributi indipendenti sono solo n. Infatti, definendo la tabella a tre indici $\check{\boldsymbol{n}}=\mathbf{H}^{\text{-}1}\cdot\boldsymbol{n}$, la cedevolezza tangente si ricava da n modifiche di rango uno dell'operatore elastico:

$$\boxed{\mathbf{C}_t = \mathbf{C} + \mathbf{m}^\alpha \otimes \check{\mathbf{n}}^\alpha} \tag{4.6}$$

La rigidezza tangente potrebbe ricavarsi in teoria per inversione della cedevolezza tangente, utilizzando ripetutamente la formula di Sherman and Morrison-1950 per questo caso di modifiche multiple di rango uno (si vedano il testo di Dennis and Schnabel-1983 ed il Capitolo 2). In modo più immediato si vuole ottenere direttamente la legge $\dot{\boldsymbol{\sigma}}[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]$ per un algoritmo a deformazioni incrementali imposte. Si consideri la legge di Hooke generalizzata $\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{E}:(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}-\dot{\boldsymbol{\lambda}}\cdot\boldsymbol{m})$ in termini della rigidezza elastica corrente allo scarico, simmetrica e definita positiva ($\mathbf{E}=\mathbf{E}_o$ se non vi è un processo di degradazione della rigidezza elastica). Sostituendo l'incremento di sforzo nella condizione di consistenza (4.3) che valga col segno di uguale per gli n meccanismi effettivamente attivati, si ottiene

$$(\mathbf{H} + \boldsymbol{n} : \mathbf{E} : \boldsymbol{m}) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{n} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\mathbf{H}}^{\text{-}1} \cdot \boldsymbol{n} : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{4.7}$$

dove $\bar{\mathbf{H}}=\mathbf{H}+\boldsymbol{n}:\mathbf{E}:\boldsymbol{m}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_c$. L'esistenza ed unicità della legge $\dot{\boldsymbol{\sigma}}[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]$ si dimostra quando la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ è una 'P-matrix', cioè se possiede minori principali tutti positivi (Mandel-1965, Maier-1969-70a, Sewell-1973). Se la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ è simmetrica ciò è garantito dalla definizione positiva della matrice stessa. Qualora venga a mancare la simmetria, solo l'unicità viene garantita nel caso in cui la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ sia definita positiva (Mandel-1965). Nel seguito si farà l'ipotesi che la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ sia definita positiva. La matrice $\mathbf{H}_c$ può venire chiamata matrice di 'softening' critico in analogia col parametro di 'softening' critico H_c di un materiale monodissipativo (Maier and Hueckel-1979) in quanto fissa i limiti ammissibili dei parametri di 'softening' "diretto" $H_{(\alpha)(\alpha)}>H^c_{(\alpha)(\alpha)}=-\mathbf{n}^{(\alpha)}:\mathbf{E}:\mathbf{m}^{(\alpha)}$, in modo che gli elementi diagonali di $\bar{\mathbf{H}}$ siano positivi, come richiesto dalla definizione positiva di $\bar{\mathbf{H}}$. La matrice $\mathbf{H}_c$ è simmetrica e definita negativa nel caso di leggi associate $\mathbf{m}^\alpha=\mathbf{n}^\alpha$ essendo la rigidezza elastica $\mathbf{E}$ simmetrica e definita positiva. Infatti per questo caso $\mathbf{H}_c=-\boldsymbol{n}:\mathbf{E}:\boldsymbol{n}$ e quindi la forma quadratica associata ad $\mathbf{H}_c$ per ogni vettore $\mathbf{x}$ fornisce $-(x_\alpha n^\alpha_{ij})E_{ijkl}(n^\beta_{kl}x_\beta)<0$, quando gli $\mathbf{n}^\alpha$ sono linearmente indipendenti. La condizione di definizione positiva di $\bar{\mathbf{H}}$ generalizza al caso multidissipativo la restrizione $\bar{H}=H+\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{m}=H-H_c>0$ usualmente assunta per un materiale monodissipativo (si vedano i Capitoli 2 e 3).

Sostituendo i moltiplicatori anelastici nella legge di Hooke generalizzata si ottiene l'espressione dell'operatore tangente della legge incrementale $\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{E}_t:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ per gli n meccanismi effettivamente attivati:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{H}}^{-1} : (\mathbf{E} : \boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n} : \mathbf{E}) \qquad \Leftrightarrow \qquad E^t_{ijkl} = E_{ijkl} - (\bar{\mathbf{H}}^{-1})_{\alpha\beta} E_{ijpq} m^\alpha_{pq} n^\beta_{rs} E_{rskl} \quad (4.8)$$

Definendo le quantità $\bar{\boldsymbol{n}}=\mathbf{E}:\boldsymbol{n}$, $\bar{\boldsymbol{m}}=-\mathbf{E}:\boldsymbol{m}$, $\hat{\boldsymbol{n}}=\bar{\mathbf{H}}^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{n}}$, si possono scrivere due espressioni alternative di $\mathbf{E}_t$

$$\boxed{\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \bar{\mathbf{H}}^{-1} : (\bar{\boldsymbol{m}} \otimes \bar{\boldsymbol{n}}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \bar{\mathbf{m}}^\alpha \otimes \hat{\mathbf{n}}^\alpha} \quad (4.9)$$

dove il tensore $\hat{\mathbf{n}}^\alpha=\bar{H}^{-1}_{\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}^\beta$ risulta essere una trasformazione lineare dei vari tensori $\bar{\mathbf{n}}^\beta$. L'operatore di rigidezza tangente si ottiene quindi con n modifiche di rango uno dell'operatore elastico.

Si noti che anche nel caso associato $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}$, corrispondente a $\bar{\boldsymbol{m}}=-\bar{\boldsymbol{n}}$, l'operatore tangente nel caso accoppiato di $\bar{\mathbf{H}}^{-1}$ non diagonale e non simmetrica risulta non simmetrico. Si ottiene un operatore simmetrico solo quando tutte le direzioni sono parallele tra di loro, $\bar{\mathbf{m}}^\alpha=-\bar{\mathbf{n}}^\beta$ $\forall\ \alpha,\beta$ tali che $\bar{H}^{-1}_{\alpha\beta} \neq 0$, oppure $\bar{\mathbf{m}}^\alpha=-\hat{\mathbf{n}}^\alpha$ $\forall\ \alpha$. Nel caso associato, se la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ è simmetrica, l'operatore tangente risulta simmetrico poichè $\bar{H}^{-1}_{\alpha\beta}\bar{n}^\alpha_{ij}\bar{n}^\beta_{kl}=\bar{H}^{-1}_{\alpha\beta}\bar{n}^\alpha_{kl}\bar{n}^\beta_{ij}$ (Petryk-1989).

Se la rigidezza elastica possiede la forma isotropa $\mathbf{E}=2\mu\mathbf{i}^s_4+\lambda\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2$, dove λ e μ sono i valori correnti dei moduli di Lamé, le n modifiche di rango uno diventano $(n+1)$ modifiche di rango uno del tensore $2\mu\mathbf{i}^s_4$ proporzionale al tensore identità del 4^o ordine simmetrico. Tale considerazione semplifica l'analisi degli indici di rovina associati all'operatore tangente.

4.1.1 Formulazione duale nello spazio delle deformazioni

La stessa espressione dell'operatore tangente (4.9) può essere ricavata nel caso duale di formulazione nelle deformazioni che estende la teoria monodissipativa presentata nel Capitolo 3 (Carol et al.-1994a,b). In questo caso le condizioni di anelasticità vengono definite nello spazio delle deformazioni, $\mathbf{F}=\mathbf{F}[\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{q}}]$.

In analogia con la decomposizione additiva dell'incremento di deformazione (4.1) si consideri la decomposizione duale dell'incremento di sforzo

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}} \qquad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{I}} = \sum_{\alpha=1}^{n_d} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha = \dot{\lambda}_\alpha\ \bar{\mathbf{m}}^\alpha = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \bar{\boldsymbol{m}} \quad (4.10)$$

in cui $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{E}}=\mathbf{E}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ e $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^\alpha=-\mathbf{E}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^\alpha$. Eliminando i moltiplicatori anelastici da quest'ultima relazione si riottiene la definizione $\bar{\boldsymbol{m}}=-\mathbf{E}:\boldsymbol{m}$ precedentmente fatta.

Le condizioni di complementarità si esprimono in modo analogo alle (4.2),

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0} \qquad \mathbf{F}[\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{q}}] \leq \mathbf{0} \qquad \mathbf{F}[\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{q}}] \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad (4.11)$$

cosí come le condizioni di carico/scarico si scrivono con relazioni di consistenza simili alle precedenti,

$$\dot{\mathbf{F}}[\boldsymbol{\epsilon},\bar{\mathrm{q}}] = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \bar{\mathrm{q}}}\right|_{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathrm{q}}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \bar{\boldsymbol{n}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \bar{\mathbf{H}} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} \leq \mathbf{0} \qquad \dot{\mathbf{F}}[\boldsymbol{\epsilon},\bar{\mathrm{q}}] \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0 \quad (4.12)$$

dove la condizione di eguaglianza $\dot{\mathbf{F}}$=0 varrà per il sottovettore di $\mathbf{F}$ corrispondente agli n meccanismi effettivamente attivati. La tabella $\bar{\boldsymbol{n}}$ assembla i gradienti delle superfici soglia di dissipazione nello spazio delle deformazioni e la matrice di incrudimento $\bar{\mathbf{H}}$ contiene i parametri di 'hardening' $\bar{H}_{\alpha\beta}=-\partial F_\alpha/\partial\lambda_\beta$, con derivata parziale ad $\boldsymbol{\epsilon}$ costante (ciò enfatizza la differenza esistente tra $\mathbf{H}$ ed $\bar{\mathbf{H}}$). I gradienti $\bar{\boldsymbol{n}}$ sono correlati alle normali $\boldsymbol{n}$ dalla relazione precedentemente data poichè

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}} : \left.\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{n} : \mathbf{E} \qquad (4.13)$$

Conclusioni analoghe si possono trarre per la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ che risulta coerente con la definizione $\bar{\mathbf{H}}=\mathbf{H}+\boldsymbol{n}{:}\mathbf{E}{:}\boldsymbol{m}$ data in precedenza. Infatti dalla condizione di consistenza per gli n meccanismi attivati si ottengono i moltiplicatori anelastici $\dot{\boldsymbol{\lambda}}=\bar{\mathbf{H}}^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{n}}{:}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ ed utilizzando la (4.13), il confronto con l'Eq. (4.7) richiede l'eguaglianza delle due matrici. L'espressione dell'operatore tangente (4.9) con le n modifiche di rango uno si ottiene dalla definizione (4.10) mediante sostituzione dei moltiplicatori anelastici.

Il grado di accoppiamento dei vari processi dissipativi dipende dalle relazioni assunte tra variabili interne e moltiplicatori anelastici $\mathbf{q}[\boldsymbol{\lambda}]$, $\bar{\mathbf{q}}[\boldsymbol{\lambda}]$. Se $q_\alpha=q_\alpha[\lambda_\alpha]$ o $\bar{q}_\alpha=\bar{q}_\alpha[\lambda_\alpha]$ i meccanismi sono indipendenti nel senso che le leggi di incrudimento di ogni processo non sono influenzate reciprocamente e le matrici $\mathbf{H}$ od $\bar{\mathbf{H}}$ sono diagonali (modi di scorrimento non interagenti alla Koiter). Tuttavia è opportuno notare che un disaccoppiamento totale, nel senso che la condizione di consistenza fornisce un sistema di n equazioni indipendenti risolvibili separatamente rispetto ai moltiplicatori anelastici $\dot{\boldsymbol{\lambda}}[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]$, si ottiene solo per matrice $\bar{\mathbf{H}}$ diagonale.

4.1.2 Materiali bidissipativi: plasticità combinata a degradazione elastica

Come esempio di materiale bidissipativo si considera il caso della plasticità accoppiata a perdita di rigidezza elastica. Assumendo piccoli gradienti di spostamento si decompone l'incremento di deformazione in un contributo elastico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}}$ ed in un addendo anelastico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{I}}$ il quale si esplicita mediante l'adozione di una legge di flusso ed una di degradazione in generale non associate,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{I}} \qquad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{I}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{P}} = \dot{\lambda}_{\mathrm{D}}\ \mathbf{m}^{\mathrm{D}} + \dot{\lambda}_{\mathrm{P}}\ \mathbf{m}^{\mathrm{P}} \qquad (4.14)$$

dove $\dot{\lambda}_{\mathrm{D}}$, $\dot{\lambda}_{\mathrm{P}}$ rappresentano il moltiplicatore di danno ed il moltiplicatore plastico mentre $\mathbf{m}^{\mathrm{D}}$, $\mathbf{m}^{\mathrm{P}}$ sono i tensori del 2^o ordine che forniscono le "direzioni" (dei 'rates' di deformazione) di degradazione elastica e di scorrimento plastico. Il contributo anelastico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{D}}$ tiene conto del processo di perdita di rigidezza da assegnarsi mediante un'opportuna legge d'evoluzione della cedevolezza elastica $\dot{\mathbf{C}}=\dot{\lambda}^{\mathrm{D}}\boldsymbol{M}$. Il tensore del 4^{o} ordine $\boldsymbol{M}$ prescrive quindi la direzione $\mathbf{m}^{\mathrm{D}}$ secondo la relazione $\mathbf{m}^{\mathrm{D}}=\boldsymbol{M}{:}\boldsymbol{\sigma}$ (si veda il Capitolo 3).

Due condizioni di anelasticità $F_{\mathrm{D}}[\boldsymbol{\sigma},\lambda_{\mathrm{D}},\lambda_{\mathrm{P}}]<0$, $F_{\mathrm{P}}[\boldsymbol{\sigma},\lambda_{\mathrm{D}},\lambda_{\mathrm{P}}]<0$ definiscono gli stati di sforzo per i quali non è possibile un'ulteriore attivazione dei due processi dissipativi. I relativi gradienti, la matrice di incrudimento 2×2 $\mathbf{H}=[-\partial F_\alpha/\partial\lambda_\beta]$ e la matrice di 'softening' critico $\mathbf{H}_c=[-\mathbf{n}^\alpha{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}^\beta]$ per $\alpha,\ \beta=\mathrm{D},\mathrm{P}$ si esprimono come segue:

$$\mathbf{n}^{\mathrm{D}}=\frac{\partial F_{\mathrm{D}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\ ;\ \ \mathbf{n}^{\mathrm{P}}=\frac{\partial F_{\mathrm{P}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\ ;\ \ \mathbf{H}=\begin{bmatrix}H_{\mathrm{DD}} & H_{\mathrm{DP}}\\ H_{\mathrm{PD}} & H_{\mathrm{PP}}\end{bmatrix};\ \ \mathbf{H}_c=\begin{bmatrix}-\mathbf{n}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{m}^{\mathrm{D}} & -\mathbf{n}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{m}^{\mathrm{P}}\\ -\mathbf{n}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{m}^{\mathrm{D}} & -\mathbf{n}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{m}^{\mathrm{P}}\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Quando entrambi i processi anelastici sono attivati, la soluzione delle due condizioni di ammissibilità plastica $\dot{F}_{\mathrm{D}}=0$, $\dot{F}_{\mathrm{P}}=0$ rispetto ai moltiplicatori anelastici richiede l'inversione della matrice di incrudimento 2×2 $\bar{\mathbf{H}}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_c$ assunta definita positiva. I moltiplicatori anelastici si esprimono in termini dell'incremento di deformazione imposto, $\dot{\lambda}_\alpha=\bar{\mathbf{H}}^{-1}_{\alpha\beta}\mathbf{n}^\beta{:}\mathbf{E}{:}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, dove $\mathbf{E}$ rappresenta la rigidezza elastica corrente. Mediante la semplice inversione della matrice 2×2 si ottiene

$$\dot{\lambda}_{\mathrm{D}}=\frac{(\bar{H}_{\mathrm{PP}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}-\bar{H}_{\mathrm{DP}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}})}{det[\bar{\mathbf{H}}]}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}=\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\ ;\quad \dot{\lambda}_{\mathrm{P}}=\frac{(-\bar{H}_{\mathrm{PD}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}+\bar{H}_{\mathrm{DD}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}})}{det[\bar{\mathbf{H}}]}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}=\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \tag{4.16}$$

in cui si sono utilizzate le definizioni $\bar{\mathbf{n}}^\alpha=\mathbf{E}{:}\mathbf{n}^\alpha$ e $\hat{\mathbf{n}}^\alpha=\bar{\mathbf{H}}^{-1}_{\alpha\beta}\bar{\mathbf{n}}^\beta$.

La rigidezza tangente si ottiene allora dalla legge elastica $\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{E}{:}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathrm{E}}$ mediante due modifiche di rango uno dell'operatore elastico $\mathbf{E}$,

$$\boxed{\mathbf{E}_t=\mathbf{E}+\bar{\mathbf{m}}^{\mathrm{D}}\otimes\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}+\bar{\mathbf{m}}^{\mathrm{P}}\otimes\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}}} \tag{4.17}$$

dove $\bar{\mathbf{m}}^\alpha=-\mathbf{E}{:}\mathbf{m}^\alpha$. In generale l'operatore tangente non è simmetrico, anche nel caso in cui le leggi di scorrimento siano associate ($\mathbf{m}^\alpha=\mathbf{n}^\alpha$ o $\bar{\mathbf{m}}^\alpha=-\bar{\mathbf{n}}^\alpha$), in quanto i tensori $\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}$, $\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}}$ sono trasformazioni lineari di entrambi i tensori $\mathbf{n}^{\mathrm{D}}$, $\mathbf{n}^{\mathrm{P}}$. Nel caso associato, se la matrice di incrudimento risulta simmetrica, anche la rigidezza tangente è simmetrica. Nel caso particolare di meccanismi indipendenti nello spazio delle deformazioni, cioè risultanti in una matrice $\bar{\mathbf{H}}$ diagonale, i due processi anelastici si disaccoppiano nel senso che entrambi i moltiplicatori anelastici si ottengono indipendentemente l'uno dall'altro. Tuttavia ciò non significa che i meccanismi di incrudimento nello spazio degli sforzi siano indipendenti. In generale la matrice di 'hardening' $\mathbf{H}$ possiede infatti termini extra-diagonali non nulli che eguagliano i corrispondenti termini della matrice di 'softening' critico $H_{\mathrm{DP}}=H^c_{\mathrm{DP}}$, $H_{\mathrm{PD}}=H^c_{\mathrm{PD}}$. In questo caso totalmente disaccoppiato, se le leggi di scorrimento sono associate, l'operatore tangente risulta automaticamente simmetrico.

4.1.3 Materiali monodissipativi

Nel caso piú semplice di un unico meccanismo di dissipazione, la legge costitutiva del materiale monodissipativo viene definita da un unico moltiplicatore anelastico. Questo è il caso della teoria classica della plasticità con condizioni di carico continue, di teorie costitutive per degradazione della rigidezza elastica o dell' 'elastoplastic coupling'.

La rigidezza tangente in una formulazione negli sforzi o nelle deformazioni si ottiene dalla Eq. (4.9), che si riduce ad una sola modifica di rango uno di $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \frac{\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}} \tag{4.18}$$

dove, come introdotto nel Capitolo 3, $\bar{\mathbf{m}}$ è la direzione dell'incremento anelastico di sforzo, $\bar{\mathbf{n}}$ è il gradiente della condizione di anelasticità nello spazio delle deformazioni ed $\mathbf{E}$ rappresenta la rigidezza elastica corrente ($\mathbf{E}$=$\mathbf{E}_o$ nel caso elastoplastico). Le quantità soprassegnate sono definite nello spazio delle deformazioni e sono correlate alle quantità duali nello spazio degli sforzi mediante le relazioni presentate nel Capitolo 3 (Carol et al.-1994a,b):

$$\mathbf{n} = \mathbf{C} : \bar{\mathbf{n}} \qquad \mathbf{m} = -\mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}} \qquad H = \bar{H} + \bar{\mathbf{n}} : \mathbf{C} : \bar{\mathbf{m}} \tag{4.19}$$

Nel caso associato $\mathbf{m}$=$\mathbf{n}$, $\bar{\mathbf{m}}$=$-\bar{\mathbf{n}}$ l'operatore tangente risulta ovviamente simmetrico.

4.2 Gli indici di rovina dei materiali multidissipativi

I criteri per definire i fenomeni di instabilità nei modelli costitutivi espressi attraverso una legge incrementale $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$=$\mathbf{E}_t$:$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ sono stati presentati nel Capitolo 2. Tali criteri sono ben definiti e le gerarchie tra i diversi indici di biforcazione sono state chiarite nella letteratura recente per il caso monodissipativo (Bigoni and Hueckel-1991, Neilsen and Schreyer-1993). Tali criteri vengono qui brevemente riassunti ed applicati al caso multidissipativo. La condizione necessaria per ogni tipo di biforcazione è fornita dalla perdita di positività del lavoro infinitesimo del secondo ordine

$$d^2W = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbf{E}_t^s : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad det[\mathbf{E}_t^s] = 0 \tag{4.20}$$

dove alla forma quadratica, per la simmetria di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, contribuisce solo la parte simmetrica $\mathbf{E}_t^s$=$(\mathbf{E}_t$+$\mathbf{E}_t^{\mathrm{T}})/2$ della rigidezza tangente $\mathbf{E}_t$.

Si considerano due modi biforcativi. Nel primo caso, la *"biforcazione continua"* (*'continuous bifurcation'*) si innesca quando il lavoro del secondo ordine oppure l'incremento di sforzo sono nulli per un certo incremento di deformazione critico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, pur rimanendo l'incremento di deformazione spazialmente continuo nel mezzo. Nel secondo caso, la *"biforcazione discontinua"* (*'discontinuous bifurcation'*) avviene quando si manifestano discontinuità spaziali dell'incremento $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ attraverso superfici di singolarità che dividono il continuo. Nella prima eventualità l'indice di rovina è fornito dalla singolarità della rigidezza tangente $\mathbf{E}_t$ o della sua parte simmetrica $\mathbf{E}_t^s$, nella seconda l'indice di rovina si esprime come condizione di singolarità del tensore di localizzazione $\mathbf{Q}_t$ o della sua parte simmetrica $\mathbf{Q}_t^s$=$(\mathbf{Q}_t$+$\mathbf{Q}_t^{\mathrm{T}})/2$.

In entrambi i casi gli indici di rovina associati alle parti simmetriche degli operatori forniscono condizioni di singolarità piú restrittive ("forti") in quanto gli autovalori di matrici non simmetriche soddisfano le diseguaglianze di Bromwich (Mirsky-1955). Si ottengono quindi una condizione di rovina "debole" ed una "forte" per ogni indice di rovina (riassunti propriamente da NEILSEN AND SCHREYER-1993).

La condizione forte di *"rovina continua"* (*'continuous failure'*) è fornita dall'Eq. (4.20) mentre la condizione debole si raggiunge in corrispondenza del punto limite ove lo stato di sforzo è stazionario:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad det[\mathbf{E}_t] = 0 \tag{4.21}$$

L'innesco di *"rovina discontinua"* (*'discontinuous failure'*) si riferisce invece all'insorgenza di discontinuità delle deformazioni incrementali, attraverso una superficie definita dalla sua normale $\mathbf{N}$ in ogni punto. Le condizioni di compatibilità di Maxwell (MAXWELL-1873, OTTOSEN AND RUNESSON-1991b) definiscono la forma ammissibile del "salto" delle deformazioni incrementali come mostrato nel Capitolo 2,

$$[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!] = \dot{\gamma}\,\mathbf{M}\otimes\mathbf{N} \qquad \Rightarrow \qquad [\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!] = \dot{\gamma}\,\frac{1}{2}\,(\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}+\mathbf{N}\otimes\mathbf{M}) \tag{4.22}$$

dove $\mathbf{M}$ è il versore definente la direzione di polarizzazione e $\dot{\gamma}$ l'ampiezza indeterminata della discontinuità. La condizione di equilibrio del vettore sforzo attraverso la superficie, $[\![\dot{\mathbf{t}}]\!]=\mathbf{0}$ e l'ipotesi di carico anelastico in entrambe le zone del corpo divise dalla superficie di discontinuità, conduce alla definizione del tensore di localizzazione $\mathbf{Q}_t$=$\mathbf{N}$·$\mathbf{E}_t$·$\mathbf{N}$ ed alla relativa condizione di localizzazione debole:

$$\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad det[\mathbf{Q}_t] = 0 \tag{4.23}$$

D'altro canto, nell'ambito della propagazione d'onda nei mezzi anelastici, si definisce il tensore acustico $\mathbf{Q}_t$ i cui autovalori sono proporzionali alle velocità di propagazione ed i relativi autovettori sono coincidenti con le direzioni $\mathbf{M}$, in quanto $\mathbf{Q}_t{\cdot}\mathbf{M}{=}(\rho c^2)\,\mathbf{M}$ (ρ è la densità di massa e c la velocità di propagazione). La condizione di stazionarietà del fronte d'onda risulta dall'annullamento della forma quadratica ρc^2, cioé

$$\rho c^2 = \mathbf{M}\cdot\mathbf{Q}_t\cdot\mathbf{M} = d^2 W_{loc} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad det[\mathbf{Q}_t^s] = 0 \tag{4.24}$$

Questa relazione si può anche ottenere dalla condizione necessaria per ogni tipo di biforcazione (4.20) qualora si sostituisca la forma cinematica compatibile (4.22) di $[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]$.

Al fine di analizzare gli indici di rovina introdotti occorre risolvere i problemi agli autovalori $\mathbf{E}_t{:}\mathbf{x}{=}\Omega\mathbf{x}$ e $\mathbf{Q}_t{\cdot}\mathbf{M}{=}\omega\mathbf{M}$. Le condizioni di singolarità sono invece risolubili direttamente per mezzo dei problemi agli autovalori generalizzati $\mathbf{E}_t{:}\mathbf{x}{=}\Omega^*\,\mathbf{E}{:}\mathbf{x}$ e $\mathbf{Q}_t{\cdot}\mathbf{M}{=}\omega^*\,\mathbf{Q}{\cdot}\mathbf{M}$ che sono in effetti relativi ai tensori $\mathbf{E}^{-1}{:}\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{Q}^{-1}{\cdot}\mathbf{Q}_t$. I vari indici di rovina continua e discontinua verranno indicati nel seguito con e e q,

$$e = \frac{det[\mathbf{E}_t]}{det[\mathbf{E}]}\,, \qquad e_s = \frac{det[\mathbf{E}_t^s]}{det[\mathbf{E}]}\,; \qquad q = \frac{det[\mathbf{Q}_t]}{det[\mathbf{Q}]}\,, \qquad q_s = \frac{det[\mathbf{Q}_t^s]}{det[\mathbf{Q}]} \tag{4.25}$$

in cui e e q sono relativi a condizioni deboli ('weak') mentre e_s e q_s riguardano condizioni forti ('strong'), relative alle parti simmetriche degli operatori.

Nella teoria costitutiva a multipotenziale qui esaminata, il tensore di localizzazione si ottiene dall'espressione (4.9) della rigidezza tangente mediante prodotto interno con la direzione $\mathbf{N}$ normale alla possibile superficie di discontinuità di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\boxed{\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \bar{\mathbf{m}}^\alpha \otimes \hat{\mathbf{n}}^\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{Q}_t = \mathbf{N}\cdot\mathbf{E}_t\cdot\mathbf{N} = \mathbf{Q} - \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{d}^\alpha} \tag{4.26}$$

dove $\mathbf{Q}$ è il tensore acustico elastico ed $\mathbf{a}^\alpha{=}{-}\mathbf{N}{\cdot}\bar{\mathbf{m}}^\alpha$, $\mathbf{d}^\alpha{=}\hat{\mathbf{n}}^\alpha{\cdot}\mathbf{N}$ sono i "vettori di trazione" ('traction vectors' nella terminologia di Hill-1962). Anche il tensore di localizzazione si ottiene quindi mediante n modifiche di rango uno del tensore acustico elastico.

Riassumendo, l'analisi degli indici di rovina nel contesto multidissipativo richiede la soluzione dei problemi seguenti:

(a) Determinare autovalori ed autovettori di $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{Q}_t$, tensori ottenuti con n modifiche di rango uno dei relativi operatori elastici $\mathbf{E}$ e $\mathbf{Q}$. Se gli operatori elastici possiedono una forma isotropa la soluzione del problema agli autovalori si semplifica poichè gli stessi operatori elastici si scrivono con una modifica di rango uno di un tensore proporzionale al tensore identità. Di conseguenza gli operatori tangenti si esprimono direttamente con $(n{+}1)$ modifiche di rango uno del tensore identità. L'analisi spettrale si esegue per la rappresentazione matriciale competente all'ordine tensoriale in esame utilizzando i risultati presentati nella Sez. 4.3 seguente. Analoghe considerazioni si possono trarre per gli operatori simmetrizzati $\mathbf{E}_t^s$ e $\mathbf{Q}_t^s$ che si ottengono con $2n$ modifiche di rango uno dei tensori elastici.

(b) Determinare le singolarità degli operatori tangenti con i problemi agli autovalori generalizzati, cioè gli autoproblemi per $\mathbf{E}^{-1}{:}\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{Q}^{-1}{\cdot}\mathbf{Q}_t$. Questi problemi agli autovalori sono piú semplici in quanto tali tensori sono ottenuti direttamente mediante n modifiche di rango uno del tensore identità anche nel caso di operatori elastici anisotropi. Per gli operatori simmetrizzati si procede analogamente con un numero di modifiche che però sale a $2n$.

Le condizioni di singolarità sopra menzionate conducono ad equazioni implicite nei parametri di incrudimento $e[\mathbf{H}]{=}0$, equazioni che rappresentano ipersuperfici nello spazio $H_{\alpha\beta}$. Nel caso della condizione di localizzazione queste equazioni implicite sono etichettate da un indice N in quanto significano che la localizzazione è possibile nella direzione individuata da $\mathbf{N}$ per i valori dei parametri di 'hardening' che soddisfino la condizione $q^{\mathrm{N}}[\mathbf{H}]{=}0$. Per ottenere il primo innesco di "rovina discontinua" ('discontinuous failure') durante il percorso di carico occorre prima determinare la direzione $\mathbf{N}_{df}$ che rende minimo l'indice $q^{\mathrm{N}}[\mathbf{H}]$ al variare di $\mathbf{N}$ ad $\mathbf{H}$ assegnata, ed in seguito rilevare la possibilità che tale valore minimo $\tilde{q}[\mathbf{H}]$ si annulli:

$$\tilde{q}[\mathbf{H}] = \min_{\mathbf{N}} \{q^{\mathrm{N}}[\mathbf{H}] \mid \|\mathbf{N}\| = 1\} = 0 \tag{4.27}$$

Anche questa condizione fornisce un'equazione implicita nei parametri di incrudimento. In un materiale monodissipativo tale procedura fornisce lo stesso risultato della classica massimizzazione di H con $\mathbf{N}$ che fornisce il valore di 'hardening' H^{N}_{df} necessario per localizzazione nella direzione $\mathbf{N}$. Nel presente contesto tale modo di procedere è invece difficile da definire ed utilizzare in quanto si dovrebbe individuare il primo punto di biforcazione lungo un percorso arbitrario nello spazio $H_{\alpha\beta}$, cioè lungo il percorso effettivamente seguito durante il processo di carico. La prima localizzazione non si ottiene in generale per i valori massimi di tutti i parametri di incrudimento lungo tale percorso. In altre parole, a meno che si scelga a priori un vincolo interno per i possibili valori dei parametri, cioè imponendo un percorso prefissato con un'unica quantità come variabile libera, il problema del primo innesco non è definibile. Ad esempio nel caso di percorso prefissato lineare si potrebbe assumere come variabile da massimizzare la distanza dall'origine di un punto della retta. Ciò individuerebbe il primo innesco di biforcazione provenendo da valori arbitrariamente grandi dei parametri di incrudimento corrispondenti alla risposta in campo elastico.

4.3 Analisi del problema agli autovalori per modifiche multiple di rango uno

Il problema di formulare matrici definite positive e simmetriche con modifiche di rango uno è tipico dei metodi secanti negli algoritmi di soluzione dei problemi di ottimizzazione (Dennis and Schnabel-1983), in particolare in relazione a una e due modifiche di rango uno (Brodlie et al.-1973). Il problema simmetrico agli autovalori per una modifica di rango uno è ben compreso mentre quello non simmetrico è argomento corrente di ricerca (Jessup-1993). Tuttavia sembra che la soluzione del problema agli autovalori piú generale di n modifiche di rango uno non sia attualmente disponibile in letteratura. Di ciò intendiamo occuparci in questa sezione.

Allo scopo di studiare le proprietà degli indici di rovina definiamo i seguenti due problemi agli autovalori. Il primo sia relativo ad una matrice $\mathbf{U}_n$, $m\times m$, ottenuta per somma di n contributi di rango uno ed il secondo ad una matrice $\mathbf{V}_n$, $m\times m$, ottenuta come la modifica $\mathbf{U}_n$ della matrice identità $\mathbf{I}$ $m\times m$,

$$\mathbf{U}_n = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i = \rho_i\, \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{d}_i \qquad \mathbf{V}_n = \mathbf{I} + \mathbf{U}_n \tag{4.28}$$

dove gli n vettori $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, e $\mathbf{d}_i{=}\rho_{(i)}\mathbf{b}_{(i)}$ (i=1,2,...,n) siano vettori linearmente indipendenti a valori reali $\in \mathcal{R}^m$. La matrice $\mathbf{U}_n$ risulta simmetrica se $\mathbf{b}_i{=}\mathbf{a}_i$ $\forall\ i$.

Sono opportune alcune considerazioni circa il rango r della matrice $\mathbf{U}_n$. Naturalmente, secondo la definizione di rango di una matrice si ha $r[\mathbf{U}_n]{\leq}m$. Inoltre, sfruttando la proprietà $r[\mathbf{A}{+}\mathbf{B}]{\leq}r[\mathbf{A}]{+}r[\mathbf{B}]$ (Mirsky-1955) possiamo anche concludere che

$$r[\mathbf{U}_n] \leq \sum_{i=1}^{n} r[\rho_i\, \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i] = \sum_{i=1}^{n} 1 = n \tag{4.29}$$

Ciò significa che $r[\mathbf{U}_n]$ è al piú n, quando $n{<}m$, cioè al piú n degli m autovalori di $\mathbf{U}_n$ sono eventualmente non nulli.

I problemi agli autovalori per le matrici $\mathbf{U}_n$ e $\mathbf{V}_n$ si esprimono come

$$\mathbf{U}_n \cdot \mathbf{x} = u\,\mathbf{x} \qquad\qquad \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{y} = v\,\mathbf{y} \tag{4.30}$$

Si può notare immediatamente che i due problemi sono strettamente correlati. In particolare, una volta noti autovettori ed autovalori di $\mathbf{U}_n$, anche l'autoproblema di $\mathbf{V}_n$ è risolto. Infatti $\mathbf{V}_n{\cdot}\mathbf{x}{=}(1{+}u)\mathbf{x}{=}v\mathbf{x}$ e quindi $\mathbf{x}_j{=}\mathbf{y}_j$ con $v_j{=}1{+}u_j$ per $j{=}1,2,...,m$. Poiché $\mathbf{U}_n{\cdot}\mathbf{x}{=}\rho_i(\mathbf{b}_i{\cdot}\mathbf{x})\,\mathbf{a}_i$, ciò suggerisce di cercare autovettori del tipo

$$\mathbf{x} = \alpha_j\,\mathbf{a}_j = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha} \tag{4.31}$$

dove $\boldsymbol{\alpha}{\in}\mathcal{R}^n$ indica il vettore contente i coefficienti α_i da determinarsi ed $\mathbf{A}$ è la matrice $m{\times}n$ le cui colonne sono formate dai vettori $\mathbf{a}_j$, cioè tale che $A_{ij}{=}(\mathbf{a}_j)_i$. Sostituendo l'espressione degli autovettori ipotizzati nel problema agli autovalori (4.30) di $\mathbf{U}_n$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}[\mathbf{d}_i\cdot\mathbf{a}_j - u\delta_{ij}]\,\alpha_j\right)\mathbf{a}_i = \mathbf{0} \tag{4.32}$$

Annullando separatamente ognuno dei coefficienti di $\mathbf{a}_i$ otteniamo il sistema lineare omogeneo

$$[\mathbf{d}_i\cdot\mathbf{a}_j - u\delta_{ij}]\,\alpha_j = 0_i \tag{4.33}$$

che definisce il problema agli autovalori per una matrice $\mathbf{Z}$, $n{\times}n$, associata a $\mathbf{U}_n$. Le autosoluzioni u ed $\boldsymbol{\alpha}$ cercate sono quindi anche le autosoluzioni del problema associato:

$$\boxed{\mathbf{Z} = [\mathbf{d}_i\cdot\mathbf{a}_j] = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A} \qquad\Rightarrow\qquad \mathbf{Z}\cdot\boldsymbol{\alpha} = u\,\boldsymbol{\alpha}} \tag{4.34}$$

$\mathbf{D}$ indica la matrice $m{\times}n$ assemblata con i vettori $\mathbf{d}_j$ come colonne, cioè $D_{ij}{=}(\mathbf{d}_j)_i$. Sembra importante notare che quando il numero di modifiche di rango uno supera le dimensioni del problema originario, cioè se $n{>}m$, comunque solo m degli n autovalori di $\mathbf{Z}$ possono essere non nulli. Infatti, poiché $r[\mathbf{D}^{\mathrm{T}}{\cdot}\mathbf{A}]{\leq}\min\{r[\mathbf{D}],r[\mathbf{A}]\}$ (Mirsky-1955), e $r[\mathbf{D}]{\leq}m$, $r[\mathbf{A}]{\leq}m$, il rango di $\mathbf{Z}$ risulta inferiore ad m, $r[\mathbf{Z}]{\leq}m$. In conclusione, il problema effettivo da affrontare ha dimensioni $\min\{n,m\}$, e può essere risolto analiticamente per $\min\{n,m\}{\leq}4$.

La matrice $\mathbf{Z}$ risulta simmetrica se $\mathbf{D}{=}\mathbf{A}$ mentre in generale non lo è se $\mathbf{B}{=}\mathbf{A}$ a causa della presenza dei fattori scalari ρ_i (analogamente alle definizioni di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ sia la matrice che contiene i vettori $\mathbf{b}_j$ come colonne), anche se $\mathbf{U}_n$ è comunque simmetrica. Infatti, indicando con $\mathbf{S}$ la matrice diagonale $n{\times}n$ che allinea i fattori ρ_i sulla sua diagonale, si ha $\mathbf{D}{=}\mathbf{B}{\cdot}\mathbf{S}$ e possiamo scrivere $\mathbf{Z}{=}\mathbf{S}{\cdot}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}{\cdot}\mathbf{A}{=}\mathbf{S}{\cdot}\mathbf{Z}^*$, essendo $\mathbf{Z}^*{=}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}{\cdot}\mathbf{A}$ l'analoga di $\mathbf{Z}$ ma relativa a $\mathbf{B}$. Quindi $\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}{=}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}{\cdot}\mathbf{B}{\cdot}\mathbf{S}{\neq}\mathbf{Z}$, anche se $\mathbf{B}{=}\mathbf{A}$. Poiché gli autovalori di $\mathbf{U}_n$, simmetrica e reale, sono reali, anche gli autovalori di $\mathbf{Z}$ devono essere reali. La dimostrazione di quest'ultima affermazione non appare comunque immediata (nel caso $n{=}2$ viene dimostrata nel punto 4.3.2 seguente), cosí come non sembra facile trovare la relazione tra le proprietà spettrali di $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}^*$, nonostante i determinanti siano correlati dalla semplice relazione $det[\mathbf{Z}]{=}\rho_1\rho_2\rho_3\,det[\mathbf{Z}^*]$.

4.3.1 Modifiche di rango uno della matrice identità

Nel caso piú semplice le n modifiche di rango uno si riducono ad un unico contributo e la matrice $\mathbf{Z}$ degenera nello scalare $Z{=}\mathbf{d}{\cdot}\mathbf{a}$. Questo coincide con l'autovalore u, mentre anche l'autovettore diventa uno scalare, ad es. $\alpha{=}1$. Quindi l'unico possibile autovalore u_1 non nullo di $\mathbf{U}_1{=}\mathbf{a}{\otimes}\mathbf{d}$ ed il relativo autovettore $\mathbf{x}_1$ si esprimono come

$$u_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \quad \text{con} \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{a} \tag{4.35}$$

Di conseguenza $v_1{=}1{+}\mathbf{a}{\cdot}\mathbf{d}$ rimane il solo autovalore di $\mathbf{V}_1{=}\mathbf{I}{+}\mathbf{a}{\otimes}\mathbf{d}$ eventualmente modificato. Gli $(m{-}1)$ autovalori nulli di $\mathbf{U}_n$ ed autovalori unitari di $\mathbf{V}_n$ sono associati ad autovettori $\mathbf{x}{\perp}\mathbf{d}$ tali che $\mathbf{x}{\cdot}\mathbf{d}{=}0$. Noti gli autovettori di $\mathbf{V}_1$, se ne ottiene direttamente il determinante come

$$\boxed{det[\mathbf{I} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}] = 1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d}} \tag{4.36}$$

Questo risultato, importante al fine di determinare eventuali condizioni di singolarità coincide con la *"formula per la perturbazione di un determinante"* fornita da Pearson-1969 per modifiche di rango uno e rango due della matrice identità.

4.3.2 Modifiche di rango due della matrice identità

Nel caso di una modifica di rango due, $\mathbf{U}_2{=}\mathbf{a}_1{\otimes}\mathbf{d}_1{+}\mathbf{a}_2{\otimes}\mathbf{d}_2$, l'autoproblema di $\mathbf{Z}$ ha dimensioni $2{\times}2$ e consente una rapida soluzione degli autovalori in forma chiusa, risolvendo un'equazione di secondo grado:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{1}{2}\left((\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2) \pm \sqrt{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2)^2 - 4(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2 - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_2\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_1)} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left((\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2) \pm \sqrt{(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1 - \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2)^2 + 4\ \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_2\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_1} \right) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Gli autovettori di $\mathbf{U}_2$ associati a questi autovalori si ricavano come $\mathbf{x}_{1,2}{=}\alpha_1^{1,2}\mathbf{a}_1{+}\alpha_2^{1,2}\mathbf{a}_2$, dove $\boldsymbol{\alpha}_{1,2}$ sono gli autovettori di $\mathbf{Z}$ associati ad u_1 ed u_2. Gli autovalori non unitari $v_{1,2}$ della matrice modificata $\mathbf{V}_2{=}\mathbf{I}{+}\mathbf{a}_1{\otimes}\mathbf{d}_1{+}\mathbf{a}_2{\otimes}\mathbf{d}_2$ sono quindi $v_{1,2}{=}1+u_{1,2}$ ed il determinante di $\mathbf{V}_2$ si ricava come $(1+u_1)(1+u_2)$, ottenendo

$$\boxed{det[\mathbf{I} + \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{d}_2] = (1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_1)(1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_2) - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{d}_2\ \ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{d}_1} \tag{4.38}$$

Questa espressione coincide con la *"formula per la perturbazione di un determinante"* proposta da Pearson-1969 per modifiche di rango due di matrici identità.

L'eventualità di autovalori complessi nel caso di matrice $\mathbf{U}_2$ non simmetrica dipende dal segno del discriminante $\Delta{=}((\mathbf{a}_1{\cdot}\mathbf{d}_1{-}\mathbf{a}_2{\cdot}\mathbf{d}_2)^2{+}4\,\mathbf{a}_1{\cdot}\mathbf{d}_2\ \ \mathbf{a}_2{\cdot}\mathbf{d}_1)$ nell'Eq. (4.37). Nel caso simmetrico con $\mathbf{d}_1{=}\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{d}_2{=}\mathbf{a}_2$ anche il secondo termine in Δ fornisce il contributo positivo $(\mathbf{a}_1{\cdot}\mathbf{a}_2)^2$. Di conseguenza, come previsto per una matrice reale simmetrica, eventuali autovalori complessi sono da escludersi. Inoltre, anche nel caso in cui $\mathbf{b}_1{=}\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{b}_2{=}\mathbf{a}_2$, con $\rho_1{\neq}\rho_2$, il quale fornisce una matrice $\mathbf{Z}$ non simmetrica, si può dimostrare che gli autovalori non nulli sono reali, a conferma del fatto che $\mathbf{U}_2$ rimane comunque simmetrica. Infatti, indicando con a_1, a_2 le norme Euclidee dei vettori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e con ϕ l'angolo compreso tra i due vettori, per i due termini sotto radice quadrata nella prima e seconda espressione in Eq. (4.37) si ha

$$\Delta = (\rho_1 a_1^2 + \rho_2 a_2^2)^2 - 4\ \rho_1\rho_2\ a_1^2 a_2^2\ \sin^2\phi = (\rho_1 a_1^2 - \rho_2 a_2^2)^2 + 4\ \rho_1\rho_2\ a_1^2 a_2^2\ \cos^2\phi > 0 \quad (4.39)$$

cioè un discriminante positivo per ogni valore di ρ_1, ρ_2 tali da dare un prodotto $\rho_1\rho_2$ positivo o negativo.

4.4 Analisi degli operatori tangenti nel caso monodissipativo

Le conclusioni dedotte in Sez. 4.3 consentono di analizzare le proprietà spettrali degli operatori tangenti $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{Q}_t$ rappresentabili in forma matriciale mediante matrici 6×6 e 3×3 rispettivamente. Considerando un materiale monodissipativo, la soluzione del problema agli autovalori di una o due modifiche di rango uno fornisce in modo rapido e compatto le autosoluzioni di $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{Q}_t$ nel caso di rigidezza elastica isotropa e le condizioni di singolarità di $\mathbf{E}_t^s$, $\mathbf{Q}_t^s$ per elasticità generalmente anisotropa.

4.4.1 Analisi della rigidezza tangente $\mathbf{E}_t$

Nel caso usuale di materiale elastoplastico con superficie di snervamento continua e senza punti singolari, di degradazione della rigidezza elastica, di modelli 'smeared crack' o di 'elastoplastic coupling', si ha un unico moltiplicatore anelastico e l'operatore tangente (4.18) si ottiene con una sola modifica di rango uno della rigidezza elastica.

Se la rigidezza elastica corrente è assegnata in forma isotropa, la modifica di rango uno in (4.18) si trasforma in una modifica di rango due $\mathbf{U}_2$ di un tensore proporzionale all'identità del 4^o ordine $\mathbf{i}_4^s$

$$\mathbf{E}_t = 2\mu\mathbf{i}_4^s + \lambda\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \frac{\bar{\mathbf{m}} \otimes \bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}} = 2\mu\mathbf{i}_4^s + \mathbf{U}_2 \quad (4.40)$$

Secondo i risultati presentati nella Sez. 4.3, l'autoproblema $\mathbf{U}_2{:}\mathbf{x}{=}u\,\mathbf{x}$ di $\mathbf{U}_2$, si risolve ipotizzando gli autovettori nella forma $\mathbf{x}{=}\alpha_1\mathbf{i}_2 + \alpha_2\bar{\mathbf{m}}$. Si ottiene il sistema lineare omogeneo (4.33), che si specializza in questo caso nel modo seguente:

$$\begin{cases} (3\lambda - u) \quad \alpha_1 \quad + \quad \lambda tr[\bar{\mathbf{m}}] \quad \alpha_2 = 0 \\ \dfrac{tr[\bar{\mathbf{n}}]}{\bar{H}} \quad \alpha_1 \quad + \quad \left(\dfrac{\bar{\mathbf{n}} : \bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}} - u\right) \quad \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

dove $tr[\mathbf{o}]$ indica la traccia del tensore del 2^o ordine $\mathbf{o}$ definita da $\mathbf{i}_2{:}\mathbf{o}$. Gli autovalori si ottengono quindi dall'Eq. (4.37) come

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\left(3\lambda + \frac{\bar{\mathbf{n}} : \bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}}\right) \pm \sqrt{\left(3\lambda + \frac{\bar{\mathbf{n}} : \bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}}\right)^2 - 4\ \left(3\lambda\frac{\bar{\mathbf{n}} : \bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}} - \frac{\lambda\, tr[\bar{\mathbf{n}}]tr[\bar{\mathbf{m}}]}{\bar{H}}\right)}\right) \quad (4.42)$$

mentre i corrispondenti autovalori modificati di $2\mu\mathbf{i}_4^s$ sono $\Omega_{1,2}{=}2\mu{+}u_{1,2}$.

La condizione di punto limite $det[\mathbf{E}_t]{=}0$ si riduce all'annullamento dell'autovalore minimo, $\Omega_2{=}2\mu{+}u_2{=}0$. Risolvendo rispetto ad $\bar{H}$ si ottiene il valore di 'hardening' $\bar{H}_{cf}$ necessario per "rovina continua" ('continuous failure'):

$$\bar{H}_{cf} = \frac{-(3\lambda+2\mu)\,\bar{\mathbf{n}}:\bar{\mathbf{m}} + \lambda tr[\bar{\mathbf{n}}]tr[\bar{\mathbf{m}}]}{2\mu(3\lambda+2\mu)} = -\bar{\mathbf{n}}:\mathbf{C}:\bar{\mathbf{m}} \tag{4.43}$$

poichè $\mathbf{C}$ si scrive nella forma isotropa $\mathbf{C}{=}{-}\lambda\mathbf{i}_2{\otimes}\mathbf{i}_2/(2\mu(3\lambda{+}2\mu)){+}\mathbf{i}_4^s/2\mu$. Questo risultato coincide con quanto ottenuto nel Capitolo 3, in cui si era ipotizzato un incremento di deformazione critico $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf}{=}\mathbf{C}{:}\bar{\mathbf{m}}$ al fine di esplicitare la condizione di singolarità. Questo è in effetti l'autotensore $\mathbf{x}$ associato all'autovalore nullo di $\mathbf{E}_t$. Infatti, risolvendo il sistema (4.41) per $u{=}{-}2\mu$, si ottiene

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{-\lambda\, tr[\bar{\mathbf{m}}]}{3\lambda+2\mu} \tag{4.44}$$

il quale dà un autovalore $\mathbf{x}$ precisamente proporzionale a $\mathbf{C}{:}\bar{\mathbf{m}}$. Si può notare inoltre che la condizione di punto limite in termini di quantità non soprassegnate relative ad una formulazione negli sforzi, fornisce $H_{cf}{=}0$ con $\mathbf{x}{=}\mathbf{m}$, indicando che l'incremento di deformazione critico necessario per la stazionarietà dello sforzo ($\dot{\boldsymbol{\sigma}}{=}\mathbf{0}$) è proporzionale alla direzione di scorrimento anelastico.

Possiamo concludere che in generale due autovalori di $\mathbf{E}$ vengono modificati dal contributo aggiuntivo di rango uno in $\mathbf{E}_t$ e possono divenire complessi nel caso non simmetrico di formulazioni non associate. Tuttavia, in alcuni casi, a secondo della forma assunta dai tensori $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{m}}$, solo un autovalore viene modificato o addirittura non vi è alcuna modifica dello spettro di $\mathbf{E}$. Ciò è importante per assicurare autovalori comunque reali anche nel caso non associato. Questi risultati sono stati già forniti nel Capitolo 2 per mezzo di altre considerazioni e si riderivano in modo rapido e chiaro nel presente contesto. Decomponendo i tensori $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{m}}$ nelle loro parti volumetriche e deviatoriche $\bar{\mathbf{n}}_d$, $\bar{\mathbf{m}}_d$ e $\bar{\mathbf{n}}_v$, $\bar{\mathbf{m}}_v$, tali che $\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}{=}\bar{\mathbf{n}}_d{:}\bar{\mathbf{m}}_d{+}\bar{\mathbf{n}}_v{:}\bar{\mathbf{m}}_v$, si possono manifestare i seguenti casi:

(a) Se $\bar{\mathbf{n}}_v{=}\mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{m}}_d{=}\mathbf{0}$ oppure $\bar{\mathbf{n}}_d{=}\mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{m}}_v{=}\mathbf{0}$, cioé se uno dei due tensori $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{m}}$ è puramente deviatorico mentre l'altro è puramente volumetrico, non ci sono modifiche dello spettro di $\mathbf{E}$. Infatti in questo caso $\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}{=}0$ e gli autovalori in Eq. (4.42) sono $u_1{=}3\lambda$ e $u_2{=}0$. Gli autovalori di $\mathbf{E}_t$ coincidono quindi con gli autovalori di $\mathbf{E}$, che sono i cinque autovalori di taglio 2μ e l'autovalore di volume $3K{=}3\lambda{+}2\mu$, dove K indica il modulo di volume.

(b) Se $\bar{\mathbf{n}}_v{=}\mathbf{0}$ oppure $\bar{\mathbf{m}}_v{=}\mathbf{0}$, cioè se uno dei due tensori è puramente deviatorico, viene modificato solo uno degli autovalori di taglio. Infatti dall'Eq. (4.42) abbiamo $u_1{=}3\lambda$, $u_2{=}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}$, se $3\lambda{-}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}{\geq}0$ e viceversa $u_1{=}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}$, $u_2{=}3\lambda$, se $3\lambda{-}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}{\leq}0$. Ciò significa che l'autovalore di volume $3\lambda{+}2\mu$ non è cambiato mentre uno degli autovalori di taglio si modifica come $2\mu{+}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}$. L'autovalore modificato rimane quindi reale e può annullarsi per $\bar{H}{=}{-}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/2\mu$.

(c) Se $\bar{\mathbf{n}}_d{=}\mathbf{0}$ oppure $\bar{\mathbf{m}}_d{=}\mathbf{0}$, cioè se uno dei due tensori è puramente volumetrico, viene modificato solo l'autovalore di volume. Infatti, in questo caso $\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}{=}tr[\bar{\mathbf{n}}]tr[\bar{\mathbf{m}}]/3$ e dall'Eq. (4.42) otteniamo $u_1{=}3\lambda{+}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}$, $u_2{=}0$ se $3\lambda{+}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}{\geq}0$ e viceversa $u_1{=}0$, $u_2{=}3\lambda{+}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}$ se $3\lambda{+}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}{\leq}0$. Solo l'autovalore di volume viene quindi modificato come $3K{+}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/\bar{H}$, che rimane comunque reale e si può annullare per $\bar{H}{=}{-}\bar{\mathbf{n}}{:}\bar{\mathbf{m}}/3K$.

(d) Se entrambi $\bar{\mathbf{n}}$ e $\bar{\mathbf{m}}$ contengono sia la parte volumetrica che quella deviatorica, in generale vengono modificati due autovalori che possono divenire complessi nel caso di leggi non associate, in dipendenza dal segno del discriminante nella radice quadrata dell'Eq. (4.42).

La condizione di punto limite può essere derivata direttamente usando la "formula per la perturbazione di un determinante" (4.36) di una modifica di rango uno della matrice identità. Infatti dal problema agli autovalori generalizzato $\mathbf{E}_t{:}\mathbf{x}{=}\Omega^*\mathbf{E}{:}\mathbf{x}$, l'indice di rovina diffusa $e{=}0$ si può scrivere come

$$e = \frac{det[\mathbf{E}_t]}{det[\mathbf{E}]} = det\left[\mathbf{i}_4^s - \frac{\mathbf{m}\otimes\bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}}\right] = 1 - \left(\frac{\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{m}}{\bar{H}}\right) = \frac{H}{\bar{H}} = 0 \quad\Rightarrow\quad H_{cf} = 0 \tag{4.45}$$

a conferma dei risultati forniti nell'Eq. (4.43) ($\bar{H}_{cf}{=}\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}{>}0$). Tale risultato è ovviamente indipendente dal tipo di rigidezza o cedevolezza elastica, generalmente anisotropa. Si noti che dall'Eq. (4.45), se $\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}$ viene assunto positivo, si ha $\bar{H}{>}H$ e $det[\mathbf{E}_t]{<}det[\mathbf{E}]$. Quindi l'effetto *'locking'* di irrigidimento della risposta incrementale non è possibile (Fig. 4.1).

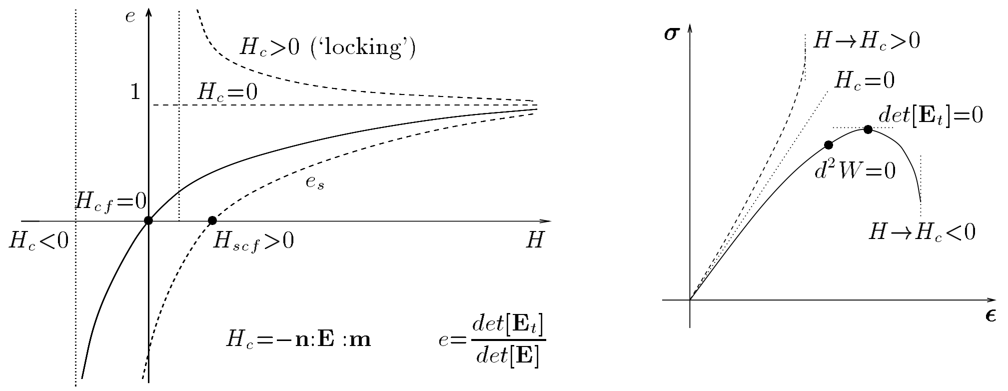


Figura 4.1: Rappresentazione e gerarchia delle condizioni di rovina diffusa.

La condizione di perdita di stabilità in piccolo $d^2W{=}0$, cioè la condizione di singolarità della parte simmetrica dell'operatore tangente $\mathbf{E}_t^s{=}(\mathbf{E}_t{+}\mathbf{E}_t^{\mathrm{T}})/2$ si può ricavare anche usando direttamente la formula di perturbazione (4.38) valida per modifiche di rango due della matrice identità. Infatti per l'operatore simmetrico si ottiene

$$\mathbf{E}_t^s = \mathbf{E} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\mathbf{m}}\otimes\bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}} + \frac{\bar{\mathbf{n}}\otimes\bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}}\right) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{E}^{-1}:\mathbf{E}_t^s = \mathbf{i}_4^s - \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{m}\otimes\bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{n}\otimes\bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}} \tag{4.46}$$

e per il suo determinante normalizzato e_s utilizzando le relazioni (4.19) ricaviamo

$$e_s = \frac{det[\mathbf{E}_t^s]}{det[\mathbf{E}]} = \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{m}:\bar{\mathbf{n}}}{\bar{H}}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{n}:\bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{m}:\bar{\mathbf{m}}}{\bar{H}}\;\frac{1}{2}\,\frac{\bar{\mathbf{n}}:\mathbf{n}}{\bar{H}} \tag{4.47}$$

$$\boxed{e_s = 1 - \left(\frac{\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{m}}{\bar{H}}\right) - \left(\frac{(\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{n})(\mathbf{m}:\mathbf{E}:\mathbf{m}) - (\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{m})^2}{4\bar{H}^2}\right)} \tag{4.48}$$

L'annullamento del determinante è rappresentato da un'equazione di secondo grado che risolta fornisce due radici per il parametro di 'hardening' $H{=}\bar{H}{-}\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}$

$$H_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{m} \pm \sqrt{(\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{n})(\mathbf{m}:\mathbf{E}:\mathbf{m})}\right) \tag{4.49}$$

Poiché $\bar{H}$ viene assunto positivo, i valori ammissibili di 'softening' devono essere maggiori del valore critico H_c, $H{>}H_c{=}{-}\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}$. Si noti che la condizione di $\mathbf{E}$-ortogonalità $\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}{=}0$, che definisce il confine tra valori positivi e negativi di H_c e quindi restringe il grado di non normalità ammissibile, non coincide in generale con la condizione di ortogonalità $\mathbf{n}{:}\mathbf{m}{=}0$ (si veda la Fig. 4.2). Inoltre poiché $\mathbf{m}$ ed $\mathbf{n}$ sono definiti a meno di un coefficiente di proporzionalità, si può sempre avere $\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{n}{=}\mathbf{m}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}{=}r$, in cui r è uno scalare positivo, ed $\mathbf{y}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{y}{=}r$ per ogni tensore simmetrico del 2^o ordine $\mathbf{y}$. Questo rappresenta un ellissoide nello spazio $\mathbf{y}$ (Fig. 4.2). Siccome l'ellissoide è strettamente convesso si ha $\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}(\mathbf{n}{-}\mathbf{m}){>}0$ per ogni $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{m}$ tra loro non proporzionali, essendo $\mathbf{n}{:}\mathbf{E}$ il gradiente nel punto $\mathbf{n}$ (Maier and Hueckel-1979).

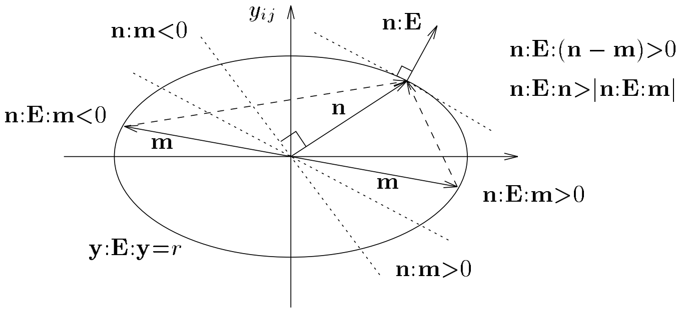


Figura 4.2: Rappresentazione di forme quadratiche e bilineari associate ad $\mathbf{E}$.

Di conseguenza H_2 appartiene al regime "subcritico" di 'softening' (cioè tale che $H_2{\leq}H_c$) in quanto $H_1{\geq}0$ ed il valore di 'hardening' necessario per attivare la condizione forte di rovina continua è H_1 in (4.49), cioè $H_{scf}{=}H_1$,

$$\boxed{H_{scf} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{n})(\mathbf{m}:\mathbf{E}:\mathbf{m})} - \mathbf{n}:\mathbf{E}:\mathbf{m}\right) \geq H_{cf} = 0} \tag{4.50}$$

Questo risultato è stato fornito da Maier and Hueckel-1979 per l' 'elastoplastic coupling' e riottenuto successivamente da Runesson and Mróz-1989 e Neilsen and Schreyer-1993. Il modulo di 'hardening' necessario per annullare il lavoro del secondo ordine è in generale positivo, mentre si annulla solo nel caso associato. Come ci si poteva attendere dalle diseguaglianze di Bromwich sugli autovalori di matrici non simmetriche, la condizione di perdita di stabilità $d^2W{=}0$ è piú severa della condizione di perdita di unicità della risposta incrementale $det[\mathbf{E}_t]{=}0$ (Fig. 4.1). Questa osservazione si evince confrontando l'Eq. (4.48) con l'Eq. (4.45), in quanto l'ulteriore termine positivo che compare tra parentesi nell' Eq. (4.48) destabilizza il determinante verso il valore nullo.

4.4.2 Analisi del tensore di localizzazione $\mathbf{Q}_t$

Il tensore di localizzazione si ottiene dall'espressione generale (4.26) considerando un solo contributo nella sommatoria estesa ai meccanismi di dissipazione attivi oppure direttamente con doppio prodotto tensoriale interno di $\mathbf{E}_t$ nella (4.18) con la normale alla possibile direzione di discontinuità $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q} - \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}}{\bar{H}} \tag{4.51}$$

$\mathbf{Q}=\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{N}$ indica il tensore acustico elastico ed $\mathbf{a}=-\mathbf{N}\cdot\bar{\mathbf{m}}$, $\mathbf{b}=\bar{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{N}$ sono i 'traction vectors'. Si ricordi che nel caso associato $\mathbf{m}=\mathbf{n}$ o $\bar{\mathbf{m}}=-\bar{\mathbf{n}}$, si ha $\mathbf{b}=\mathbf{a}$. Come per la precedente analisi della rigidezza tangente è possibile ottenere lo spettro di $\mathbf{Q}_t$ nel caso di operatori elastici in forma isotropa e la condizione forte di localizzazione usando le autosoluzioni di modifiche di rango due della matrice identità.

Per l'analisi di localizzazione preferiamo presentare in precedenza la derivazione della condizione di localizzazione utilizzando l'Eq. (4.36). Infatti il problema agli autovalori generalizzato $\mathbf{Q}_t\cdot\mathbf{x}=\omega^*\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}$ è l'autoproblema per una modifica di rango uno della matrice identità, poiché $\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{Q}_t=\mathbf{i}_2-\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}/\bar{H}$. Quindi in accordo coi risultati ottenuti per modifiche di rango uno risulta:

$$\omega_1^* = \omega_2^* = 1 \qquad \omega_3^* = 1 - \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}}{\bar{H}} \tag{4.52}$$

La condizione di localizzazione relativa all'annullamento del determinante normalizzato $q=0$, fornisce il valore critico del parametro di 'hardening' necessario per rovina discontinua in una data direzione $\mathbf{N}$:

$$q = \frac{det[\mathbf{Q}_t]}{det[\mathbf{Q}]} = 1 - \left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}}{\bar{H}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{H}^{\mathrm{N}}_{df} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a} \tag{4.53}$$

Questo risultato coincide con le conclusioni di Ottosen and Runesson-1991a per materiali elastoplastici e con le derivazioni presentate nel Capitolo 3 per materiali con perdita di rigidezza elastica.

La condizione forte di stazionarietà della velocità di propagazione d'onda $\rho c^2=0$ (ρ è la densità di massa e c è la velocità d'onda) riguarda le proprietà spettrali di $\mathbf{Q}_t^s$. In tal caso possiamo utilizzare i risultati per modifiche di rango due di matrici identità. Infatti,

$$\mathbf{Q}_t^s = \mathbf{Q} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}}{\bar{H}} + \frac{\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}}{\bar{H}}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{Q}_t^s = \mathbf{i}_2 - \frac{1}{2}\frac{\tilde{\mathbf{a}}\otimes\mathbf{b}}{\bar{H}} - \frac{1}{2}\frac{\tilde{\mathbf{b}}\otimes\mathbf{a}}{\bar{H}} \tag{4.54}$$

dove $\tilde{\mathbf{a}}=\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{b}}=\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b}$. Dalla formula di perturbazione (4.38), si procede in modo analogo a quanto fatto per l'Eq. (4.48) ottenendo

$$q_s = \frac{det[\mathbf{Q}_t^s]}{det[\mathbf{Q}]} = 1 - \left(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}}{\bar{H}}\right) - \left(\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a})^2}{4\,\bar{H}^2}\right) \tag{4.55}$$

Utilizzando gli stessi argomenti della dimostrazione $H_{scf}\geq 0$ possiamo dire che il termine addizionale tra parentesi nell'Eq. (4.55) è positivo o nullo e fornisce un ulteriore contributo negativo rispetto all'Eq. (4.53), destabilizzando q verso lo zero. Ne risulta che $d^2W_{loc}=0$ è una condizione di localizzazione piú restrittiva di $det[\mathbf{Q}_t]=0$, in accordo con le diseguaglianze di Bromwich. Nel caso associato $\mathbf{b}=\mathbf{a}$, l'ulteriore termine in parentesi si annulla e le due condizioni coincidono come del resto atteso.

L'annullamento del determinante si traduce nella soluzione di un'equazione di secondo grado le cui radici sono

$$\bar{H}_{1,2} = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}) \pm \sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{b})}\,\right] \tag{4.56}$$

La seconda soluzione appartiene al regime "subcritico" di 'softening', mentre la prima risulta positiva e quindi accettabile: $\bar{H}^{\mathrm{N}}{}_{sdf}=\bar{H}_1\geq\bar{H}^{\mathrm{N}}{}_{df}$. Come commento si può notare che entrambe le condizioni di localizzazione possono innescarsi nel regime di 'hardening', poiché $H^{\mathrm{N}}{}_{df}=\bar{H}^{\mathrm{N}}{}_{df}-\mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{m}$ può essere positivo, negativo o nullo anche per un $\bar{H}^{\mathrm{N}}{}_{df}$ positivo.

Si noti che le condizioni di localizzazione (4.53), (4.55) possono essere direttamente confrontate con le condizioni duali di rovina diffusa definendo il tensore del 4^o ordine $\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$ che rappresenta una "proiezione" della rigidezza elastica nella direzione $\mathbf{N}$:

$$\boxed{\mathbf{E}^{\mathrm{N}} = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{N})\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}) = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{N})\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{N})^{-1}\cdot(\mathbf{N}\cdot\mathbf{E})} \tag{4.57}$$

Il tensore $\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$ possiede tutte le consuete simmetrie di indici se il tensore acustico elastico è simmetrico (ciò accade nel caso di elasticità isotropa, come si nota dall'Eq. (4.61) sottostante) e soddisfa identicamente la relazione $\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{E}^{\mathrm{N}}{\cdot}\mathbf{N}=\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{E}{\cdot}\mathbf{N}=\mathbf{Q}$. Poiché l'inverso del tensore acustico elastico è definito positivo, si può affermare che il tensore $\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$ è semidefinito positivo. Infatti la forma quadratica ad esso associata per un generico tensore $\mathbf{x}$, $(\mathbf{x}{:}\mathbf{E}{\cdot}\mathbf{N}){\cdot}\mathbf{Q}^{-1}{\cdot}(\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{E}{:}\mathbf{x})\geq 0$, è positiva o nulla nel caso i vettori in parentesi siano identicamente nulli.

A seguito dell'introduzione di $\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$, l'indice di localizzazione (4.55) si può scrivere come

$$\boxed{q_s = 1 - \left(\frac{\mathbf{n}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{m}}{\bar{H}}\right) - \left(\frac{(\mathbf{n}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{n})(\mathbf{m}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{m}) - (\mathbf{n}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{m})^2}{4\,\bar{H}^2}\right)} \tag{4.58}$$

dove nel caso dell'indice debole q si considera solo il primo termine tra parentesi. L'Eq. (4.58) si può paragonare piú facilmente con i risultati precedenti circa l'indice di rovina diffusa (4.48) ed è rappresentabile in modo analogo a quanto mostrato in Fig. 4.1. I parametri critici di incrudimento necessari per localizzazione nella direzione definita da $\mathbf{N}$ risultano:

$$\boxed{\begin{aligned} H^{\mathrm{N}}{}_{df} &= \mathbf{n}:(\mathbf{E}^{\mathrm{N}}-\mathbf{E}):\mathbf{m} \\ H^{\mathrm{N}}{}_{sdf} &= H^{\mathrm{N}}{}_{df} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{(\mathbf{n}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{n})\,(\mathbf{m}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{m})} - \mathbf{n}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{m}\right) \geq H^{\mathrm{N}}{}_{df} \end{aligned}} \tag{4.59}$$

Questi valori sono da paragonarsi direttamente con le espressioni (4.50) relative a rovina continua. Si noti che $H^{\mathrm{N}}{}_{df}$ può essere positivo, nullo o negativo a secondo del segno della forma bilineare $\mathbf{n}$:($\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$–$\mathbf{E}$):$\mathbf{m}$. Nel caso associato, poiché la perdita di stabilità in piccolo è condizione necessaria per ogni tipo di biforcazione, si deve avere $\mathbf{n}{:}\mathbf{E}^{\mathrm{N}}{:}\mathbf{n} \leq \mathbf{n}{:}\mathbf{E}{:}\mathbf{n}$. Il primo innesco di localizzazione (debole) si ottiene massimizzando il parametro di 'hardening' $H^{\mathrm{N}}{}_{df}$ al variare di $\mathbf{N}$ con il vincolo $\|\mathbf{N}\|=1$ e si può determinare per mezzo della condizione di stazionarietà

$$\frac{\partial(\mathbf{n} : \mathbf{E}^{\mathrm{N}} : \mathbf{m})}{\partial \mathbf{N}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N}_{df} \quad \Rightarrow \quad H_{df} \tag{4.60}$$

unita alla definizione negativa della matrice Hessiana $\partial^2(\mathbf{n}{:}\mathbf{E}^{\mathrm{N}}{:}\mathbf{m})/\partial\mathbf{N}\otimes\partial\mathbf{N}$. Ciò fornisce la direzione critica di localizzazione ed il parametro di 'hardening' necessario per rovina discontinua. In modo equivalente, un'altra procedura consiste nel minimizzare q al variare di $\mathbf{N}$ per $\bar{H}$ fissato ed in seguito considerare il possibile annullamento di tale valore minimo, $\tilde{q}=0$ (si veda l'Eq. (4.27)), ottenendo il medesimo risultato.

Se la rigidezza elastica ha il formato isotropo $\mathbf{E}=2\mu\mathbf{i}_4^s+\lambda\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2$ risulta immediato esplicitare le espressioni del tensore acustico elastico e del suo inverso, il quale si ottiene usando la formula di Sherman and Morrison-1950 (si veda il Capitolo 2):

$$\mathbf{Q} = \mu\, \mathbf{i}_2 + (\lambda+\mu)\, \mathbf{N}\otimes\mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{\mu}\, \mathbf{i}_2 - \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\, \mathbf{N}\otimes\mathbf{N} \tag{4.61}$$

In questo caso si può espandere la "proiezione" di rigidezza elastica (4.57) come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathrm{N}} = {} & \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\, \mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2 + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\, (\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{N}\otimes\mathbf{N} + \mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\otimes\mathbf{i}_2) + \mu\, \mathbf{N}\otimes\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{N} + \\ & + \mu\, (\mathbf{i}_2 \,{}^{14}\!\otimes^{23} (\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}) + \mathbf{i}_2 \,{}^{13}\!\otimes^{24} (\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}) + \mathbf{i}_2 \,{}^{24}\!\otimes^{13} (\mathbf{N}\otimes\mathbf{N})) + \\ & - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\, \mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}\end{aligned} \tag{4.62}$$

dove ${}^{ij}\!\otimes^{kl}$ indica un prodotto tensoriale esterno con la sequenza di indici indicata (ad es. $(\mathbf{i}_2 \,{}^{14}\!\otimes^{23}\, \mathbf{i}_2)_{ijkl}=\delta_{il}\delta_{jk}$). Si può verificare che $\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{E}^{\mathrm{N}}{\cdot}\mathbf{N}=\mathbf{Q}$.

Mediante l'espansione del prodotto $\mathbf{n}{:}\mathbf{E}^{\mathrm{N}}{:}\mathbf{m}$ ed introducendo la notazione $o_{\mathrm{N}}=\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{o}{\cdot}\mathbf{N}$ per la componente del tensore simmetrico del 2^o ordine $\mathbf{o}$ nella direzione $\mathbf{N}$, la condizione di localizzazione (4.53) fornisce

$$\begin{aligned}\bar{H}^{\mathrm{N}}_{df} = \mathbf{n} : \mathbf{E}^{\mathrm{N}} : \mathbf{m} \; = {} & \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\, tr[\mathbf{n}]tr[\mathbf{m}] + \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\, (tr[\mathbf{n}]m_{\mathrm{N}} + tr[\mathbf{m}]n_{\mathrm{N}}) + \\ & + 4\mu\, (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})_{\mathrm{N}} - 4\mu\, \frac{(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\, n_{\mathrm{N}}\, m_{\mathrm{N}}\end{aligned} \tag{4.63}$$

Poiché nel caso di condizioni di anelasticità isotrope, cioè dipendenti dai soli invarianti di sforzo (o di deformazione), i tensori $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$ possono essere sviluppati in serie di potenze fino al 2^o ordine di $\boldsymbol{\sigma}$ (od $\boldsymbol{\epsilon}$) (ad es. $\mathbf{n}=f_1[\boldsymbol{\sigma}]\mathbf{i}_2+f_2[\boldsymbol{\sigma}]\boldsymbol{\sigma}+f_3[\boldsymbol{\sigma}]\boldsymbol{\sigma}^2$ ed analogamente per $\mathbf{m}$), questa espressione fornisce l'interpretazione geometrica del criterio di localizzazione descritta nel

Capitolo 3. Il criterio di localizzazione si rappresenta con una curva del 4^o ordine nel piano di Mohr degli sforzi (o delle deformazioni).

La condizione di stazionarietà (4.60) si può espandere ulteriormente considerando che $\partial o^{\mathrm{N}}/\partial \mathbf{N}{=}2\mathbf{o}{\cdot}\mathbf{N}$ e differenziando la (4.63) rispetto ad $\mathbf{N}$, il che conduce alla soluzione del sistema lineare omogeneo seguente:

$$\left[\lambda(tr[\mathbf{n}]\,\mathbf{m} + tr[\mathbf{m}]\,\mathbf{n}) + 2(\lambda+2\mu)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}) - 2(\lambda+\mu)(m^{\mathrm{N}}\,\mathbf{n} + n^{\mathrm{N}}\,\mathbf{m})\right]\cdot\mathbf{N} = \mathbf{0} \qquad (4.64)$$

Al fine di ottenere lo spettro completo di $\mathbf{Q}_t$ nel caso di elasticità isotropa possiamo notare che il tensore di localizzazione è ottenuto come modifica di rango due di un tensore proporzionale al tensore identità del 2^o ordine:

$$\mathbf{Q}_t = \mu\,\mathbf{i}_2 + (\lambda+\mu)\,\mathbf{N}\otimes\mathbf{N} - \frac{\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}}{\bar{H}} = \mu\,\mathbf{i}_2 + \mathbf{U}_2 \qquad (4.65)$$

Quindi, grazie ai risultati di modifiche di rango due, l'autoproblema di $\mathbf{U}_2$ viene risolto ipotizzando un autovettore della forma $\mathbf{M}{=}\alpha_1\mathbf{N}{+}\alpha_2\mathbf{a}$, e risolvendo il corrispondente sistema lineare (4.33):

$$\begin{cases} (\lambda+\mu-u) \quad \alpha_1 \quad + \quad (\lambda+\mu)\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{a} \quad \alpha_2 = 0 \\ \dfrac{-\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}}{\bar{H}} \quad \alpha_1 \quad + \quad \left(\dfrac{-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\bar{H}} - u\right) \quad \alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad (4.66)$$

Gli autovalori di $\mathbf{U}_2$ sono ottenuti dall'Eq. (4.37):

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\left((\lambda+\mu) - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\bar{H}}\right) \pm \sqrt{\left((\lambda+\mu) + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\bar{H}}\right)^2 - 4\frac{(\lambda+\mu)}{\bar{H}}\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{a}\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}}\right) \qquad (4.67)$$

Gli autovalori del tensore di localizzazione $\mathbf{Q}_t$ sono quindi $\omega_{1,2}{=}\mu{+}u_{1,2}$ ed $\omega_3{=}\mu$. Ciò significa che una delle due velocità trasversali d'onda rimane immutata nel fenomeno dissipativo che avviene nel mezzo, mentre l'altra velocità di taglio e la velocità longitudinale vengono cambiate in relazione al grado di anisotropia indotto dal fenomeno anelastico. Gli autovalori elastici $\omega_1{=}\lambda+2\mu$, $\omega_2{=}\mu$ ed $\omega_3{=}\mu$ (proporzionali alle velocità di propagazione $\omega_i{=}\rho c_i^2$) si ritrovano per $\bar{H}{\to}\infty$.

La condizione di localizzazione $det[\mathbf{Q}_t]{=}0$ si ottiene dall'Eq. (4.67) quando l'autovalore minimo ω_2 si annulla per $u_2{=}{-}\mu$. Risolvendo rispetto ad $\bar{H}$ otteniamo il valore di 'hardening' necessario per localizzazione nella direzione individuata da $\mathbf{N}$,

$$\bar{H}^{\mathrm{N}}_{df} = \frac{(\lambda+2\mu)\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - (\lambda+\mu)\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{a}\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}}{\mu(\lambda+2\mu)} \qquad (4.68)$$

il quale coincide con il risultato dell'Eq. (4.53) una volta introdotta l'espressione (4.61) del tensore isotropo $\mathbf{Q}^{-1}$.

Gli autovalori si possono anche scrivere utilizzando le (4.52) e (4.61) in forma analoga a quella presentata da Ottosen and Runesson-1991b:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\left((\lambda+3\mu)-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\bar{H}}\right) \pm \sqrt{\left((\lambda+3\mu)-\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\bar{H}}\right)^2 - 4\,\omega_3^*\,\mu\,(\lambda+2\mu)}\right) \tag{4.69}$$

Quando la condizione di localizzazione viene attivata per $\omega_3^*{=}0$, si ha $\omega_1{=}(\lambda{+}3\mu){-}\mathbf{a}{\cdot}\mathbf{b}/\bar{H}^{\mathrm{N}}{}_{df}$ ed $\omega_2{=}0$ (o viceversa a secondo del segno del termine tra parentesi). Nel regime di post-biforcazione $\omega_3^*{<}0$, cioè per $\bar{H}{<}\bar{H}^{\mathrm{N}}{}_{df}$, gli autovalori sono reali. L'eventualità di autovalori complessi (*'flutter instability'*) per $\omega_3^*{>}0$, cioè nel regime pre-biforcativo $\bar{H}{>}\bar{H}^{\mathrm{N}}{}_{df}$, la quale dipende dal segno degli argomenti nelle radici quadrate nelle Eq. (4.67) e (4.69), è esclusa in un caso associato sufficientemente generale (Ottosen and Runesson-1991b) mentre è possibile avere autovalori negativi $\omega_2{=}\rho c_2^2{<}0$, corrispondenti a velocità di propagazione immaginarie (*'divergence instability'*).

Gli autovettori $\mathbf{M}_{1,2}{=}\alpha_1^{1,2}\mathbf{N}{+}\alpha_2^{1,2}\mathbf{a}$ del tensore di localizzazione corrispondenti ad $\omega_{1,2}$ si ottengono dalla soluzione del sistema (4.66) mediante sostituzione degli autovalori. Dalla prima equazione otteniamo

$$\frac{\alpha_1^{1,2}}{\alpha_2^{1,2}} = \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{a}\;\;(\lambda+\mu)}{\omega_{1,2}-(\lambda+2\mu)} \tag{4.70}$$

vale a dire risultati coincidenti con quelli forniti da Ottosen and Runesson-1991b nella loro Eq. (58).

In corrispondenza dell'innesco di localizzazione per $\omega_2{=}0$, l'autovettore $\mathbf{M}_2$ che caratterizza insieme ad $\mathbf{N}$ il modo di biforcazione si esprime come

$$\mathbf{M}_2 \div -\mathbf{N}\cdot\mathbf{a}\;\frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\mathbf{N}+\mathbf{a} \tag{4.71}$$

In genere il modo di localizzazione è di tipo misto se il vettore $\mathbf{M}_2$ non risulta allineato né con la direzione definita dal vettore $\mathbf{N}$ né con la direzione ad essa perpendicolare. Il Modo-I ($\mathbf{M}_2\|\mathbf{N}$) si ottiene quando risulta $\mathbf{a}\|\mathbf{N}$, mentre il Modo-II ($\mathbf{M}_2\perp\mathbf{N}$) si manifesta nel caso $\mathbf{a}\perp\mathbf{N}$. Poichè dalla definizione del vettore $\mathbf{a}$ ed a seguito della forma isotropa della rigidezza elastica $\mathbf{E}$ ricaviamo

$$\mathbf{a} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{E}:\mathbf{m} = \lambda\,tr[\mathbf{m}]\;\mathbf{N}+2\mu\;\mathbf{m}\cdot\mathbf{N} \qquad \mathbf{N}\cdot\mathbf{a} = \lambda\,tr[\mathbf{m}]+2\mu\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{N} \tag{4.72}$$

possiamo concludere che se $\mathbf{N}$ è allineato con una delle direzioni principali di $\mathbf{m}$ oppure se $\mathbf{m}$ è puramente volumetrico il modo di localizzazione è di pura decoesione (Modo-I). Se $\mathbf{m}$ è puramente deviatorico, la localizzazione con Modo-II si ottiene solo quando la direzione $\mathbf{N}$ risulta perpendicolare alla direzione di taglio, in modo tale che $m_{\mathrm{N}}{=}0$.

4.5 Analisi degli operatori tangenti nel caso bidissipativo: plasticità con degradazione di rigidezza elastica

L'operatore tangente di un materiale bidissipativo elastoplastico con degradazione di rigidezza elastica (4.17) ed il relativo tensore di localizzazione (4.26) si esprimono mediante due modifiche di rango uno degli operatori elastici. Usando i risultati di modifiche di rango due della matrice identità si possono quindi studiare le condizioni di singolarità deboli della rigidezza tangente e del relativo tensore di localizzazione.

4.5.1 Condizione di punto limite

La condizione di punto limite (stazionarietà dello stato di sforzo, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{0}$ per $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}=\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{cf}\neq\mathbf{0}$) si può scrivere utilizzando l'Eq. (4.38) per il tensore $\mathbf{E}^{-1}$:$\mathbf{E}_t$, ricavabile dall'espressione (4.17),

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E} + \bar{\mathbf{m}}^{\mathrm{D}} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}} + \bar{\mathbf{m}}^{\mathrm{P}} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{E}^{-1} : \mathbf{E}_t = \mathbf{i}_4^s - \mathbf{m}^{\mathrm{D}} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}} - \mathbf{m}^{\mathrm{P}} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}} \tag{4.73}$$

dove $\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}=(\bar{H}_{\mathrm{PP}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}-\bar{H}_{\mathrm{DP}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}})/det[\bar{\mathbf{H}}]$, $\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}}=(-\bar{H}_{\mathrm{PD}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}+\bar{H}_{\mathrm{DD}}\bar{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}})/det[\bar{\mathbf{H}}]$. Quindi dalla formula di perturbazione (4.38) otteniamo la condizione di punto limite seguente:

$$\boxed{e = \frac{det[\mathbf{E}_t]}{det[\mathbf{E}]} = (1 - \mathbf{m}^{\mathrm{D}} : \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}})(1 - \mathbf{m}^{\mathrm{P}} : \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}}) - (\mathbf{m}^{\mathrm{D}} : \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{P}})\,(\mathbf{m}^{\mathrm{P}} : \hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{D}}) = \frac{det[\mathbf{H}]}{det[\bar{\mathbf{H}}]} = 0} \tag{4.74}$$

La (4.74) è un'equazione implicita $e[H_{\mathrm{DD}}, H_{\mathrm{PP}}, H_{\mathrm{DP}}, H_{\mathrm{PD}}]$=0 nei parametri di 'hardening' $\mathbf{H}_{cf}$ necessari per rovina continua. La stazionarietà dello stato di sforzo si raggiunge quindi quando la matrice di incrudimento diventa singolare.

Nel caso in cui le matrici di 'hardening' siano simmetriche diviene possibile indagare l'eventualità che si manifesti un effetto irrigidente ('locking') della risposta incrementale. Infatti se la matrice $\mathbf{H}_c$ è definita positiva come lo è $\bar{\mathbf{H}}$, possiamo scrivere (Mirsky-1955):

$$det[\mathbf{H}] = det[\bar{\mathbf{H}} + \mathbf{H}_c] > det[\bar{\mathbf{H}}] + det[\mathbf{H}_c] > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{det[\mathbf{H}]}{det[\bar{\mathbf{H}}]} > 1 \tag{4.75}$$

In tal caso quindi, non solo la rigidezza tangente rimane definita positiva, ma mostra anche l'effetto 'locking' (misurato dal rapporto tra i determinanti di $\mathbf{E}_t$ ed $\mathbf{E}$) (si vedano le Fig. 4.3, 4.4). Si noti che in questo caso, per gli elementi diagonali di $\mathbf{H}_c$ avremmo $-\mathbf{n}^{(\alpha)}$:$\mathbf{E}$:$\mathbf{m}^{(\alpha)}>0$ (Fig. 4.3, 4.4).

D'altro canto, è immediato notare che nel caso associato, $\mathbf{H}_c=-\boldsymbol{n}$:$\mathbf{E}$:$\boldsymbol{n}$ è definita negativa, cioè tale che gli elementi diagonali sono negativi, $-\mathbf{n}^{(\alpha)}$:$\mathbf{E}$:$\mathbf{n}^{(\alpha)}<0$, mentre il determinante è positivo, $det[\mathbf{H}_c]>0$. La positività del determinante conferma le considerazioni deducibili dalla Fig. 4.2 che consentono di affermare $\mathbf{n}^{(\alpha)}$:$\mathbf{E}$:$\mathbf{n}^{(\alpha)}>|\mathbf{n}^{(\alpha)}$:$\mathbf{E}$:$\mathbf{n}^{(\beta)}|$. A seguito di queste argomentazioni appare ragionevole assumere che la matrice di 'softening' critico $\mathbf{H}_c$ sia definita negativa anche nel caso non associato pur se ciò non preclude in generale l'effetto 'locking' (Fig. 4.3, 4.4, 4.5), cosa che accade invece nel caso monodissipativo per $H_c<0$.

Nel caso di meccanismi indipendenti nello spazio degli sforzi, cioè tali da fornire una matrice di incrudimento $\mathbf{H}$ diagonale, la condizione di punto limite viene soddisfatta per H_{D}=0 oppure per H_{P}=0, cioè lungo gli assi del piano (H_{D}, H_{P}) (si veda la Fig. 4.3).

I valori ammissibili dei parametri di incrudimento devono rispettare la definizione positiva della matrice $\bar{\mathbf{H}}$, il che avviene nella regione di piano al di sopra dell'iperbole in Fig. 4.3, corrispondente alla condizione di singolarità

$$det[\bar{\mathbf{H}}] = H_{\text{D}}\ H_{\text{P}} + (\mathbf{n}^{\text{P}} : \mathbf{E} : \mathbf{m}^{\text{P}})\ H_{\text{D}} + (\mathbf{n}^{\text{D}} : \mathbf{E} : \mathbf{m}^{\text{D}})\ H_{\text{P}} + det[\mathbf{H}_c] = 0 \tag{4.76}$$

La retta inclinata e=1

$$(\mathbf{n}^{\text{P}} : \mathbf{E} : \mathbf{m}^{\text{P}})\ H_{\text{D}} + (\mathbf{n}^{\text{D}} : \mathbf{E} : \mathbf{m}^{\text{D}})\ H_{\text{P}} + det[\mathbf{H}_c] \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e \geq 1 \tag{4.77}$$

in Fig. 4.3 definisce il semipiano in cui $e\geq 1$ e l'area in grigio indica la regione del terzo quadrante dove l'effetto di 'locking' è possibile, persino nel caso di matrice $\mathbf{H}_c$ definita negativa.

Quando uno dei due processi dissipativi è ancora nel regime di incrudimento mentre l'altro ha già raggiunto la condizione di 'hardening' nullo, la condizione di punto limite viene attivata. Questo non sarebbe vero se uno solo dei due meccanismi fosse attivo. In altre parole, l'interazione dei due fenomeni crea da un lato un effetto destabilizzante e dall'altro un possibile effetto irrigidente nel regime di 'softening' intenso.

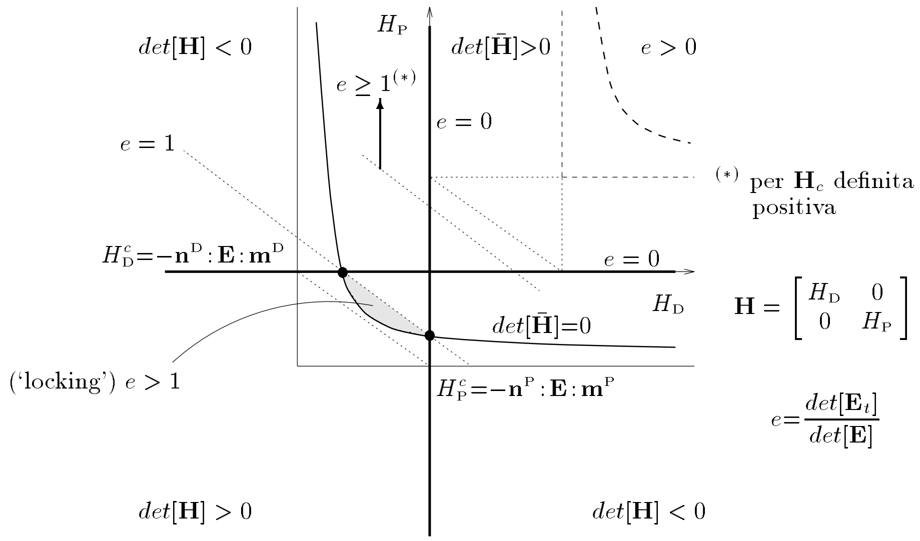


Figura 4.3: Indice di rovina diffusa per meccanismi indipendenti con $\mathbf{H}$ *diagonale.*

Nel caso totalmente disaccoppiato di meccanismi indipendenti nello spazio delle deformazioni, poiché la matrice $\bar{\mathbf{H}}$ risulta diagonale, la (4.74) si semplifica nell'espressione seguente:

$$
\begin{aligned}
e \;&=\; \left(1-\frac{\mathbf{m}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}}}{\bar{H}_{\mathrm{D}}}\right)\left(1-\frac{\mathbf{m}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}}}{\bar{H}_{\mathrm{P}}}\right)-\left(\frac{\mathbf{m}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}}}{\bar{H}_{\mathrm{P}}}\right)\left(\frac{\mathbf{m}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}}}{\bar{H}_{\mathrm{D}}}\right)\\
&=\; \frac{H_{\mathrm{D}}H_{\mathrm{P}}-(\mathbf{m}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}})\,(\mathbf{m}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}})}{(H_{\mathrm{D}}+\mathbf{m}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}})\,(H_{\mathrm{P}}+\mathbf{m}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}})}=0
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

Si riconosce che, se $\mathbf{H}_c$ è definita positiva, la condizione di punto limite non viene mai soddisfatta con comportamento di tipo 'locking'. Se invece $\mathbf{H}_c$ è definita negativa la singolarità di $\mathbf{E}_t$ può manifestarsi nel regime di 'hardening', come mostrato in Fig. 4.4 dove si è assunto che H^c_{DP} ed H^c_{PD} abbiano lo stesso segno (negativo). Il punto limite può essere raggiunto quando entrambi i processi sono ancora nel regime incrudente, per i valori dei parametri di 'hardening' appartenenti all'iperbole di equazione $H_{\mathrm{DD}}\,H_{\mathrm{PP}}{=}H^c_{\mathrm{DP}}\,H^c_{\mathrm{PD}}$. L'area in grigio in Fig. 4.4 indica la regione del piano dove l'effetto di 'locking' è possibile, anche per $\mathbf{H}_c$ definita negativa.

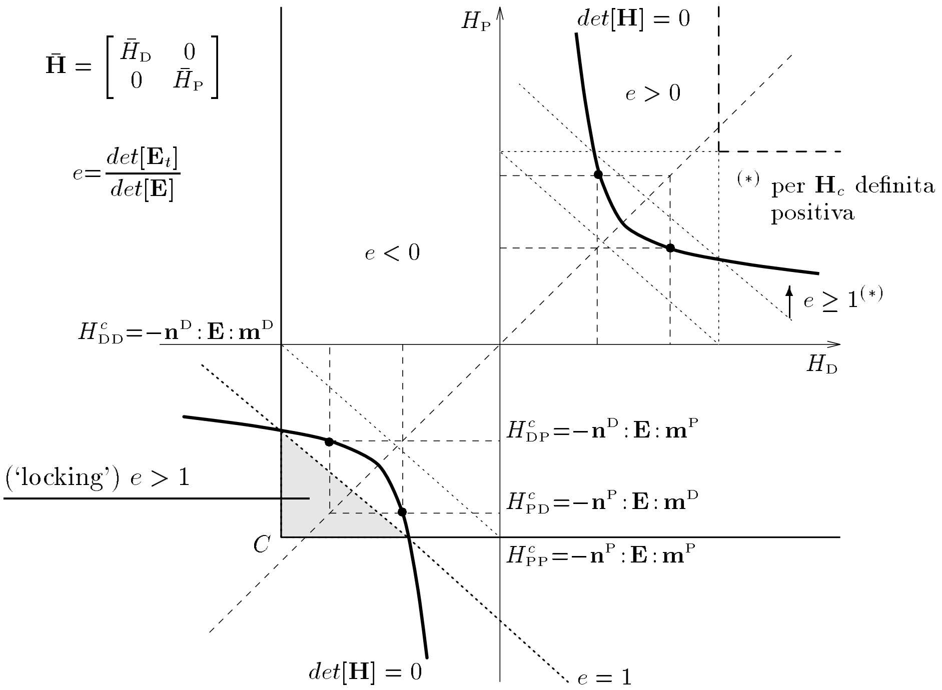


Figura 4.4: Indice di rovina diffusa per meccanismi indipendenti con $\bar{\mathbf{H}}$ diagonale.

Le stesse conclusioni si possono trarre nel caso associato rappresentato in Fig. 4.5a. Se $\mathbf{H}_c$ è indefinita, cioè con elementi diagonali negativi ma con determinante negativo o nullo $det[\mathbf{H}_c]{\leq}0$ è possibile escludere risposte 'locking'. In questo caso infatti il punto C appartiene al ramo inferiore dell'iperbole in Fig. 4.4 o rimane sopra di esso e l'indice e rimane negativo in tutti i punti del regime ammissibile $H_{\mathrm{DD}}{>}H^c_{\mathrm{DD}}$, $H_{\mathrm{PP}}{>}H^c_{\mathrm{PP}}$. L'Eq. (4.78) può essere infatti riscritta nel modo seguente:

$$\boxed{e = 1 - \frac{\mathbf{n}^{\mathrm{D}} : \mathbf{E} : \mathbf{m}^{\mathrm{D}}}{\bar{H}_{\mathrm{D}}} - \frac{\mathbf{n}^{\mathrm{P}} : \mathbf{E} : \mathbf{m}^{\mathrm{P}}}{\bar{H}_{\mathrm{P}}} - \frac{-det[\mathbf{H}_c]}{\bar{H}_{\mathrm{D}}\,\bar{H}_{\mathrm{P}}}} \tag{4.79}$$

Ciò mostra come $e<1$ per $\mathbf{n}^{(\alpha)}:\mathbf{E}:\mathbf{m}^{(\alpha)}>0$ e $det[\mathbf{H}_c]\leq 0$. Nel caso associato, poichè $det[\mathbf{H}_c]\geq 0$, per evitare il 'locking' $\mathbf{H}_c$ deve essere singolare, il che avviene ad es. quando $\mathbf{n}^{\mathrm{D}} \| \mathbf{n}^{\mathrm{P}}$. In questo caso e diminuisce monotonamente verso $-\infty$ come mostrato dalla Fig. 4.5b.

In conclusione, possiamo dire che l'interazione tra danno e plasticità anticipa il raggiungimento del punto limite della risposta complessiva rispetto al caso in cui fosse presente uno solo dei meccanismi anelastici dove la singolarità di $\mathbf{E}_t$ si raggiungerebbe per 'hardening' nullo. Tuttavia, nel regime di 'softening' per entrambi i meccanismi, il determinante della rigidezza tangente può raggiungere valori positivi e persino superare il valore elastico a meno che si prescriva un confine appropriato ai minimi valori di 'softening' ammissibili.

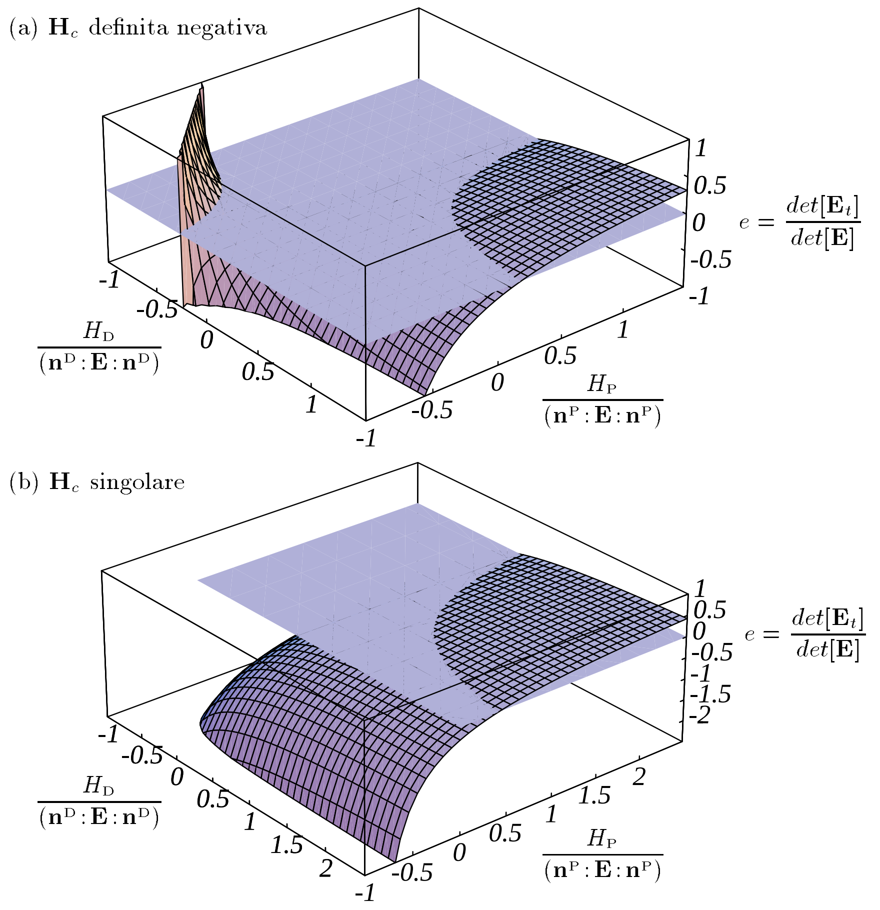


Figura 4.5: Rappresentazione-3D dell'indice di rovina diffusa nel caso associato disaccoppiato con $\bar{\mathbf{H}}$ diagonale.

4.5.2 Condizione di localizzazione

La condizione di localizzazione debole consegue dalla singolarità del tensore di localizzazione tangente e può essere trattata utilizzando la formula di perturbazione (4.38) per il tensore $\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{Q}_t$. Questo si ottiene dall'espressione (4.26) nel caso dei due meccanismi α=D, P,

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q} - \mathbf{a}^{\mathrm{D}} \otimes \mathbf{d}^{\mathrm{D}} - \mathbf{a}^{\mathrm{P}} \otimes \mathbf{d}^{\mathrm{P}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_t = \mathbf{i}_2 - \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{D}} \otimes \mathbf{d}^{\mathrm{D}} - \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{P}} \otimes \mathbf{d}^{\mathrm{P}} \tag{4.80}$$

dove $\mathbf{a}^\alpha$=$\mathbf{N}\cdot\mathbf{E}$:$\mathbf{m}^\alpha$ e $\mathbf{d}^\alpha$=$\bar{H}^{-1}_{\alpha\beta}\mathbf{n}^\beta$:$\mathbf{E}\cdot\mathbf{N}$ sono i 'traction vectors'. Possiamo quindi ricavare l'espressione dell'indice adimensionale di localizzazione q:

$$q = \frac{det[\mathbf{Q}_t]}{det[\mathbf{Q}]} = (1 - \mathbf{d}^{\mathrm{D}} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{D}})(1 - \mathbf{d}^{\mathrm{P}} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{P}}) - (\mathbf{d}^{\mathrm{D}} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{P}})(\mathbf{d}^{\mathrm{P}} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}^{\mathrm{D}}) \tag{4.81}$$

Ognuno dei termini $\mathbf{d}^\alpha\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\mathbf{a}^\beta$ si può scrivere in forma piú espressiva definendo le matrici seguenti. Sia $\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}$ una matrice analoga a quella di 'softening' critico ma relativa ad $\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$ anzichè ad $\mathbf{E}$, definita come $(\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}})_{\alpha\beta}$=$-\mathbf{n}^\alpha$:$\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$:$\mathbf{m}^\beta$ ed $\mathbf{h}_c^{\mathrm{N}}$ una matrice di 'softening' adimensionale tale che $(\mathbf{h}_c^{\mathrm{N}})_{\alpha\beta}$=$\bar{H}^{-1}_{\alpha\gamma}\mathbf{n}^\gamma$:$\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$:$\mathbf{m}^\beta$. Si ricorda che nelle definizioni fatte, $\mathbf{E}^{\mathrm{N}}$ è il tensore "proiezione" del 4^o ordine definito in precedenza nell'Eq. (4.57). Se la rigidezza elastica è isotropa, i vari termini di $-\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}$ si possono esplicitare nel modo descritto dall'Eq. (4.63).

Siamo quindi in grado di affermare che l'indice di localizzazione q dipende dalle proprietà della matrice $\mathbf{h}_c^{\mathrm{N}}$ appena definita in quanto può scriversi come

$$q = 1 - \mathbf{h}_{c\ \mathrm{DD}}^{\mathrm{N}} - \mathbf{h}_{c\ \mathrm{PP}}^{\mathrm{N}} - (-det[\,\mathbf{h}_c^{\mathrm{N}}]) \tag{4.82}$$

In generale non è possibile escludere a priori l'eventualità che sia $q{\geq}1$. In tal caso si ottiene un aumento delle velocità di propagazione nel mezzo anelastico rispetto al caso elastico (nel senso globale del determinante). In altre parole può manifestarsi una *"accelerazione"* della propagazione ondosa dovuto ad un irrigidimento del solido. L'effetto di "accelerazione" non è di alcun interesse nell'analisi di localizzazione se si manifesta dopo la prima insorgenza di localizzazione, cioé se q ritorna positivo e maggiore di uno dopo essersi annullato durante la storia di carico.

Nel caso totalmente disaccoppiato di meccanismi indipendenti nello spazio delle deformazioni, nel quale la matrice di 'hardening' $\bar{\mathbf{H}}$ è diagonale, le espressioni (4.81), (4.82) di q si semplificano notevolmente:

$$\boxed{q = 1 - \frac{\mathbf{n}^{\mathrm{D}} : \mathbf{E}^{\mathrm{N}} : \mathbf{n}^{\mathrm{D}}}{\bar{H}_{\mathrm{D}}} - \frac{\mathbf{n}^{\mathrm{P}} : \mathbf{E}^{\mathrm{N}} : \mathbf{n}^{\mathrm{P}}}{\bar{H}_{\mathrm{P}}} - \frac{-det[\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}]}{\bar{H}_{\mathrm{D}}\,\bar{H}_{\mathrm{P}}}} \tag{4.83}$$

Le proprietà della matrice $\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}$ governano la destabilizzazione di q dal valore unitario verso il valore nullo. Se la matrice $\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}$ è definita positiva, la localizzazione viene esclusa e $q{\geq}1$. Se $\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}$ è definita negativa, la singolarità di $\mathbf{Q}_t$ è possibile, ma l'effetto di "accelerazione" non può essere escluso a priori, a meno di limitarsi a valori di 'softening' appropriati. Se $\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}$

è indefinta in segno, nel senso che i suoi elementi diagonali rimangono negativi ma il suo determinante diviene negativo o nullo, $det[\mathbf{H}_c^{\text{N}}]\leq 0$, l'effetto spurio di "accelerazione" non è possibile in quanto $q<1$.

4.6 Esempio bidissipativo: plasticità di von Mises combinata a danno scalare

Come esempio di applicazione delle derivazioni precedenti, valide per un caso comunque generale di materiale elastoplastico con perdita di rigidezza elastica, si considera il seguente modello costitutivo. Il meccanismo di scorrimento plastico è governato da una condizione di plasticità di von Mises con relativa legge di flusso associata per l'incremento di deformazioni plastiche. La degradazione di rigidezza viene descritta dal modello di danno scalare in forma associata presentato nel Capitolo 3 (Carol et al.-1994a,b). Le varie componenti dei tensori elastici di rigidezza e cedevolezza si trasformano con lo stesso fattore moltiplicativo $(1-D)$, nella forma $\mathbf{E}=(1-D)\mathbf{E}_o$, $\mathbf{C}=\mathbf{C}_o/(1-D)$. D indica la variabile di danno $0\leq D<1$, il cui valore corrente dipende dalla storia pregressa attraverso l'accumulo di λ_{D}.

Le due condizioni di carico si definiscano nello spazio delle tensioni per un caso genericamente accoppiato in cui entrambe le funzioni di soglia s_{D}, s_{P} dipendano dall'accumulo dei due moltiplicatori anelastici:

$$F_{\text{D}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} - s_{\text{D}}[\lambda_{\text{D}},\lambda_{\text{P}}] = 0\ ; \qquad F_{\text{P}} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}_d : \boldsymbol{\sigma} - s_{\text{P}}[\lambda_{\text{D}},\lambda_{\text{P}}] = 0 \tag{4.84}$$

$\mathbf{C}_d$ rappresenta la parte deviatorica della cedevolezza elastica corrente secondo la decomposizione spettrale (si veda il Capitolo 2):

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_v + \mathbf{C}_d = \frac{1}{3K}\,\mathbf{P}_v + \frac{1}{2\mu}\,\mathbf{P}_d\ ; \qquad \mathbf{P}_v = \frac{1}{3}\,\mathbf{i}_2\otimes\mathbf{i}_2\ ;\ \ \mathbf{P}_d = \mathbf{i}_4^s - \mathbf{P}_v \tag{4.85}$$

Quindi $C_v=1/3K$, $C_d=1/2\mu$, in cui K e μ sono i moduli elastici correnti di volume e taglio. Gli operatori di proiezione $\mathbf{P}_v$, $\mathbf{P}_d$ estraggono rispettivamente la parte volumetrica e deviatorica di un tensore del 2^o ordine (Neilsen and Schreyer-1993). Conseguentemente, si ha $\mathbf{C}_d$:$\boldsymbol{\sigma}$=$C_d\,\boldsymbol{\sigma}_d$ e $\boldsymbol{\sigma}$:$\mathbf{C}_d$:$\boldsymbol{\sigma}$=$C_d\,\boldsymbol{\sigma}_d$:$\boldsymbol{\sigma}_d$, cioè si ottiene effettivamente una condizione di plasticità dipendente dal solo invariante secondo del deviatore degli sforzi. Poichè le leggi di scorrimento sono associate, le "direzioni" degli incrementi ('rates') di deformazione anelastica coincidono con i gradienti delle condizioni di carico, ottenibili per derivazione delle (4.84),

$$\mathbf{m}^{\text{D}} = \mathbf{n}^{\text{D}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma} = C_v\ \boldsymbol{\sigma}_v + C_d\ \boldsymbol{\sigma}_d\ ; \qquad \mathbf{m}^{\text{P}} = \mathbf{n}^{\text{P}} = \mathbf{C}_d : \boldsymbol{\sigma} = C_d\ \boldsymbol{\sigma}_d \tag{4.86}$$

La matrice di 'softening' critico si esplicita quindi nel modo seguente:

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{n}^{\text{D}}\!:\!\mathbf{E}\!:\!\mathbf{n}^{\text{D}} & -\mathbf{n}^{\text{D}}\!:\!\mathbf{E}\!:\!\mathbf{n}^{\text{P}} \\ -\mathbf{n}^{\text{P}}\!:\!\mathbf{E}\!:\!\mathbf{n}^{\text{D}} & -\mathbf{n}^{\text{P}}\!:\!\mathbf{E}\!:\!\mathbf{n}^{\text{P}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_v\ \boldsymbol{\sigma}_v\!:\!\boldsymbol{\sigma}_v + C_d\ \boldsymbol{\sigma}_d\!:\!\boldsymbol{\sigma}_d) & -C_d\ \boldsymbol{\sigma}_d\!:\!\boldsymbol{\sigma}_d \\ -C_d\ \boldsymbol{\sigma}_d\!:\!\boldsymbol{\sigma}_d & -C_d\ \boldsymbol{\sigma}_d\!:\!\boldsymbol{\sigma}_d \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

Possiamo affermare che $\mathbf{H}_c$ è semidefinita negativa poiché i suoi elementi diagonali sono negativi o nulli, mentre il suo determinante è positivo o nullo: $det[\mathbf{H}_c]$=$(C_v\ \boldsymbol{\sigma}_v$:$\boldsymbol{\sigma}_v)(C_d\ \boldsymbol{\sigma}_d$:$\boldsymbol{\sigma}_d)\geq 0$.

Il determinante si annulla solo se il tensore di sforzo appartenente alle condizioni di carico (4.84) risulta puramente volumetrico o puramente deviatorico, od anche nel caso di incomprimibilità elastica (C_v=0 per ν=0.5). In questi casi l'effetto 'locking' ($e \geq 1$) della rigidezza tangente viene escluso. L'analisi dell'indice di localizzazione si può esplicitare nei casi semplici di meccanismi di incrudimento totalmente disaccoppiati in cui la matrice di 'hardening' $\bar{\mathbf{H}}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_c$ risulta diagonale. Questa circostanza è possibile quando s_{D} ed s_{P} siano definite in modo tale per cui la matrice di 'hardening' $\mathbf{H}$ contenga i termini extra diagonali di $\mathbf{H}_c$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{\mathrm{D}} & -\mathbf{n}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}} \\ -\mathbf{n}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}} & H_{\mathrm{P}} \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

Ciò corrisponde al caso di meccanismi accoppiati a meno che lo stato di sforzo non nullo sia puramente volumetrico. L'indice adimensionale di localizzazione (4.83) si può riscrivere come

$$q = 1 - \frac{\mathbf{n}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}}/\mathbf{n}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}}}{(1+h_{\mathrm{D}})} - \frac{\mathbf{n}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}}/\mathbf{n}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}}}{(1+h_{\mathrm{P}})} - \frac{-det[\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}]}{(1+h_{\mathrm{D}})(1+h_{\mathrm{P}})} \tag{4.89}$$

definendo i parametri di 'hardening' normalizzati h_{D}, h_{P} in modo che $h_{\mathrm{D}}=H_{\mathrm{D}}/\mathbf{n}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}}$, $h_{\mathrm{P}}=H_{\mathrm{P}}/\mathbf{n}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}}$. Per rispettare l'assunta positività di $\bar{\mathbf{H}}$, tali variabili devono essere ≥ -1.

I risultati dell'analisi di localizzazione nel caso di tensione monoassiale sono illustrati nelle Fig. 4.6, 4.7. Le possibili direzioni di localizzazione formano un cono di rotazione attorno all'asse di carico, individuato dall'angolo θ tra l'asse stesso e la normale $\mathbf{N}$ alla possibile superficie di discontinuità. Possiamo paragonare questi risultati con quelli presentati nei Capitoli 2 e 3, in cui solo il meccanismo plastico di von Mises oppure il meccanismo di danno scalare sono attivi. Per plasticità di von Mises, nel caso di tensione monoassiale in 3D, l'innesco di localizzazione è possibile solo per pronunciati valori di 'softening', mentre per danno scalare la localizzazione si manifesta al punto limite di incrudimento nullo. In entrambi i casi le direzioni critiche ove q possiede un minimo locale dipendono dal coefficiente di contrazione trasversale di Poisson. Quando i due meccanismi sono attivi simultaneamente, la localizzazione avviene prima. Nelle Fig. 4.6, 4.7 la scelta dei parametri di 'hardening' è stata ristretta al percorso diagonale $h_{\mathrm{D}}=h_{\mathrm{P}}$ nel piano di incrudimento (h_{D},h_{P}). La Fig. 4.6 mostra chiaramente l'effetto destabilizzante dell'accoppiamento tra i due meccanismi poichè l'innesco di localizzazione si origina quando entrambi i meccanismi sono ancora nel regime di 'hardening'. L'andamento dell'indice q ed in particolare la posizione dei minimi locali varia in funzione del coefficiente di Poisson (Fig. 4.6) e dello stato di incrudimento raggiunto (Fig. 4.7).

L'effetto di "accelerazione" non è stato mostrato in Fig. 4.7 dove si sono considerati valori di 'softening' soddisfacenti la limitazione $h_{\mathrm{D}} \geq -0.9$. Tale effetto è tuttavia possibile. Infatti la Fig. 4.8 rappresenta le quantità adimensionali che compaiono nell'Eq. (4.89) nel caso di tensione monoassiale. Tutte le quantità $\mathbf{n}^{\mathrm{D}}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{n}^{\mathrm{D}}$, $\mathbf{n}^{\mathrm{P}}:\mathbf{E}^{\mathrm{N}}:\mathbf{n}^{\mathrm{P}}$, $det[\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}]$ sono positive o nulle. Poichè $det[\mathbf{H}_c^{\mathrm{N}}]$ non si annulla identicamente (a meno che ν=0.5), l'effetto di "accelerazione" nasce avvicinandosi ai valori limite di 'softening' ammissibile nel piano di incrudimento, dove i termini che compaiono a denominatore nell'Eq. (4.89) diventano preponderanti.

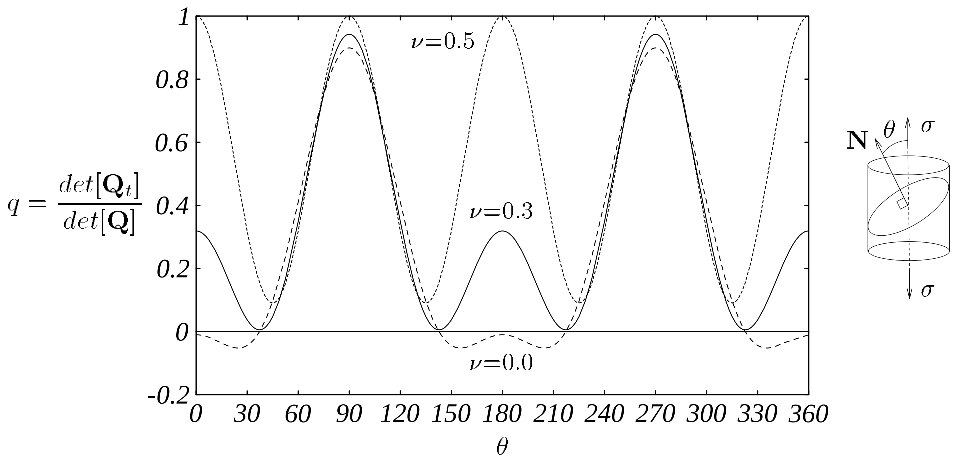


Figura 4.6: Effetto del coef. di Poisson sull'indice di rovina q per h_D=h_P=0.65 in tensione monoassiale.

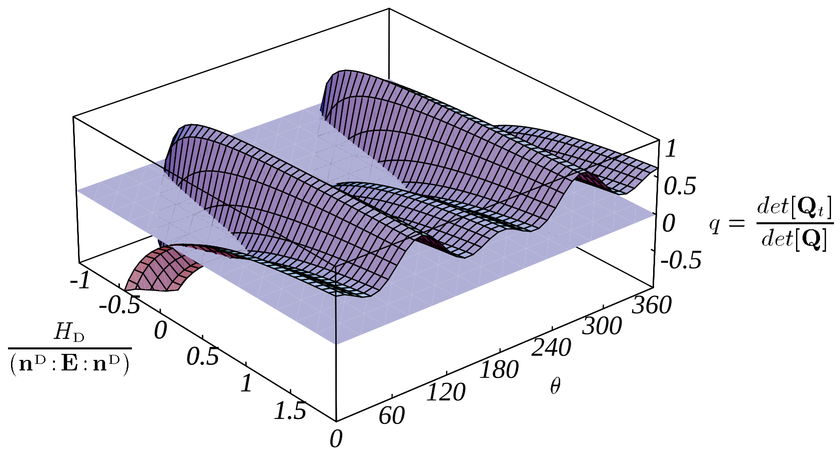


Figura 4.7: Indice di localizzazione lungo il percorso h_D=h_P in tensione monoassiale (ν=0.3).

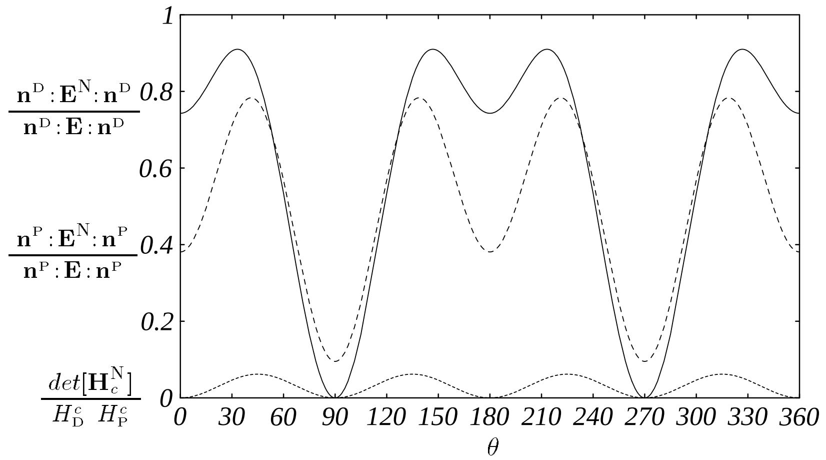


Figura 4.8: Misure delle forme quadratiche associate ad $\mathbf{E}^N$ in tensione monoassiale (ν=0.3).

Anche nel caso di taglio puro si traggono conclusioni analoghe circa l'effetto destabilizzante della combinazione di plasticità e danneggiamento (Fig. 4.9, 4.10). La localizzazione è possibile quando entrambi i meccanismi sono nel regime incrudente per $h_{\rm D}{=}h_{\rm P}{=}1$, mentre nei casi di von Mises (si veda il Capitolo 2) oppure di danno scalare (si veda il Capitolo 3) ciò avverrebbe per incrudimento nullo. La posizione dei minimi locali non è influenzata né dal coefficiente di Poisson né dallo stato di incrudimento. Entrambi gli effetti irrigidenti di $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{Q}_t$ non possono manifestarsi poichè per taglio puro risulta $det[\mathbf{H}_c]{=}det[\mathbf{H}_c^{\rm N}]{\equiv}0$.

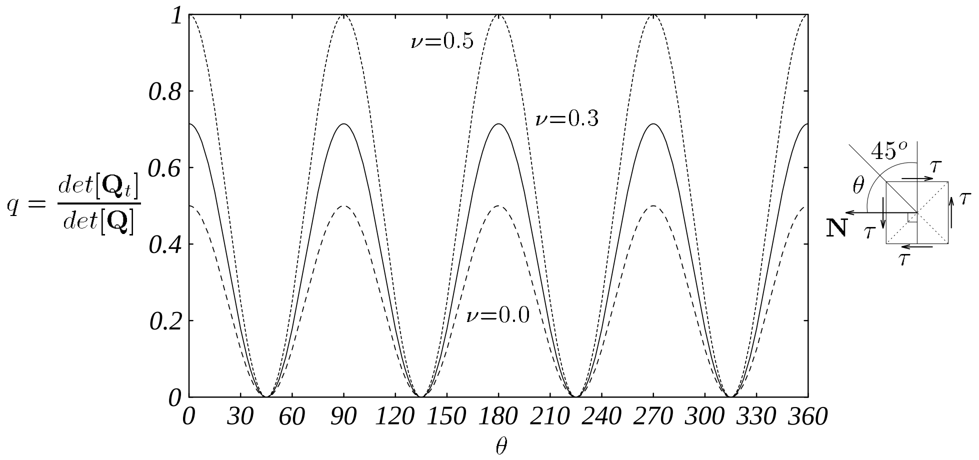


Figura 4.9: Effetto del coef. di Poisson sull'indice q per $h_{\rm D}{=}h_{\rm P}{=}1$ in taglio puro.

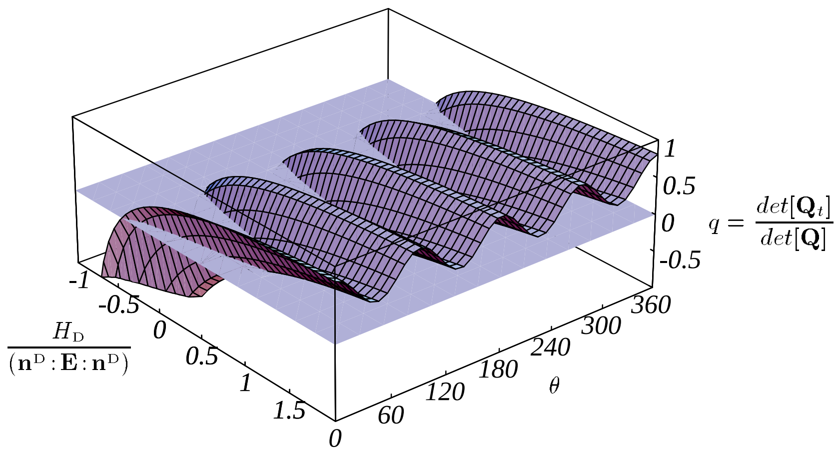


Figura 4.10: Indice di localizzazione lungo il percorso $h_{\rm D}{=}h_{\rm P}$ in taglio puro (ν=0.3).

4.7 Considerazioni conclusive

Nel caso di materiali multidissipativi, ad es. per materiali elastoplastici a multipotenziale o per materiali elastoplastici con perdita di rigidezza elastica, nasce l'esigenza di studiare il possibile innesco di fenomeni instabili al livello costitutivo. In altre parole risulta spontaneo estendere al caso piú complesso dei materiali sopra citati le analisi sulla perdita di stabilità in piccolo e di ellitticità, estesamente trattate nel caso di materiali con un unico processo anelastico. Rispetto allo studio dell'instabilità costitutiva classica, l'analisi agli autovalori degli operatori tangenti risulta maggiormente complessa in quanto gli operatori sono ottenuti come modifiche multiple di rango uno degli operatori elastici, invece che con una sola modifica come nel caso classico. Sembra spontaneo aspettarsi la destabilizzazione degli operatori a causa dell'aggiunta di ulteriori termini di rango uno, congettura che è stata qui dimostrata da un'analisi matematica rigorosa.

In questo capitolo della tesi l'analisi degli indici di rovina per tali materiali a meccanismi dissipativi multipli è stata presentata risolvendo il problema agli autovalori per modifiche multiple di rango uno della matrice identità. Ciò consente di ricavare le autosoluzioni numericamente, per un numero generico di modifiche ed in forma chiusa, nel caso $n \leq 4$. Le soluzioni in forma chiusa sono state esplicitate nel caso di modifiche di rango uno e rango due della matrice identità in termini di autovalori, autovettori, e determinante. Questi risultati sono stati utilizzati per ripresentare in modo chiaro e compatto le analisi di instabilità costitutive nel caso dei materiali monodissipativi oggetto dei capitoli precedenti e di fornirle per materiali bidissipativi con plasticità abbinata a perdita di rigidezza elastica. In particolare, l'espressione del determinante di modifiche di rango due fornisce uno strumento semplice ed immediato per l'analisi delle singolarità costitutive dei relativi operatori tangenti.

La riformulazione delle analisi di singolarità oggetto dei Capitoli 2 e 3 è stata presentata alla luce dei nuovi risultati che contribuiscono a comprendere le relazioni tra i due indici di rovina diffusa e localizzata. Gli indici di rovina sono stati analizzati per forme generali delle leggi costitutive e nel dettaglio per l'esempio di plasticità di von Mises combinata a danno scalare in tensione monoassiale e taglio puro. Le conclusioni attese circa l'effetto destabilizzante della sovrapposizione dei meccanismi dissipativi sono state dimostrate. In particolare, sia la condizione di punto limite che quella di localizzazione possono essere raggiunte già nel regime incrudente, dove nel caso di un solo meccanismo attivo gli operatori tangenti rimarrebbero definiti positivi. Sono tuttavia presenti anche degli effetti spuri di irrigidimento della risposta incrementale e di aumento della velocità di propagazione nel caso di valori di 'softening' molto pronunciati e vicini ai valori critici ammissibili. Tali effetti possono comunque essere esclusi dalla modellazione assumendo un confine appropriato per i parametri di 'softening'. Nell'esempio trattato si è mostrata la dipendenza delle condizioni critiche di localizzazione dal coefficiente di contrazione trasversale e dai valori dei parametri di 'hardening' in trazione monoassiale. Nel caso di taglio puro le direzioni critiche rimangono vincolate a 45^o rispetto alle direzioni principali di sforzo e non risultano influenzate dal grado di incrudimento.

I risultati ottenuti in questo capitolo sono da intendersi come preliminari nell'ambito di nuovi scenari di ricerca suscettibili di ulteriori sviluppi in diverse direzioni. In particolare, tra i molti aspetti che appaiono degni di ulteriore approfondimento, vi è quello del primo innesco di localizzazione. In effetti in tutto il capitolo si è ipotizzato come condizione piú svantaggiosa l'ulteriore carico anelastico di entrambi i meccanismi da ambo le parti della possibile superficie di discontinuità. Anche se questa è stata dimostrata essere la condizione piú critica nel caso di un unico moltiplicatore anelastico (Borré and Maier-1989, Ottosen and Runesson-1991a), non sembra immediato dimostrare lo sia anche nel caso di due o piú processi anelastici.

CAPITOLO 5

TECNICHE DI REGOLARIZZAZIONE DELLA RISPOSTA STRUTTURALE

La localizzazione delle deformazioni è normalmente associata alla formazione di discontinuità "deboli" delle deformazioni incrementali (o 'rates' del tensore di deformazione) attraverso una superficie di discontinuità che divide il continuo strutturale. L'analisi di localizzazione di cui si è trattato nei Capitoli 2, 3, 4, viene condotta al livello materiale senza considerare il problema strutturale al contorno. Il modello costitutivo incrementale è stato analizzato in relazione ai suoi indici di rovina. Tale analisi costitutiva fornisce indicazioni significative sul modo di collasso e le condizioni in cui esso può manifestarsi, informazioni che vanno sfruttate nella trattazione del problema strutturale vero e proprio.

La localizzazione dei fenomeni anelastici è prettamente un fenomeno strutturale e si manifesta in zone del corpo di dimensione limitata. La posizione ed ampiezza delle zone ove si concentra la dissipazione energetica dipendono dalla soluzione del problema strutturale al contorno mediante un metodo numerico di discretizzazione che riduce il sistema continuo ad un numero finito di gradi di libertà (si considera qui il metodo degli elementi finiti). Poichè all'insorgenza delle instabilità costitutive il problema al contorno perde la sua "buona posizione" in senso matematico, la soluzione numerica risulta in generale fortemente condizionata dalla discretizzazione adottata (*'mesh-sensitivity'*). Occorre quindi formulare delle *"tecniche di regolarizzazione"* al livello costitutivo o/e al livello degli elementi finiti che rendano la risposta strutturale oggettiva, cioè quantitativamente significativa sia al variare della densità della discretizzazione effettuata, sia nel cambiare la morfologia e topologia del reticolo rispetto alle direzioni di 'shear-banding'.

In questo capitolo si presenta anzitutto una breve rassegna delle tecniche di regolarizzazione, segnalando la varietà di approcci possibili al livello costitutivo e nell'ambito degli elementi finiti. Tali tecniche possono facilmente raggiungere un notevole grado di complessità qualora si debbano studiare nel dettaglio al fine di una implementazione in algoritmi risolutivi. Pertanto si ritiene opportuno sviluppare nel prosieguo del capitolo due proposte di regolarizzazione concettualmente semplici e di facile implementazione, anche con lo scopo di indagare possibili esiti al livello strutturale delle analisi costitutive elaborate nei capitoli precedenti della tesi.

La prima tecnica agisce sul livello costitutivo, introducendo la dipendenza dei parametri del materiale che regolano la pendenza del ramo 'softening' con la dimensione caratteristica della discretizzazione al fine di eliminare la dipendenza della risposta dalla densità di elementi finiti scelta. Si formula ed implementa un modello costitutivo di danno scalare con regolarizzazione basata sul concetto di *"energia di frattura"*.

La seconda proposta riguarda l'uso di elementi finiti speciali tali da eliminare o ridurre l'effetto della direzionalità intrinseca introdotta dalla modellazione ad elementi finiti del problema al contorno. Si elabora l'implementazione dell'elemento finito quadrangolare piano QM6 con *"modi incompatibili"* proposto originariamente da Wilson et al.-1973, successivamente modificato da Taylor et al.-1976 e riformulato piú tardi da Simo and Rifai-1990. Tale elemento finito soddisfa, nel caso elastoplastico, il *'weak localization test'* proposto da Steinmann and Willam-1991a per stabilire se un elemento finito è in grado di soddisfare la cinematica di localizzazione in senso debole (o integrale).

Inoltre si sviluppa ed implementa una tecnica *'arc-length'* classica di Riks-1970-79 e Wempner-1971 con controllo automatico della *"lunghezza d'arco"* secondo le proposte di Crisfield-1981 e di Ramm-1981 per tracciare le risposte strutturali instabili con superamento di *"punti limite"* e di *'snap-back'*. Si dimostra l'efficacia degli approcci proposti sulla base di un semplice esempio numerico di estensione monoassiale in deformazioni piane discretizzando per elementi finiti ed utilizzando sia un modello di danno scalare che un modello elastoplastico di von Mises con incrudimento lineare.

5.1 Breve rassegna delle tecniche di regolarizzazione al livello costitutivo e per elementi finiti

L'effetto di regolarizzazione piú "robusto" si ottiene al livello costitutivo introducendo un carattere di *"non località"* nel modello materiale mediante definizione di una grandezza caratteristica avente dimensione di una lunghezza. Tale lunghezza caratteristica definisce in pratica la dimensione finita del materiale ove si concentra il processo dissipativo anelastico di localizzazione. Questa dimensione non tende quindi a zero come avviene invece per un modello standard locale all'innesco del fenomeno di localizzazione. Se la tecnica di regolarizzazione è sufficientemente "robusta" da prevenire l'insorgenza di localizzazione al livello materiale, la relativa analisi ad elementi finiti non mostra alcun fenomeno di *'mesh-dependence'*.

Sono stati proposti diversi approcci al problema, molti dei quali sono tuttora in via di formulazione e sviluppo. I lavori di Willam and Dietsche-1992a,b e di de Borst et al.-1993 hanno fornito recentemente un quadro dettagliato dei vari metodi attualmente disponibili nella modellazione costitutiva, mettendo in luce quali possono essere i vantaggi e gli svantaggi dell'uno piuttosto che dell'altro approccio. Le stesse considerazioni sono presenti singolarmente in modo piú dettagliato nelle dissertazioni di dottorato di Etse-1992 e Feenstra-1993 riguardo alla regolarizzazione basata sul concetto di *"energia di frattura"*, nelle tesi di Steinmann-1992 e Dietsche-1993 che considerano l'utilizzo della *"teoria micropolare di Cosserat"* nei materiali elastoplastici, e nelle dissertazioni di Sluys-1992 riguardo agli effetti di *'rate dependence'* e di Pamin-1994 rispetto all'utilizzo di gradienti di ordine superiore nel modello costitutivo. Nell'ambito della meccanica del danneggiamento si può fare riferimento ai modelli di *"danno non locale"* (si veda ad es. Pijaudier-Cabot and Bažant-1987 per la loro formulazione e Pijaudier-Cabot and Benallal-1993 per la relativa analisi di localizzazione in ambito di propagazione ondosa).

All'interno della modellazione del comportamento *'rate-dependent'* dei materiali viscosi la dilazione temporale della risposta anelastica conduce a formulazioni costitutive direttamente regolarizzate in quanto la risposta istantanea è puramente elastica. A questo proposito si possono citare ad es. i lavori di Needleman-1988, Perzyna and Perzyna-1993 e Willam et al.-1993 ove si mostra l'efficacia della procedura. Willam et al.-1993 hanno mostrato che la tecnica di regolarizzazione svanisce al limite di viscosità nulla o nel limite quasi-statico. Di conseguenza l'approccio viscoso non fornisce una tecnica di regolarizzazione completamente "robusta" e generale. Inoltre, l'introduzione della 'rate-dependence' nel modello incrementale solo ai fini di regolarizzarne la risposta sembra effettivamente una forzatura nel caso di materiali che abbiano un comportamento viscoso trascurabile e/o in ambito del tutto statico o quasi statico.

Anche l'utilizzo di una *"teoria micropolare"* di meccanica del continuo (di Cosserat) introduce una lunghezza caratteristica all'interno di un modello elastico od elastoplastico definita fisicamente come rapporto tra una rigidezza di tipo flessionale ed una di tipo membranale (Dietsche et al.-1993, de Borst et al.-1993). L'introduzione di nuovi gradi di libertà rotazionali nel continuo, che conducono a microcurvature associate a relative microcoppie ('couple-stresses'), deve però essere mobilitata dallo stato di sforzo esistente per regolarizzare la risposta costitutiva. Nel caso di un modo di localizzazione di pura apertura, la localizzazione può infatti ancora manifestarsi al livello costitutivo. L'approccio proposto non è quindi sempre efficace anche se viene spesso proposto per la sua facile implementazione (secondo il parere degli autori che lo hanno effettivamente implementato) in un codice di calcolo ad elementi finiti esistente.

Gli approcci forse piú moderni e promettenti sembrano quelli non locali dei modelli di danneggiamento e dei modelli con gradienti di ordine superiore. Nel primo caso si introduce all'interno delle leggi di evoluzione del danneggiamento una media pesata delle deformazioni equivalenti in un volume rappresentativo di dimensione caratteristica assegnata. Nel secondo caso si formula una condizione di plasticità contenente gradienti di ordine superiore in modo che la relativa condizione di consistenza plastica diviene un'equazione differenziale nei moltiplicatori anelastici, piuttusto che non una semplice relazione algebrica (Mühlhaus and Aifantis-1990, Aifantis-1992, de Borst-1992). I moltiplicatori anelastici vengono discretizzati introducendo gradi di libertà addizionali e la condizione di consistenza viene imposta in soluzione in senso debole. Al di là delle possibili critiche e discussioni circa la caratterizzazione dei nuovi parametri di materiale che vengono introdotti da questi approcci, la trattazione delle appropriate condizioni al contorno sembra ancora non completamente chiarita (Pamin-1994) ed argomento attuale di ricerca (Comi and Perego-1995).

Infine, l'approccio concettualmente piú semplice al problema di regolarizzazione è quello basato sul concetto di energia di frattura, introdotto nei modelli elastoplastici adottati nella modellazione del calcestruzzo. Questo approccio appare non meno plausibile o legittimo dei precedenti anche se viene spesso considerato come un semplice ripiego ('trick') per aggirare il fenomeno della dipendenza della soluzione dalla densità della discretizzazione effettuata. Di questo approccio si parla diffusamente nella sezione seguente, ove viene presentato ed implementato per un modello di danno scalare di tipo locale.

Nel caso la tecnica regolarizzativa del comportamento costitutivo non sia completamente efficace e "robusta" o non sia addirittura prevista, occorre intervenire arricchendo la modellazione per elementi finiti in modo da evitare il piú possibile il fenomeno di 'mesh-dependence'. Ortiz et al.-1987 hanno proposto per primi degli elementi finiti con funzioni di forma addizionali a quelle standard di spostamento in modo da arricchire la modellazione con i modi di discontinuità delle deformazioni provenienti dall'analisi al livello costitutivo. L'elemento viene quindi formulato in base alle informazioni ricevute dall'analisi di localizzazione al livello materiale relativa al modello costitutivo utilizzato. Ciò giustifica ulteriormente il significato delle procedure analitiche presentate nei capitoli precedenti. Sorprendentemente questo elemento finito non soddisfa il 'weak localization test' formulato da Steinmann and Willam-1991a per studiare le possibilità di impiego dei vari elementi finiti in problemi di localizzazione. Questi autori hanno anche proposto un elemento finito che soddisfa automaticamente il test e dovrebbe ben comportarsi nella soluzione di problemi strutturali in presenza di fenomeni di localizzazione.

Altri approcci formulano l'esistenza di discontinuità di spostamento interne alla modellazione degli elementi finiti stessi (Klisinski et al.-1991, Larsson et al.-1993, Lotfi and Shing-1994) o con banda di taglio di ampiezza fissata "spalmata" all'interno dell'elemento finito (Pietruszczak and Mróz-1981). Questi elementi finiti si utilizzano nei metodi di discretizzazione in cui il reticolo rimane fisso in tutta l'analisi di calcolo. Una possibilità alternativa è quella di utilizzare algoritmi risolutivi con adattamento costante della mesh che va allineata secondo i modi di localizzazione in modo da eliminare la dipendenza della risposta rispetto alla direzionalità indotta dalla 'mesh' utilizzata (Steinmann and Willam-1992, Larsson et al.-1993). Questi approcci appaiono complessi ed onerosi dal punto di vista computazionale.

5.2 Regolarizzazione di un modello di danno scalare basata sull'energia di frattura

Si implementa una tecnica di regolarizzazione del modello di danno proposto da Simo and Ju-1987. Le caratteristiche salienti del modello vengono riassunte qui di seguito. La funzione di danneggiamento e l'operatore tangente vengono assegnati nelle forme seguenti:

$$F = \tau - r = 0 \; ; \qquad \mathbf{E}_t = (1-D)\,\mathbf{E}_o - \frac{\partial D}{\partial \tau}\,\frac{\boldsymbol{\sigma}\otimes\boldsymbol{\sigma}}{(1-D)^2\,\tau} \tag{5.1}$$

in cui $\tau=\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{E}_o:\boldsymbol{\epsilon}}$ rappresenta una norma energetica associata alla deformazione (chiamata 'equivalent strain' dagli autori) e la legge di evoluzione del danno è assegnata in termini dei tre parametri A, B e τ_o in modo analogo a quanto proposto originariamente da Mazars-1984

$$D(\tau) = 1 - (1-A)\,\frac{\tau_o}{\tau} - A\,e^{B(\tau_o-\tau)} \tag{5.2}$$

Il significato fisico dei parametri del modello si evince dal comportamento di trazione monoassiale in cui $\tau=\sqrt{E_o}\epsilon$ (si veda la Fig. 5.1). Dalla legge elastica con danno e dalla (5.2), si ottiene la curva σ-ϵ seguente:

$$\sigma = (1-D)\,E_o\,\epsilon = (1-A)\,\sqrt{E_o}\,\tau_o + E_o\,\epsilon\,e^{B(\tau_o-\sqrt{E_o}\,\epsilon)} \tag{5.3}$$

Di conseguenza, il parametro A definisce la resistenza residua al tendere verso una situazione completamente danneggiata ($D \rightarrow 1$), il parametro B individua la resistenza massima di trazione f_t del materiale ed anche la pendenza del ramo di 'softening' ed infine lo scalare τ_o posiziona il limite elastico iniziale del materiale (Mazars-1984).

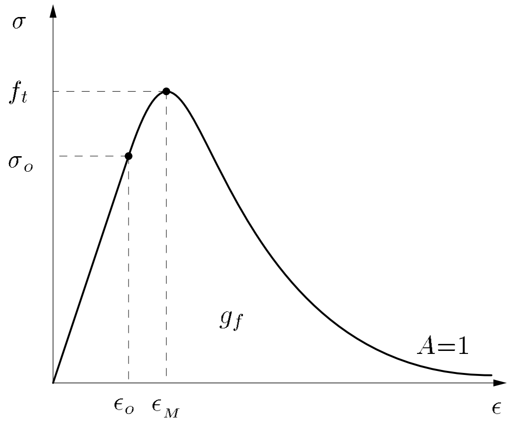


Figura 5.1: Legge costitutiva di danno in trazione monoassiale.

Nella procedura iterativa/incrementale l'evoluzione del danno nell'algoritmo risolutivo viene determinata dalla procedura seguente. La norma energetica τ viene calcolata in base al valore corrente di deformazione $\tau_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1})$. Nel caso in cui $\tau_{n+1}\text{-}r_n \leq 0$, si lascia $D_{n+1}{=}D_n$, altrimenti si pone $D_{n+1}{=}D(\tau_{n+1})$. La soglia di danno viene inoltre modificata come $r_{n+1}{=}max[r_n, \tau_{n+1}]$.

Con lo scopo di introdurre una regolarizzazione della formulazione costitutiva senza ricorrere a tecniche piú complesse, un modo è quello di imporre la medesima dissipazione energetica per unità di superficie, corrispondente all'energia di frattura richiesta per l'apertura di cricca. In tal caso l'area compresa tra la curva sforzo/spostamento e l'asse delle ascisse rappresenta l'energia di frattura G_f. Questo modo di procedere appare del tutto giustificabile anche se viene spesso considerato come un artificio per ottenere una risposta regolarizzata. D'altra parte la questione rimane sempre quella di stabilire come introdurre propriamente una lunghezza caratteristica all'interno di un modello costitutivo. Anche se tale grandezza può essere assunta come parametro costitutivo di un modello di formulazione matematica rigorosa, rimane sempre il problema di caratterizzarne il valore su base sperimentale. Certo è che l'approccio presente non previene la perdita di buona definizione del problema al contorno e quindi è da essere considerato come poco "robusto" ed in particolare va affiancato ad altre tecniche per elementi finiti in modo da limitare l'effetto della direzionalità indotta dalla discretizzazione.

Quando si innesca la localizzazione i fenomeni anelastici si concentrano in una parte limitata della struttura di dimensione dipendente dalla grandezza degli elementi finiti utilizzati, mentre altre zone della discretizzazione si scaricano elasticamente. Poiché la dissipazione energetica tende a zero all'infittirsi della discretizzazione, risulta necessario cambiare i parametri del materiale in relazione alla densità della 'mesh' adottata, in modo che la risposta strutturale sia oggettiva. In altre parole si deve imporre la stessa dissipazione energetica indipendentemente dal numero di elementi finiti considerato. Questo approccio è stato proposto nell'ambito della modellazione del calcestruzzo nei modelli *'smeared'* di tipo *'crack band'* (Bažant and Cedolin-1979-80-83) e nei modelli elastoplastici (si veda ad es. Feenstra-1993, per un modello di tipo Rankine ed Etse and Willam-1994 per i modelli del tipo Leon).

Si indichi con g_f l'area sottesa dalla curva sforzo/deformazione (Fig. 5.1) e si denoti con l_c la lunghezza caratteristica che introduce il legame tra risposta al livello strutturale e risposta del modello materiale e definisce la dimensione della zona di fratturazione. Supponendo deformazione uniforme all'interno della 'crack band', $\epsilon = u/l_c$, dobbiamo quindi imporre $g_f = G_f/l_c$, dati G_f ed l_c. La lunghezza caratteristica deve essere strettamente correlata alla dimensione tipo dell'elemento nella banda di fratturazione. Nell'analisi presente ove si sono impiegati elementi finiti quadrangolari piani a quattro nodi si è assunto

$$l_c = \sqrt{2}\,\sqrt{A_{el}} \tag{5.4}$$

in cui A_{el} rappresenta l'area dell'elemento finito da valutarsi numericamente con integrazione nei punti di Gauss (Feenstra-1993).

Dalla risposta monodimensionale considerata risulta evidente che per ottenere un'energia di frattura per unità di volume g_f finita, occorre porre $A=1$, cioè resistenza residua nulla. Inoltre, per controllare il valore dell'area g_f pur mantenendo costante la resitenza massima f_t, il picco deve coincidere con il punto di iniziale limite elastico, il che avviene per $B \geq 1/\tau_o$. In questo caso la regolarizzazione risulta possibile (nell'ambito della legge di evoluzione scelta per questo modello) mantenendo costante lo sforzo di picco al variare della discretizzazione. Altre possibilità consisterebbero nel definire due o piú tratti della curva σ-ϵ descritti con equazioni diverse, in modo da poter regolarizzare la dissipazione energetica del solo ramo 'softening' indipendentemente. Il comportamento materiale viene quindi descritto da una legge elastica lineare/'softening' esponenziale (si veda la Fig. 5.2). Il parametro B che regola ora solo la pendenza del ramo ad incrudimento negativo viene aggiustato in modo da avere la stessa dissipazione energetica G_f per unità d'area:

$$\int_0^{\infty} \sigma(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{B^2} + \frac{\tau_o}{B} + \frac{1}{2}\tau_o^2 = \frac{G_f}{l_c} \tag{5.5}$$

Si noti che G_f/l_c deve essere maggiore od eguale di $\tau_o^2/2$ per evitare 'snap-back' al livello costitutivo immediatamente dopo il superamento del limite elastico. Questa restrizione impone un confine superiore alla lunghezza caratteristica, mentre la condizione $B \geq 1/\tau_o$ precedentemente introdotta ne impone uno inferiore su l_c:

$$0.4\,\frac{G_f}{\tau_o^2} \leq l_c \leq 2.0\,\frac{G_f}{\tau_o^2} \tag{5.6}$$

Con questo modello si possono quindi regolarizzare solo discretizzazioni con dimensione caratteristica degli elementi soddisfacente le precedenti limitazioni. La soluzione ammissibile $B \geq 0$ dell'equazione di secondo grado (5.5) fornisce

$$\boxed{B(l_c) = \frac{(\tau_o\, l_c + \sqrt{l_c\,(4\,G_f - l_c\,\tau_o^2)}}{(2\,G_f - l_c\,\tau_o^2)}} \tag{5.7}$$

Questa è la relazione cercata tra il parametro B che regola la pendenza del ramo di 'softening' e la lunghezza caratteristica l_c soddisfacente le delimitazioni (5.6). Al punto 5.5 si mostra l'applicazione di questa tecnica di regolarizzazione in un caso test di estensione monoassiale in deformazioni piane.

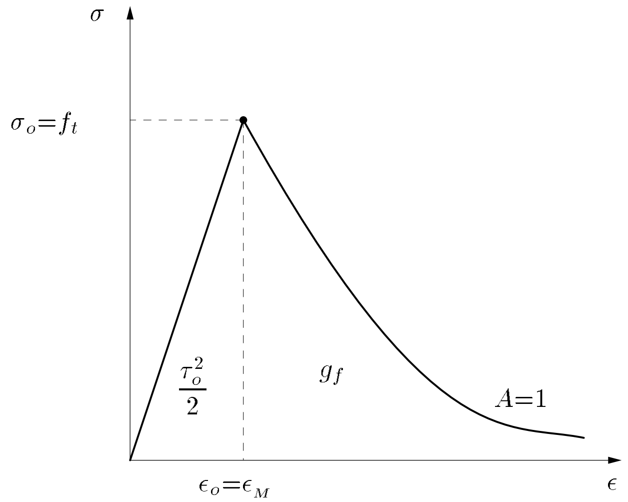


Figura 5.2: Regolarizzazione basata sull'energia di frattura con ramo 'softening' subito oltre il limite elastico ($B \geq 1/\tau_o$).

5.3 Strategie computazionali per risposte strutturali instabili

Quando la risposta strutturale diviene instabile risulta necessario implementare negli algoritmi risolutivi delle appropriate tecniche computazionali in grado di condurre a convergenza e di seguire anche il ramo post-biforcativo. In primo luogo occorre introdurre una tecnica di controllo misto di carico/spostamento per potere tracciare risposte strutturali superando eventuali punti limite (tangente orizzontale nella curva F-u) e punti 'snap-back' (tangente verticale nella curva F-u) ove forza e spostamento sono rispettivamente stazionari (si veda la Fig. 5.3). In secondo luogo, se il modello costitutivo del materiale non è stato regolarizzato in modo appropriato occorre anche arricchire la discretizzazione con elementi finiti speciali in grado di evitare la dipendenza della soluzione approssimata dalla direzionalità del reticolo scelto.

Vengono qui presentate due tecniche computazionali che sono state implementate in un codice di calcolo ad elementi finiti di piccole dimensioni:

(1) La tecnica *'arc-length'* classica di Riks-1970-79 e Wempner-1971 con variazione automatica della lunghezza d'arco di Crisfield-1981 e di Ramm-1981 e con una semplice tecnica *'back-tracking'* (Dennis and Schnabel-1983) di riduzione della lunghezza del passo.

(2) L'utilizzo degli elementi finiti quadrangolari piani con *"modi incompatibili"* (QM6) di Taylor et al.-1976 e Simo and Rifai-1990 che supera il *'weak localization test'* proposto da Steinmann and Willam-1991a (si veda il punto 5.4). L'elemento QM6 dovrebbe descrivere correttamente la cinematica di localizzazione anche senza allineare la discretizzazione nella direzione della 'shear band'.

5.3.1 Tecniche di controllo misto carico/spostamento ('arc-length')

Per seguire la risposta strutturale in vicinanza di punti di singolarità ove si perde la monotonicità della grandezza di controllo scelta dall'algoritmo risolutivo, occorre fornire un controllo misto di carico/spostamento. Non si impone quindi né l'incremento di carico né l'incremento di spostamento che divengono entrambi liberi nella soluzione al passo. Gli incrementi di forza e spostamento devono però soddisfare un vincolo interno addizionale che fornisce l'equazione mancante. Ad es., la soluzione al passo deve rimanere ad una determinata distanza (arco) di lunghezza prefissata o variabile dal passo precedente (Fig. 5.3). Nella terminologia inglese queste tecniche risolutive vengono denominate infatti *'arc-length'*. L'idea e la formulazione originaria di questi metodi sembra risalire ai lavori di Riks-1970-79 e Wempner-1971. Il metodo è stato poi sviluppato e migliorato da molti autori (Batoz and Dhatt-1979), principalmente nell'ambito del comportamento instabile dei gusci (Ramm-1981, Crisfield-1981-83-84, Schweizerhof and Wriggers-1986, Forde and Stiemer-1987), nei problemi di localizzazione (de Borst-1987, Chen and Schreyer-1990) e di delaminazione dei compositi (Corigliano-1993). Una descrizione molto chiara e concisa di introduzione sull'argomento è stata presentata recentemente da Feenstra-1993 nel capitolo introduttivo della sua tesi di dottorato.

Si indichi con $\mathbf{u}$ il vettore degli spostamenti nodali della struttura e con λ il moltiplicatore di carico che fornisce il livello attuale del vettore dei carichi nodali $\lambda\mathbf{P}$. La risposta strutturale viene rappresentata nell'iperpiano spostamento-moltiplicatore di carico $(\lambda,\mathbf{u})$, ove la soluzione al passo deve soddisfare un vincolo generico del tipo (Fig. 5.3):

$$c[\beta\Delta\lambda, \Delta\mathbf{u}] = 0 \tag{5.8}$$

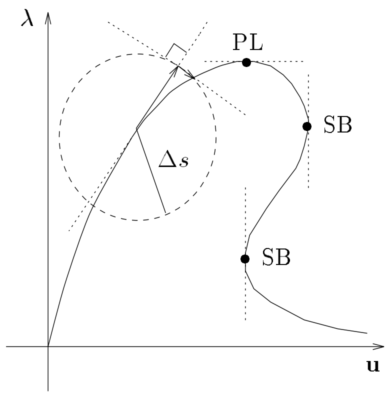


Figura 5.3: Tecniche 'arc-length', punti limite (PL) e 'snap-back' (SB).

Il vincolo imposto alla soluzione può assumere forme differenti, ad es. circolare od ellittica. Nell'approccio classico di Riks-1970-79 e Wempner-1971 qui considerato per l'implementazione, la soluzione di tentativo $\Delta\mathbf{u}_t$ appartiene al piano tangente nel punto corrente della soluzione all'inizio del passo di carico. La correzione della soluzione predittiva viene invece cercata lungo un percorso perpendicolare al precedente, espresso dalla relazione di vincolo

$$\boxed{\Delta\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u} + (\Delta\lambda)^2 = (\Delta s)^2} \tag{5.9}$$

in cui Δs indica la *"lunghezza d'arco"* utilizzata nel definire la distanza dell'iperpiano di correzione ortogonale dal punto di inizio passo. In questo caso la norma di controllo del vincolo contiene sia le componenti di spostamento sia il moltiplicatore di carico. In altre proposte si considera invece solo il contributo di spostamento (β=0) evitando il contrasto tra l'uso di quantità non dimensionalmente omogenee nella (5.8) (Ramm-1981, Crisfield-1981, Schweizerhof and Wriggers-1986). La norma del vettore spostamento cosí considerata contiene le componenti relative a tutti i gradi di libertà della struttura. Tale scelta può risultare poco appropriata nei problemi di localizzazione in cui alcuni gradi di libertà divengono dominanti in soluzione e vengono quindi utilizzati nel definire la norma di spostamento (de Borst-1987). Il parametro di controllo può anche essere la deformazione totale in corrispondenza di un punto critico ove una certa misura di deformazione è massima (Chen and Schreyer-1990). Nei problemi di delaminazione dei compositi il controllo locale viene effettuato sulla norma di discontinuità di spostamento in un punto dell'interfaccia (Corigliano-1993). Queste scelte conducono comunque ad una dipendenza dell'algoritmo risolutivo dal problema considerato, ove occorre stimare quale sia il grado di libertà dominante od il punto critico in cui assumere il controllo locale.

La struttura a banda della matrice di rigidezza tangente $\mathbf{K}_t$ viene mantenuta se, anzichè aggiungere l'Eq. (5.8) al sistema delle equazioni risolventi, si considera la decomposizione del problema in due soluzioni disaccoppiate (Batoz and Dhatt-1979). L'incremento di spostamento viene decomposto in due contributi

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\lambda\,\Delta\mathbf{u}_1 + \Delta\mathbf{u}_2 \tag{5.10}$$

e si risolvono separatamente i due sistemi seguenti (Ramm-1981, de Borst-1987):

$$\begin{cases} \mathbf{K}_t \cdot \Delta\mathbf{u}_1 = \mathbf{P} \\ \mathbf{K}_t \cdot \Delta\mathbf{u}_2 = \mathbf{R} \end{cases} \tag{5.11}$$

in cui $\mathbf{P}$ indica il vettore dei carichi nodali ed $\mathbf{R}$ indica il residuo, cioè le forze non bilanciate nella generica iterazione al passo (Ramm-1981).

La lunghezza d'arco può essere fissata a priori all'inizio del calcolo a seguito di alcune analisi preliminari che ne stimano un valore accettabile rispetto a convergenza ed economicità del numero di passi. Una tecnica piú vantaggiosa prevede invece un aggiornamento automatico della lunghezza d'arco durante l'analisi. Tale variazione automatica dell'ampiezza del passo consente di accelerare i tempi di calcolo ove sono possibili passi piú lunghi, di raggiungere la convergenza in corrispondenza dei punti limite ove occorrono passi molto piccoli ed inoltre di stabilizzare il numero di iterazioni in ogni passo attorno ad un valore ottimale assegnato. Nell'implementazione eseguita si è considerata una semplice tecnica di riduzione del passo di tipo *'back-tracking'*, utilizzata nei metodi *'trust-region'* negli algoritmi di soluzione di problemi di ottimizzazione non vincolati (Dennis and Schnabel-1983) che presentano in effetti una dualità con le strategie 'arc-length'. L'ampiezza del passo si riduce automaticamente nell'avvicinarsi a punti limite in caso di mancata convergenza,

$$\Delta s \leftarrow \Delta s/\alpha \qquad \text{con } 1 \leq \alpha \leq 2 \tag{5.12}$$

Il parametro α viene scelto in base ad alcune analisi preliminari. Nelle soluzioni qui presentate si è assunto α=1.2. I punti limite vengono identificati quando si manifestano elementi diagonali negativi della matrice di rigidezza durante la procedura di soluzione del sistema.

Un controllo automatico del numero di iterazioni al passo consente di variare la lunghezza d'arco in modo che il numero di iterazioni si stabilizzi attorno ad un valore ottimale $n^{ott}=4 \div 5$. Si sono considerate le due proposte di Crisfield-1981 e Ramm-1981 che utilizzano il numero di iterazioni n_{prec} del precedente passo convergente:

$$\begin{aligned} \text{Crisfield-1981}: \quad & \Delta s \leftarrow \Delta s \cdot \frac{n^{ott}}{n_{prec}} \\ \text{Ramm-1981}: \quad & \Delta s \leftarrow \Delta s \cdot \sqrt{\frac{n^{ott}}{n_{prec}}} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Entrambe le proposte sono fondate solo su base empirica ma funzionano egregiamente all'atto pratico. L'adattamento di Crisfield-1981 ha fornito risultati migliori, stabilizzando rapidamente il numero di iterazioni nel passo dopo ogni perturbazione introdotta.

L'ampiezza dell'arco tende a decrescere rapidamente in corrispondenza dei punti limite oppure a crescere troppo velocemente quando la convergenza si ottiene con rapidità. Sono quindi stati forniti anche dei confini superiore ed inferiore ai valori ammissibili delle lunghezze d'arco:

$$\Delta s_{min} \leq \Delta s \leq \Delta s_{max} \tag{5.14}$$

Il confine superiore limita la mancanza di accuratezza della soluzione tra passi di carico eccessivamente lunghi ed il confine inferiore evita un numero di passi di piccola ampiezza troppo elevato.

5.3.2 L'elemento finito QM6 con modi incompatibili

Il metodo degli elementi finiti con *"modi incompatibili"* (*'incompatible modes'*) è stato ideato da Wilson et al.-1973 per rimediare alle deficienze di comportamento degli elementi isoparametrici Q4 nel caso di problemi dominati principalmente da risposte flessionali. In questi casi si manifesta un effetto spurio di *'shear locking'* con sforzi di taglio non previsti dalla soluzione elastica teorica. Nell'elemento Q4 l'interpolazione tradizionale bilineare N_i degli spostamenti fornisce un campo di deformazioni approssimate $\boldsymbol{\epsilon}^h$, rappresentato da polinomi lineari incompleti nelle coordinate naturali ξ ed η, quando lo jacobiano della trasformazione isoparametrica è diagonale:

$$\boldsymbol{\epsilon}^h \in \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \qquad \text{ove} \qquad \boldsymbol{\epsilon}^h = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Nell'elemento Q6 proposto da Wilson et al.-1973 sono stati aggiunti ulteriori gradi di libertà interni, relativi a funzioni di forma quadratiche lungo i lati dell'elemento. Tali funzioni di forma corrispondono al tipo di errore che si commette nella soluzione approssimata di inflessione di un unico elemento finito rispetto alla soluzione in forma chiusa del caso di de Saint-Venant della flessione. I quattro termini quadratici addizionali della modellazione bilineare standard scritti in funzione delle coordinate naturali ξ ed η divengono

$$\boxed{\begin{aligned} u &= N_i\ u_i + (1-\xi^2)\ d_9 + (1-\eta^2)\ d_{10} \\ v &= N_i\ v_i + (1-\xi^2)\ d_{11} + (1-\eta^2)\ d_{12} \end{aligned}} \tag{5.16}$$

In generale questi ulteriori modi di deformazione violano la compatibilità di spostamento tra lati di elementi adiacenti, da cui il motivo del nome 'incompatible modes' scelto.

In un lavoro successivo Taylor et al.-1976 hanno mostrato che l'elemento Q6 non soddisfa in generale il 'patch test', se non nel caso di geometrie a parallelogramma. Il *'patch test'* è stato proposto per verificare se un gruppo di elementi finiti soggetto ad uno stato di deformazione costante riproduce esattamente il comportamento al livello costitutivo con distribuzione di sforzi corretta al tendere a zero delle dimensioni del 'patch'. Il test viene in genere utilizzato per verificare le condizioni di convergenza di una soluzione elastica ad elementi finiti con approccio negli spostamenti quando le funzioni di forma violano le condizioni di continuità. Il test fornisce una condizione necessaria ed in alcuni casi sufficiente per la convergenza ed inoltre la possibilità di testare la rapidità di convergenza asintotica dell'elemento utilizzato (si veda il testo di Zienkiewicz and Taylor-1991). Taylor et al.-1976 hanno modificato l'elemento Q6 proponendo di valutare lo jacobiano della trasformazione isoparametrica solo una volta, in corrispondenza del centro dell'elemento (ξ=η=0). Si ottiene cosí l'elemento finito QM6 che soddisfa il 'patch test' per geometrie comunque generali e risulta convergente all'infittirsi della discretizzazione.

Nell'elemento finito QM6 la deformazione di taglio risulta costante all'interno dell'elemento mentre le deformazioni normali variano linearmente. Le formulazioni Q6 e QM6 sono state riconsiderate successivamente da Simo and Rifai-1990 in un contesto piú generale con una formulazione variazionale di tipo misto a tre campi. Viene introdotta una *'augmented strain'* $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ che definisce la differenza tra il tensore di deformazione e la parte simmetrica del tensore gradiente di spostamento, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}=\boldsymbol{\epsilon}-\nabla_s\mathbf{u}$. La deformazione $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ viene discretizzata introducendo addizionali gradi di libertà interni $\mathbf{d}_2$ per mezzo di funzioni interpolatrici raggruppate nell'operatore $\mathbf{B}_2$, in modo che $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}=\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{d}_2$. Questi gradi di libertà vengono in seguito eliminati per condensazione statica al livello dell'elemento finito. Il conseguente campo delle deformazioni approssimate all'interno dell'elemento finito risulta quindi rappresentato da polinomi incompleti del tipo

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\epsilon}^h \in \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Steinmann and Willam-1991a hanno mostrato che l'elemento QM6 soddisfa il *'weak localization test'*, qui di seguito presentato, per diverse condizioni di sforzo, qualora il comportamento del materiale sia formulato da modelli elastoplastici con condizione di plasticità del tipo di Drucker-Prager, di Rankine o di von Mises. L'elemento dovrebbe quindi essere in grado di cogliere un comportamento *'shear-banding'* senza allineare necessariamente la 'mesh' lungo la direzione della banda di localizzazione che emerge durante l'analisi di calcolo.

5.4 Il 'weak localization test' di Steinmann e Willam

Il *'weak localization test'* è stato formulato da Steinmann and Willam-1991a per definire quali elementi finiti, in relazione al modello costitutivo utilizzato nella modellazione del materiale sono in grado di rappresentare la localizzazione in senso integrale. Si controlla cioè che la condizione di localizzazione, che non risulta verificata identicamente al livello puntuale, nemmeno nei punti di integrazione, possa essere soddisfatta in senso integrale al livello globale dell'elemento finito. In altre parole si vuole controllare se tra i modi di deformazione possibili all'interno dell'elemento finito a seguito dell'interpolazione assunta, vi sono dei modi in grado di contenere la cinematica di localizzazione in senso distribuito. In tal caso l'elemento finito dovrebbe essere in grado di cogliere la formazione di 'shear bands' anche senza allineamento della 'mesh' nella direzione della banda di taglio stessa, cosa che sarebbe necessaria qualora l'elemento finito non contenesse in sé i modi di localizzazione.

Dal Capitolo 2 ricordiamo che la condizione di perdità di ellitticità forte delle equazioni di equilibrio statico si traduce nell'annullamento della forma quadratica associata al tensore di localizzazione che fornisce la velocità di propagazione in termini di $\rho\, c^2$. Tale relazione risulta anche dalla condizione $d^2W{=}0$, necessaria per ogni tipo di biforcazione, quando si sostituisca una forma cinematica compatibile del tipo $[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]{=}\dot{\gamma}\,(\mathbf{M}{\otimes}\mathbf{N}{+}\mathbf{N}{\otimes}\mathbf{M})$:

$$\rho\, c^2 = \mathbf{M}\cdot\mathbf{Q}_t\cdot\mathbf{M} = (\mathbf{M}\otimes\mathbf{N})^s : \mathbf{E}_t : (\mathbf{N}\otimes\mathbf{M})^s = [\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!] : \mathbf{E}_t : [\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!] = d^2W_{loc} = 0 \tag{5.18}$$

Il campo di spostamenti all'interno dell'elemento finito si ottiene per integrazione spaziale della forma compatibile del salto del gradiente di velocità, valutandolo nel centro dell'elemento ($\mathbf{x}{=}\mathbf{0}$) e supponendolo costante all'interno dell'elemento finito stesso:

$$[\![\boldsymbol{\nabla}\dot{\mathbf{u}}]\!] = \dot{\gamma}\,(\mathbf{M}\otimes\mathbf{N}) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{[\![\dot{\mathbf{u}}]\!] = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = \dot{\gamma}\,\Lambda\,(\mathbf{M}\otimes\mathbf{N})\cdot\mathbf{x}} \tag{5.19}$$

ove $\Lambda{=}A^-_{el}/A_{el}$ se $\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{x}{>}0$, $\Lambda{=}{-}A^+_{el}/A_{el}$ se $\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{x}{<}0$. A^-_{el} ed A^+_{el} indicano le porzioni d'area dell'elemento finito divise dalla superficie di discontinuità. Il salto di velocità risulta nullo lungo la linea di discontinuità ($\dot{\mathbf{u}}^+{=}\dot{\mathbf{u}}^-$ per $\mathbf{N}{\cdot}\mathbf{x}{=}0$, si veda la Fig. 5.4a in cui viene rappresentato un elemento quadrato), in accordo con l'ipotesi di discontinuità deboli (cioè delle deformazion incrementali) assunta nella teoria della localizzazione delle deformazioni.

Il campo di velocità valutato nei punti nodali fornisce quindi la cinematica di localizzazione $\dot{\mathbf{d}}_{loc}$. In altre parole $\dot{\mathbf{d}}_{loc}$ rappresenta il modo di localizzazione in termini dei gradi di libertà dell'elemento finito. Si ricorda che tale modo di localizzazione proviene dall'analisi fatta al livello costitutivo che fornisce i vettori $\mathbf{N}$ ed $\mathbf{M}$ per lo stato di sforzo considerato nel test. Il test si colloca quindi in posizione intermedia tra il livello strutturale e quello materiale. All'interno dell'elemento finito la discontinuità di deformazione viene rappresentata in modo distribuito attraverso il legame tra deformazioni e spostamenti nodali, a partire dalla cinematica di localizzazione $\dot{\mathbf{d}}_{loc}$ (si veda la Fig. 5.4b), utilizzando la condensazione dei gradi di libertà interni $\dot{\mathbf{d}}_2^{loc}{=}{-}\mathbf{K}^{-1}_{t_{22}}{\cdot}\mathbf{K}_{t_{21}}{\cdot}\dot{\mathbf{d}}_1^{loc}$:

$$[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]_{dis} = \mathbf{B}_1\cdot\dot{\mathbf{d}}_1^{loc} + \mathbf{B}_2\cdot\dot{\mathbf{d}}_2^{loc} = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2\cdot\mathbf{K}^{-1}_{t_{22}}\cdot\mathbf{K}_{t_{21}})\cdot\dot{\mathbf{d}}_1^{loc} \tag{5.20}$$

In generale questa rappresentazione distribuita del salto delle deformazioni incrementali viola localmente la condizione di localizzazione, che risulti attivata invece al livello costitutivo,

$$[\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]_{distr} : \mathbf{E}_t : [\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]_{distr} \neq 0 \tag{5.21}$$

Si controlla allora se la condizione di localizzazione può essere verificata in senso integrale (debole) sul volume dell'elemento finito:

$$\boxed{\int_{V_{el}} \rho\, c^2\, dV = \int_{V_{el}} [\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]_{distr} : \mathbf{E}_t : [\![\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]\!]_{distr}\ dV = \dot{\mathbf{d}}_{loc} \cdot \mathbf{K}_t \cdot \dot{\mathbf{d}}_{loc} = 0} \tag{5.22}$$

Riassumendo, l'analisi del tensore di localizzazione (secondo i metodi presentati diffusamente nei Capitoli 2, 3, 4, o con analoghi metodi numerici) fornisce la cinematica di localizzazione in termini dei valori nodali $\dot{\mathbf{d}}_{loc}$. Per ogni modello costitutivo esaminato la cinematica $\dot{\mathbf{d}}_{loc}$ definisce i modi di deformazione dell'elemento associati all'insorgenza puntuale di localizzazione delle deformazioni. Affinché il 'weak localization test' sia superato, gli autovalori della matrice di rigidezza tangente dell'elemento finito corrispondenti a questi modi di deformazione si devono annullare. In tal caso l'elemento finito dovrebbe essere in grado di rappresentare correttamente la localizzazione in senso debole senza dissipazione spuria di energia e può essere utilizzato in discretizzazioni a reticolo fisso senza allineare le direzioni della 'mesh' con quelle della banda di localizzazione.

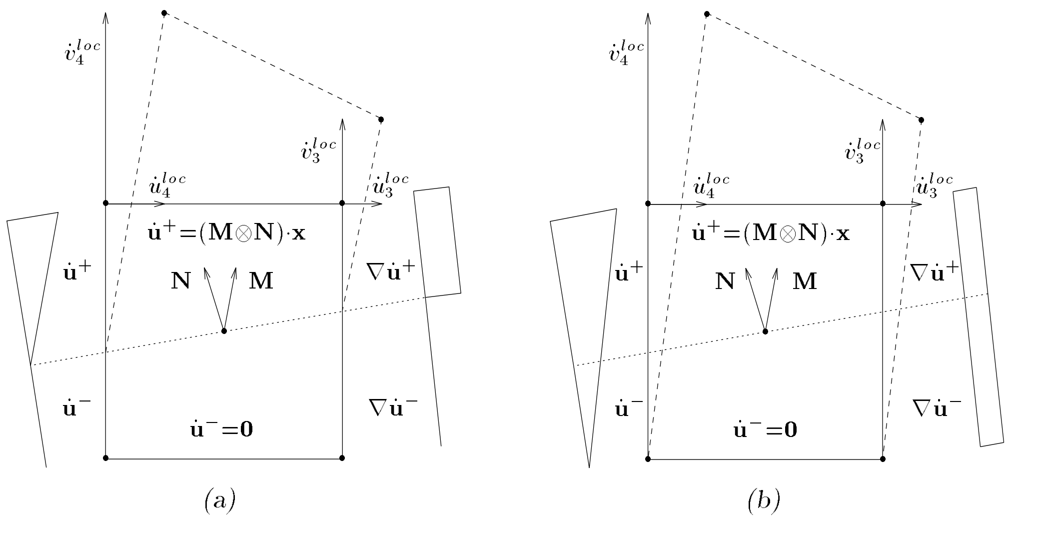


Figura 5.4: Definizione della cinematica di localizzazione di un elemento finito quadrato nel 'weak localization test' di Steinmann e Willam: (a) Modo di localizzazione discontinuo discendente dall'integrazione spaziale; (b) Modo di localizzazione continuo distribuito su tutto l'elemento, energeticamente equivalente al precedente.

5.5 Problema test: provino in estensione monoassiale

L'analisi strutturale qui presentata è relativa ad un caso test di estensione monoassiale in deformazioni piane di un provino rettangolare con lati di dimensioni a=8.5 in=215.9 mm, b=17 in=431.8 mm in rapporto a/b=1/2 (si veda la Fig. 5.5)[1]. Lo spessore del pannello viene assunto pari ad 1 in=25.4 mm.

Si sono considerate diverse discretizzazioni ad elementi finiti quadrangolari di densità differenti (Fig. 5.6). Si discretizza solo un quarto del provino sfruttando le condizioni di simmetria geometrica e di carico. Alcune analisi sono state anche effettuate con discretizzazione dell'intero pannello, al fine di controllare l'effetto dei vincoli di simmetria introdotti nel primo caso sui meccanismi di rottura innescatisi. Si impiegano elementi finiti isoparametrici piani a 4 nodi standard (Q4) e con modi incompatibili (QM6).

Nella storia di carico si impone lo spostamento verticale dei nodi appartenti alle teste del provino. La tecnica 'arc-length' con lunghezza d'arco variabile prende il controllo automatico dell'incrementazione del passo quando viene attivata per la prima volta in modo da ottenere convergenza. Lo stato omogeneo di sforzo e deformazione viene perturbato in modo da rendere possibile l'innesco di localizzazione. Questa alterazione viene introdotta separatamente in due modi, o per mezzo di una imperfezione geometrica di un punto del contorno od imponendo l'annullamento degli spostamenti laterali delle teste del provino.

Si paragonano le risposte strutturali utilizzando tre modelli costitutivi distinti al fine di paragonarne i modi di collasso al livello strutturale:

(1) Il modello di danno scalare di Simo and Ju-1987 che è stato presentato al punto 5.2, basato sulla legge di evoluzione del danno $D{=}1{-}(1{-}A)\,\tau_o/\tau{-}A\,e^{B(\tau_o-\tau)}$, in cui si è posto $\tau{=}\sqrt{\boldsymbol{\epsilon}:\mathbf{E}_o:\boldsymbol{\epsilon}}$. I parametri assunti valgono E_o=30000 ksi, ν=0.3, A=0.6, B=2 $in/\sqrt{kip}$, $\bar{\tau}_o$=0.01 $\sqrt{kip}/in$ (E_o=206700 N/mm^2, B=23.97 $mm/\sqrt{kN}$, $\bar{\tau}_o$=8.34$\cdot$10^{-4} $\sqrt{kN}/mm$, in unità SI).

(2) Il modello di danno scalare precedente con introduzione dell'approccio di regolarizzazione basato sull'energia di frattura. I parametri del materiale vengono assunti in E_o=4000 ksi, ν=0.15, f_t=1 ksi, G_f=4.5 $\cdot$ 10^{-4} kip/in, A=1 (E_o=27579 N/mm^2, f_t=6.89 N/mm^2, G_f=0.0788 N/mm).

(3) Un modello elastoplastico di von Mises ad incrudimento lineare. I parametri elastici sono assunti in E_o=30000 ksi (E_o=206700 N/mm^2), ν=0.3; lo sforzo di snervamento al limite elastico viene assunto pari a σ_Y=36 ksi (σ_Y=248 N/mm^2). Il parametro di incrudimento H viene fatto variare in valori positivi, nulli e negativi.

[1] I risultati di queste analisi vengono presentati in termini delle unità di misura del sistema anglosassone. Si ricorda che i fattori di conversione con le unità del Sistema Internazionale sono i seguenti: 1 in=25.4 mm, 1 kip=4.49 kN, 1 ksi=6.89 N/mm^2.

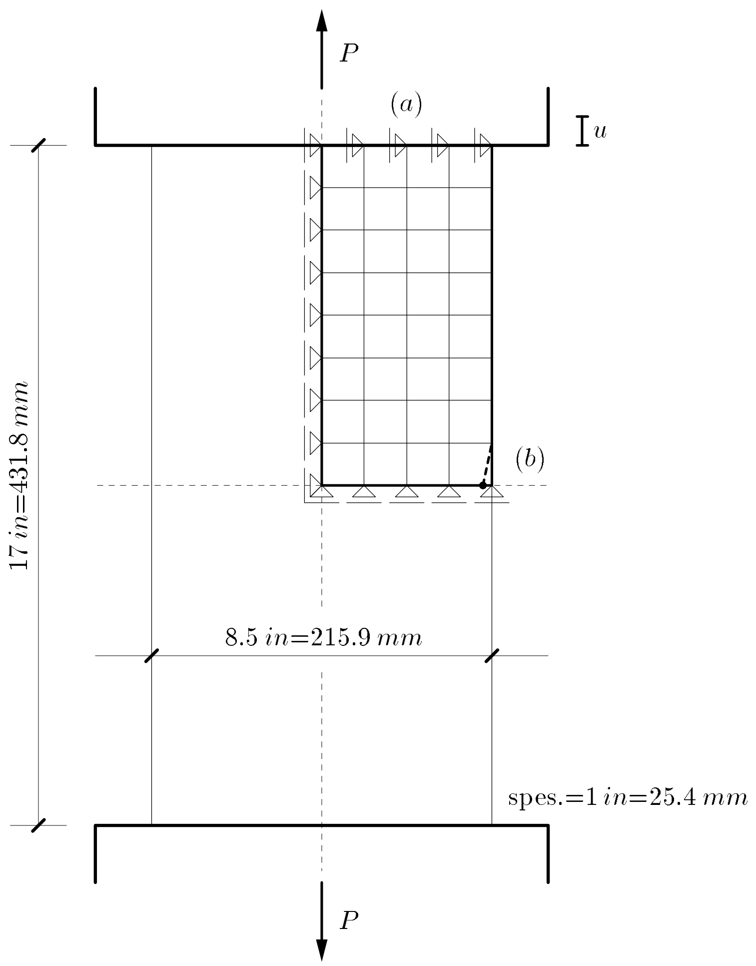
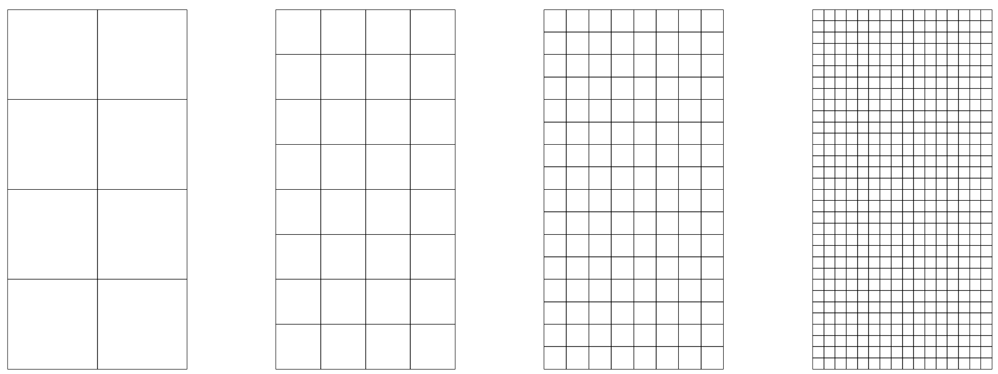


Figura 5.5: Pannello in estensione monoassiale in deformazioni piane con alterazione della risposta omogenea: (a) mediante vincolo superiore allo spostamento laterale; (b) mediante imperfezione geometrica.



(2×4=8 EF) *(4×8=32 EF)* *(8×16=128 EF)* *(16×32=512 EF)*

Figura 5.6: Le diverse discretizzazioni ad elementi finiti quadrangolari utilizzate.

5.5.1 Modellazione costitutiva con danno scalare

I diagrammi forza-spostamento della risposta strutturale relativi alla componente di spostamento verticale della testa del provino sono mostrati in Fig. 5.7. Si paragonano gli effetti dei due tipi di perturbazione e dell'utilizzo di elementi finiti Q4 standard e di elementi finiti QM6 con modi incompatibili.

Nei diagrammi nella parte alta della Fig. 5.7 si può notare l'andamento della risposta omogenea non perturbata da alcuna imperfezione geometrica rispetto alle curve ottenute imponendo una imperfezione geometrica pari all'1% del lato inferiore del provino (Δ=1%). La risposta omogenea è stata tracciata senza l'ausilio di alcuna tecnica 'arc-length' procedendo in controllo di spostamento per superare il picco. In presenza dell'imperfezione la tecnica di controllo misto carico/spostamento è risultata necessaria per cogliere il ramo post-biforcativo della risposta strutturale. Dal Capitolo 3 si ricorda infatti che, in base alle analisi degli indici di rovina al livello materiale di un modello di danno scalare l'innesco di localizzazione coincide con quello di perdita di stabilità in corrispondenza di 'hardening' nullo (H=0). La risposta strutturale si è mostrata in effetti instabile in corrispondenza del punto limite ed incontrollabile senza l'introduzione della strategia 'arc-length' con mancata convergenza della soluzione nel passo.

Nei diagrammi illustrati si può notare la resistenza strutturale residua per danneggiamento tendente ad 1, conseguente all'assunzione di A=0.6 (si rammenta che con A=1 non si avrebbe alcuna risorsa residua di resistenza). La risposta strutturale mostra chiaramente la 'mesh-sensitivity' con percorsi 'snap-back' sempre piú pronunciati all'infittirsi della discretizzazione. A parità di numero di elementi finiti il modello con gli elementi finiti QM6 mostra una risposta piú instabile, pressoché corrispondente a quella ottenibile con la discretizzazione ad elementi Q4 immediatamente piú raffinata.

Nella Fig. 5.8 viene mostrato l'effetto di valori differenti dell'imperfezione geometrica. Con una imperfezione percentuale molto piccola (Δ=0.01%) il provino tende a seguire la risposta strutturale omogenea mentre per valori superiori di un ordine di grandezza si ottengono praticamente già le risposte mostrate nella Fig. 5.7. La scelta dell'entità dell'imperfezione risulta pertanto trascurabile sulla risposta, purchè tale da attivarne l'instabilità.

L'evoluzione di spostamento viene mostrata in Fig. 5.9. Le 'mesh' deformate sono rappresentate con fattori di amplificazione variabili da 25 a 100. Il modo di localizzazione finale di pura apertura coinvolge sempre un'unica linea di elementi, sia utilizzando elementi finiti Q4, sia impiegando elementi finiti QM6. Tale modo di localizzazione sarebbe in accordo con i risultati al livello materiale dati nel Capitolo 3 solo nel caso in cui si abbia $\nu = 0$. La predizione al livello costitutivo non coincide quindi completamente con l'osservazione al livello strutturale, anche se l'analisi di localizzazione al livello materiale non tiene in conto di come lo stato di sforzo venga alterato dalle perturbazioni introdotte. Inoltre andrebbe verificato il 'weak localization test' dell'elemento QM6 nei riguardi del modello di danno utilizzato. Solo nel caso limite di incompressibilità elastica ($\nu \rightarrow 0.5$) si ottiene un modo di collasso con banda inclinata a 45^o identico a quello che verrà mostrato per il caso elastoplastico di von Mises ed in accordo con i risultati dell'analisi al livello costitutivo.

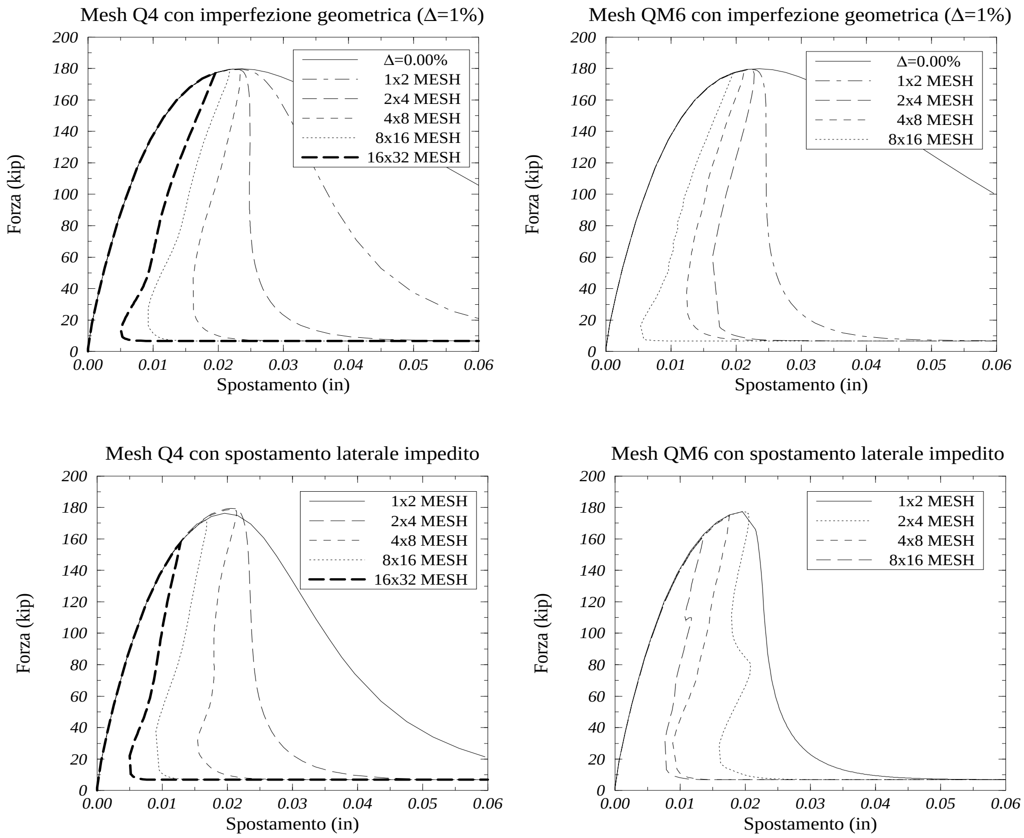


Figura 5.7: Estensione monoassiale in deformazioni piane con modello di danno scalare. Confronto tra elementi finiti standard Q4 (a sinistra) ed elementi finiti speciali QM6 (a destra). La risposta omogenea viene alterata introducendo una imperfezione geometrica (in alto) o vincolando lo spostamento laterale delle teste del provino (in basso).

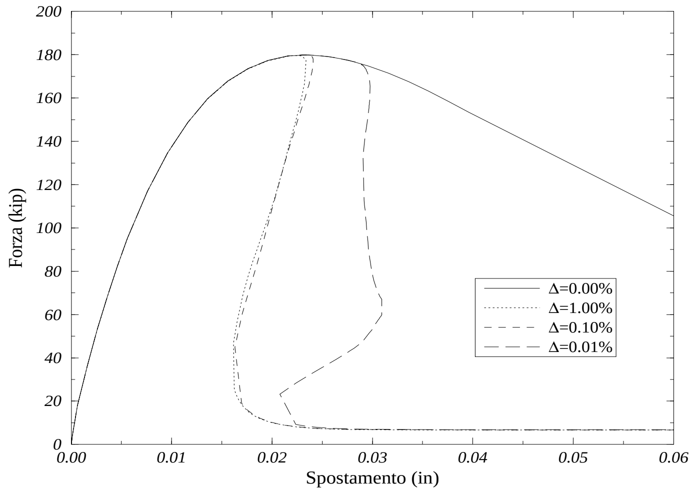


Figura 5.8: Effetto di diversi valori dell'imperfezione geometrica sulla risposta strutturale ('mesh' 4×8).

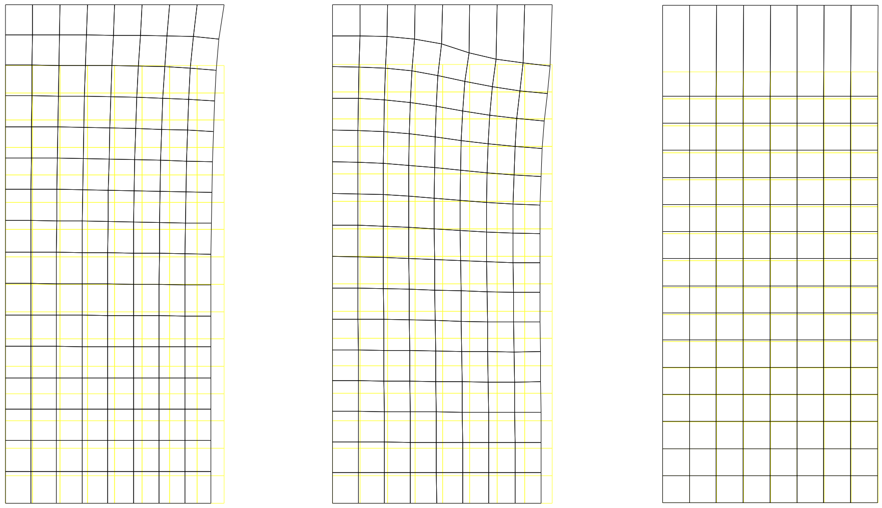


Figura 5.9: Evoluzione della deformazione con spostamento laterale impedito delle teste del provino (128 elementi finiti QM6). Modo di rottura finale di pura apertura.

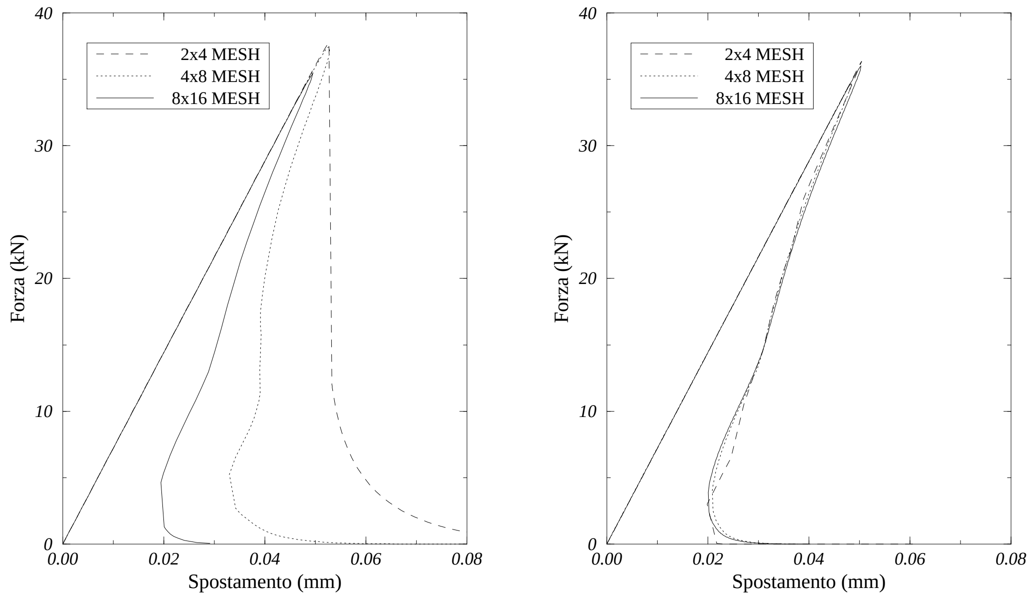
5.5.2 Modellazione costitutiva con danno scalare regolarizzato

Per mostrare gli effetti della regolarizzazione basata sull'energia di frattura del modello di danno si considera un pannello di calcestruzzo con la stessa configurazione geometrica e di carico di Fig. 5.5. Si assumono i seguenti parametri di materiale: E_o=27579 N/mm^2, f_t=6.89 N/mm^2, G_f=0.0788 N/mm. Con questi valori dei parametri le delimitazioni (5.6) sulle dimensioni degli elementi finiti quadrati da utilizzarsi divengono

$$12.95\,mm = \frac{0.4}{\sqrt{2}}\,\frac{G_f E_o}{f_t^2} \leq a_{el} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{G_f E_o}{f_t^2} = 64.74\,mm \tag{5.23}$$

Si sono considerate le discretizzazioni con 8, 32 e 128 elementi finiti di Fig. 5.6 tali per cui i lati a_{el} degli elementi finiti soddisfano le limitazioni precedenti. Infatti nelle tre discretizzazioni considerate risultano rispettivamente lati di 53.975 mm, 26.98 mm e 13.49 mm. Per alterare lo stato omogeneo si impone il vincolo di spostamento laterale nullo sulle teste del provino.

La risposta standard viene mostrata nella Fig. 5.10a in cui il parametro di 'softening' B è stato assunto pari a B=70 $in/\sqrt{kip}$ (B=839.1 $mm/\sqrt{kN}$ in unitá SI). Anche in questo caso è evidente il comportamento piú instabile nel passare a discretizzazioni maggiormente raffinate. La risposta regolarizzata è mostrata in Fig. 5.10b ove il parametro B cambia in funzione della dimensione tipica dell'elemento secondo la relazione (5.7). La risposta strutturale sembra sufficientemente indipendente dal numero di elementi utilizzato e si attesta sul comportamento con 'snap-back' molto pronunciato della discretizzazione piú fitta. La tecnica 'arc-length' implementata riesce a tracciare accuratamente il punto limite ed il notevole 'snap-back' della soluzione.



(a) *Soluzione standard* (b) *Soluzione regolarizzata*

Figura 5.10: Estensione monoassiale in deformazioni piane con spostamento laterale impedito delle teste del provino. Modello di danno scalare con regolarizzazione basata sull'energia di frattura.

5.5.3 Modellazione costitutiva con plasticità di von Mises

Le effettive capacità dell'elemento QM6 di mostrare la formazione di bande di taglio inclinate rispetto alla direzione della discretizzazione vengono mostrate in Fig. 5.12. Le 'shear bands' sono inclinate di circa 45^o rispetto all'asse di carico nel caso di materiale elastoplastico di von Mises con 'softening' ($H{=}-500\,ksi{=}-3445\,N/mm^2$). Questo risultato è in buon accordo con le predizioni di localizzazione al livello materiale mostrate nel Capitolo 2. Lo stato omogeneo è stato alterato in questo caso dal vincolamento laterale dei nodi di sommità del provino. La Fig 5.12 mostra il paragone tra la discretizzazione di un quarto o dell'intero provino a parità di numero di elementi finiti (16x32) e illustra chiaramente la differenza di comportamento tra modellazioni strutturali con elementi Q4 o QM6. Nel primo caso la deformata strutturale è chiaramente distribuita su tutto il provino, mentre nel secondo caso si localizza nella banda inclinata di elementi QM6. Il vincolo di simmetria non influenza l'andamento delle bande di taglio in quanto si ottiene la stessa direzione di banda anche discretizzando tutto il provino. L'effetto del posizionamento delle imperfezioni geometriche collocate in sequenza nei punti d'angolo del provino è mostrato in Fig. 5.13.

Altre analisi con differenti rapporti a/b tra i lati del provino mostrano che l'inclinazione della banda a 45^o non sembra influenzata dal rapporto $a/b{=}1/2$ scelto. Viceversa, mantenendo lo stesso rapporto tra i lati del provino ma variando il rapporto a_{el}/b_{el} tra i lati degli elementi finiti si osserva che la banda di taglio non segue la diagonale degli elementi stessi (Fig. 5.14). L'elemento QM6 fornisce quindi risultati promettenti se pur in un problema al contorno molto semplice.

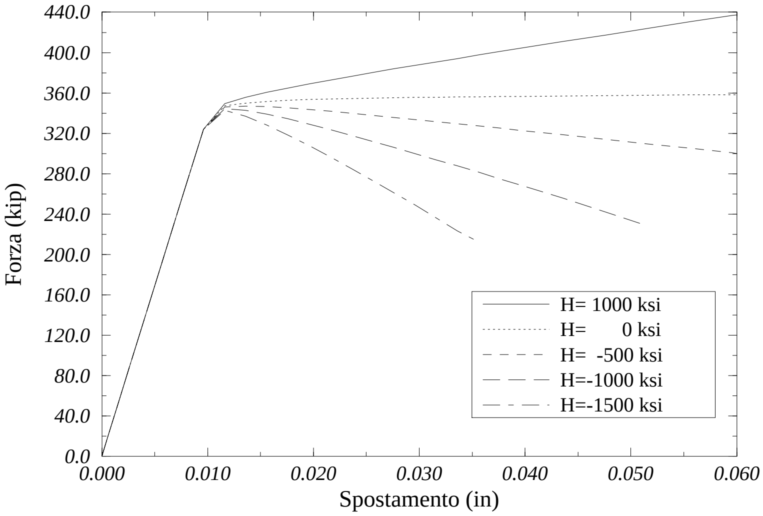


Figura 5.11: Estensione monoassiale con spostamento laterale impedito delle teste del provino. Modello di von Mises con 'hardening' lineare di modulo differente e $\sigma_Y = 36\,ksi$ ('mesh' 8×16).

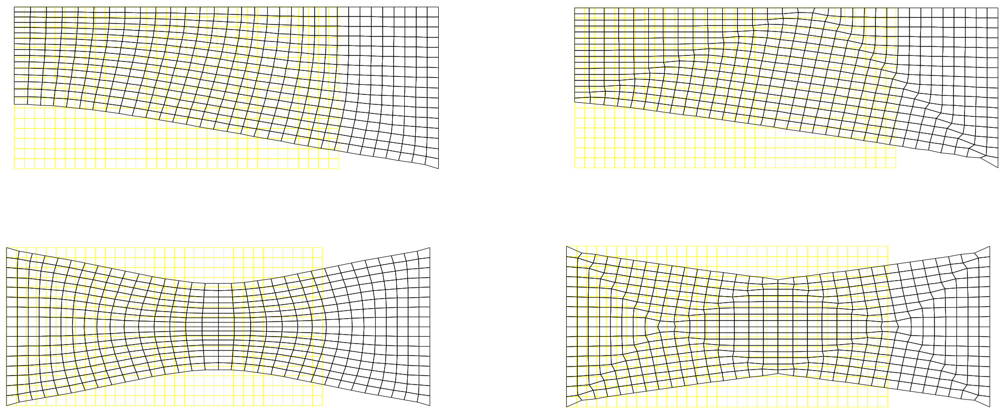


Figura 5.12: Formazione di 'shear bands' in materiale di von Mises: confronto tra discretizzazioni a 16×32 elementi finiti quadrangolari standard, Q4 (a sinistra) e speciali, QM6 (a destra), di un quarto del pannello (in alto) o dell'intero provino (in basso).

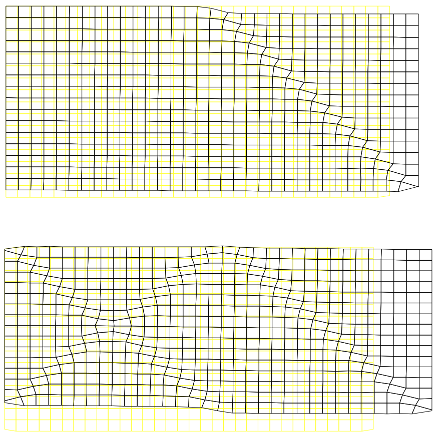


Figura 5.13: Discretizzazione dell'intero provino con posizionamento dell'imperfezione geometrica in sequenza negli angoli del pannello: effetto sullo sviluppo delle 'shear bands' in materiale di von Mises.

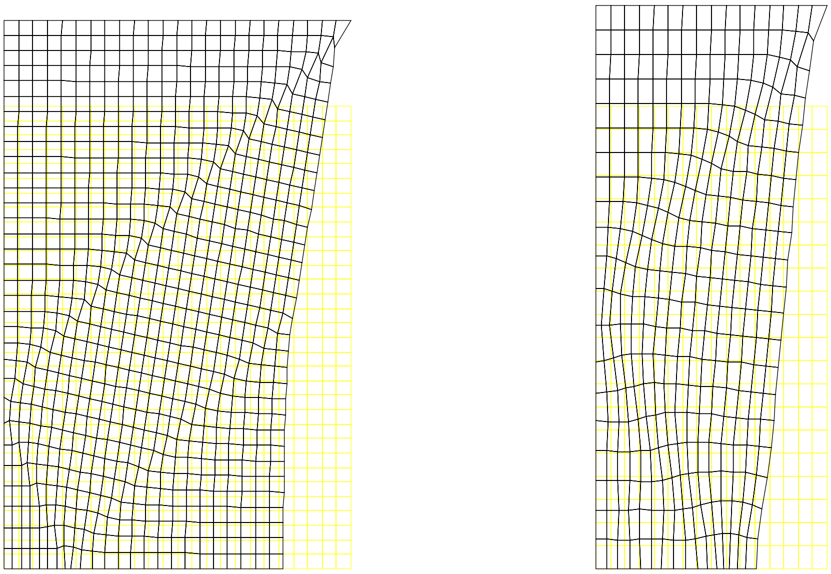


Figura 5.14: Variazione dei rapporti geometrici tra i lati del provino o degli elementi finiti: (a sinistra) Provino con a/b=1.5/2 ed a_{el}/b_{el}=1/1 ('mesh' 24×32=768 EF); (a destra) Provino con a/b=1/2 ed a_{el}/b_{el}=1/1.55 ('mesh' 16×20=320 EF).

5.6 Considerazioni conclusive

Nel capitolo sono state presentate le tecniche di regolarizzazione della risposta strutturale necessarie alla soluzione di problemi al contorno che divengono mal posti in presenza di fenomeni di localizzazione. In una breve rassegna introduttiva sono stati discussi i possibili approcci di regolarizzazione delle leggi costitutive introducenti la non località per mezzo di un parametro caratteristico avente dimensione di una lunghezza. Se la tecnica di regolarizzazione costitutiva è sufficientemente "robusta" la soluzione numerica del problema al contorno non risente della scelta operata nella discretizzazione. Si evitano cosí i fenomeni di dipendenza dalla 'mesh' sia rispetto alla sua densità, cioè rispetto al numero di elementi o gradi di libertà adottati, sia nei riguardi della direzionalità intrinseca indotta nel problema dalla geometria scelta per il reticolo. Se la tecnica di regolarizzazione non è sufficientemente "robusta" (come ad es. quella basata sul concetto di energia di frattura), occorre formulare ed utilizzare elementi finiti speciali in grado di contenere i modi di localizzazione al loro interno, oppure formulare algoritmi con adattamento evolutivo della discretizzazione che allineino gli elementi finiti standard secondo le direzioni del modo di collasso strutturale.

Nel capitolo è stata sviluppata e presentata una tecnica di regolarizzazione costitutiva basata sull'energia di frattura di un modello di danno scalare. La tecnica è da considerarsi poco "robusta" dal punto di vista matematico, nel senso che la perdita della buona posizione del problema in presenza di localizzazione non viene evitata ed occorre quindi abbinarla anche all'uso di elementi finiti speciali. Il modello di danno rimane formalmente locale ma la pendenza del ramo di 'softening' viene aggiustata automaticamente in funzione della dimensione caratteristica della 'mesh' in modo da garantire comunque la stessa dissipazione energetica al densificarsi della discretizzazione.

Per quanto concerne la discretizzazione per elementi finiti, sono stati utilizzati gli elementi quadrilateri piani QM6 con modi incompatibili. Questi elementi soddisfano il 'weak localization test' e quindi sono in grado di cogliere 'shear bands' inclinate anche senza allineamento della 'mesh' secondo la direzione di tali bande. In corrispondenza dei punti limite e di 'snap-back' della risposta strutturale occorre fornire algoritmi risolutivi appropriati in modo da ottenere comunque convergenza al passo. Nel capitolo si sono brevemente discusse le tecniche 'arc-length' e si è presentata una tecnica di controllo misto carico/spostamento con ritorno perpendicolare alla soluzione di tentativo e lunghezza d'arco variabile. La tecnica descritta è stata implementata in un codice ad elementi finiti.

Come esempio numerico di verifica e controllo si è adottato un problema di estensione assiale in deformazioni piane con modello di danno scalare non locale tradizionale o regolarizzato, utilizzando discretizzazioni ad elementi finiti quadrilateri standard, Q4 e speciali, QM6. In primo luogo si è mostrata l'efficacia della tecnica 'arc-length' nel caso di modello di danno scalare con la quale sono stati percorsi rami 'snap-back' della risposta sempre piú pronunciati all'infittirsi della discretizzazione. L'omogeneità della soluzione è stata alterata in due modi: mediante l'introduzione di una imperfezione geometrica oppure vincolando le teste del provino rispetto agli spostamenti in direzione trasversale all'asse di carico. Le soluzioni numeriche mostrano chiaramente la dipendenza dalla densità del reticolo ad elementi finiti. Intervenendo con la regolarizzazione basata sull'energia di frattura nella formulazione del modello di danno si ottiene una risposta 'snap-back' indipendente dalla discretizzazione. La tecnica di regolarizzazione proposta funziona in modo soddisfacente, per lo meno in questo caso-test essenzialmente monodirezionale ma andrebbe verificata in situazioni piú complesse.

L'uso degli elementi finiti QM6 nel caso di plasticità di von Mises mostra la formazione di bande di taglio inclinate rispetto all'asse di carico con modo di localizzazione di tipo misto. Questo risultato è sostanzialmente in accordo con l'analisi costitutiva presentata nel Capitolo 2. Nel caso di modello di danno scalare, il modo di rottura è invece di pura apertura con localizzazione in un'unica linea di elementi. Si ottengono bande inclinate solo al limite di incompressibilità elastica ($\nu \rightarrow 0.5$). Quanto risulta al livello strutturale non è quindi in totale accordo con l'analisi al livello costitutivo nella quale si prevedono bande inclinate per coefficiente di Poisson non nullo. L'effetto delle condizioni al contorno che perturbano lo stato omogeneo non è quindi da trascurarsi. Inoltre la validità dell'elemento QM6 nel caso di danno scalare andrebbe ridiscussa alla luce di un 'weak localization test' relativo al modello di danno scalare utilizzato.

I risultati ottenuti sono quindi da ritenersi preliminari ed ulteriori indagini appaiono necessarie per dimostrare in via definitiva l'efficacia dell'abbinamento qui proposto di due approcci di implementazione particolarmente semplici in casi strutturali piú complessi e di effettivo interesse ingegneristico. Di certo vi è che la semplicità dei due approcci considerati ha permesso di analizzare una risposta di localizzazione al livello strutturale con implementazione in un programma ad elementi finiti di dimensione ridotta ed ha condotto a risultati soddisfacenti, promettenti per analisi strutturali piú complesse e confrontabili con quelli ottenibili mediante tecniche piú complicate che richiedono un'implementazione onerosa.

Lo studio di metodi di regolarizzazione nei problemi di localizzazione è campo aperto alla ricerca. Ognuno dei vari approcci proposti contiene aspetti positivi e funziona adeguatamente in problemi particolari mentre presenta controindicazioni in altri casi. Come espansione del presente studio sembra auspicabile, da un lato l'implementazione di una tecnica di regolarizzazione di tipo gradiente del modello di danno, dall'altro lato la generazione di altri elementi finiti speciali nel caso di regolarizzazione del modello di danno basata sul concetto di energia di frattura. Dopo i semplici esperimenti numerici del tipo di quelli qui presentati, esempi di effettivo interesse ingegneristico appaiono necessari per confronti significativi e sperabilmente definitivi con altri approcci del tipo 'smeared' o con approcci propri della meccanica della frattura ('discrete').

CAPITOLO 6

CONCLUSIONI

Argomento di questa tesi è stato lo studio dei comportamenti strutturali che conducono al collasso localizzato, nel quale la dissipazione energetica per deformazioni o processi anelastici si concentra in sottodomini ristretti. Questo comportamento si osserva in provini originariamente in stato deformativo omogeneo ed anche al livello strutturale vero e proprio, ad es. nei nodi trave-colonna di strutture in acciaio e cemento armato (con formazione di "cerniere plastiche") od in strutture di materiale lapideo quando microfratture crescono ed interagiscono fino a formare macrofessure ben osservabili esternamente.

In provini di scala ridotta, impiegati per caratterizzare le proprietà intrinseche del materiale, in condizioni di risposta ideale omogenea, si osserva la formazione di zone in cui si localizza il processo dissipativo fino a rottura. Imperfezioni geometriche, di materiale o dell'apparato di carico, rendono in realtà non omogenea la risposta strutturale. Qualora si predisponga nel provino una imperfezione geometrica artificiale ben definita, cioè un intaglio, le conseguenti concentrazioni di sforzo individuano la zona dove si innesca un fenomeno di macrofratturazione. Questa osservazione sperimentale tipica per le strutture in materiale lapideo può interpretarsi nell'ambito dei modelli strutturali afferenti alla meccanica della frattura.

In assenza invece di marcate imperfezioni, anzichè osservare una discontinuità di spostamento tra le interfacce della macrofrattura, si nota all'interno del materiale un danneggiamento diffuso, che tende però a localizzarsi anche in questo caso in zone limitate del provino al progredire del carico. In tali parti del campione si manifestano elevati gradienti di spostamento su dimensioni piccole ma finite. È questo il fenomeno di localizzazione delle deformazioni di cui ci si è occupati nella tesi. Comportamenti di tale tipo sono osservabili in molti materiali di interesse ingegneristico, non solo nei metalli, per i quali si sono da lungo tempo notate e studiate formazioni di bande di taglio ('shear bands' o 'Lüders bands'), ma anche in polimeri ed in materiali lapidei quali rocce, suoli, calcestruzzi.

Dall'osservazione di questi fenomeni nasce spontaneo il quesito di quale sia il primo di essi a manifestarsi e se vi sia effettivamente una gerarchia di comportamento nella degradazione progressiva di un mezzo macroscopicamente continuo in un solido discontinuo nel quale sono avvenute decoesioni e rotture.

La modellazione di questi fenomeni nell'ambito della meccanica strutturale e dei materiali tratta ordini di discontinuità differenti. La meccanica della frattura si occupa di discontinuità forti degli incrementi di spostamento (e, di conseguenza, degli spostamenti) che si manifestano tra i lembi di una macrofrattura. La teoria della localizzazione delle deformazioni si focalizza sulle discontinuità deboli delle deformazioni incrementali (e quindi, in ultima analisi, delle deformazioni). I nessi tra i due approcci, in relazione al chiarimento delle gerarchie di innesco, non sono stati ancora pienamente compresi allo stato attuale.

Nella tesi ci si è occupati esclusivamente del secondo approccio, che si fonda sulla formulazione di modelli costitutivi 'smeared' nell'ambito della meccanica del continuo. Per descrivere i comportamenti strutturali instabili, il modello costitutivo deve contenere una descrizione della degradazione progressiva delle proprietà del materiale. Si formulano cosí modelli con degradazione di resistenza oltre "valori di picco" con rami 'softening' che portano, al crescere delle deformazioni, alla perdita totale o parziale delle capacità portanti. Oltre alla perdita di resistenza, si osserva anche una degradazione della rigidezza elastica allo scarico, in modo particolarmente marcato nei materiali lapidei. Il modello costitutivo deve quindi essere in grado di cogliere entrambi i meccanismi di degradazione. L'obiettivo di questa tesi è stato quello di elaborare la formulazione di teorie costitutive per modelli di materiali con tali comportamenti e di definire ed analizzare le relative instabilità, sia al livello costitutivo che strutturale.

6.1 Sintesi dei risultati raggiunti in questo studio

Il percorso seguito nella stesura della tesi è stato il seguente: richiami sui modelli elastoplastici incrementali ed introduzione dei relativi criteri di stabilità e singolarità costitutiva (indici di rovina); formulazione di teorie costitutive per materiali con sola perdita di rigidezza elastica o con degradazione di rigidezza elastica e concomitante plasticità; analisi degli indici di rovina di tali modelli; utilizzo al livello strutturale dei concetti emersi nell'ambito costitutivo.

La tesi è stata articolata in cinque capitoli. Il primo capitolo rappresenta un'introduzione in cui si sono sintetizzate le conoscenze basilari sulla localizzazione delle deformazioni, dalle osservazioni sperimentali alle problematiche della modellazione. Nel riassumere qui di seguito i contenuti dei successivi quattro capitoli, lo scrivente si propone di evidenziare quelli che ritiene risultati emersi durante il lavoro di tesi quali contributi allo sviluppo delle conoscenze sul tema.

Nel Capitolo 2 si sono derivate le relazioni fondamentali in analisi di localizzazione, vale a dire le relazioni di compatibilità di Maxwell e la condizione di propagazione di Fresnel-Hadamard. Si è definito il tensore acustico elastico ed il tensore di localizzazione elastoplastico cercando di chiarirne il significato fisico. Si sono presentati brevi richiami di teoria della plasticità nelle formulazioni duali negli sforzi e nelle deformazioni al fine di derivarne i relativi operatori tangenti. Si sono riassunte le analisi degli indici di rovina relativi all'operatore di rigidezza tangente ed al tensore di localizzazione elastoplastici. Queste conoscenze risultano disperse nella letteratura scientifica in piú lavori. Si sono ottenuti gli autovalori dell'operatore di rigidezza tangente nel caso non associato mostrando che due degli autovalori elastici vengono in generale modificati dal contributo plastico di rango uno (una derivazione alternativa più compatta è stata formulata anche nel Capitolo 4). Al termine del capitolo si sono presentati alcuni risultati classici di localizzazione relativi a modelli elastoplastici di von Mises, riassumendo le differenze esistenti tra analisi tridimensionali od in deformazioni piane ed analisi in stato di sforzo piano.

Nella prima parte del Capitolo 3 si è riassunta una teoria costitutiva per materiali con degradazione di rigidezza elastica ('elastic-degrading') comprendente i modelli di danneggiamento come caso particolare, alla cui formulazione lo scrivente ha contribuito assieme ad altri due autori. Si sono mostrate le procedure della meccanica del danneggiamento atte a caratterizzare variabili di danno di ordine tensoriale differente. Si sono proposte forme alternative di danno scalare eventualmente anisotropo e metodi sistematici di definizione delle variabili di danno del 2^o ordine tensoriale al fine di garantire la simmetria di sforzi e deformazioni negli spazi nominale ed effettivo. Nella seconda parte del capitolo si sono analizzati gli indici di rovina dei materiali 'elastic-degrading' in forma analitica. Si sono ottenute espressioni esplicite per le direzioni critiche di localizzazione e per i parametri critici di incrudimento, mostrando le differenze esistenti col caso elastoplastico. Si è inoltre presentata una derivazione analitica alternativa utilizzando la rappresentazione geometrica della condizione di localizzazione nel piano di Mohr recentemente introdotta da Benallal-1992.

Nel Capitolo 4 si è introdotta una formulazione costitutiva generale per materiali multidissipativi con approcci duali negli sforzi e nelle deformazioni. Tale formulazione include la plasticità a multipotenziale e, come caso bidissipativo, la plasticità contemporanea alla perdita di rigidezza elastica. Si è derivato l'operatore di rigidezza tangente per tali modelli incrementali ed il relativo tensore di localizzazione, ottenuti entrambi con modifiche multiple di rango uno degli operatori elastici. Si è proposto un approccio sistematico per l'analisi del problema agli autovalori per modifiche multiple di rango uno della matrice identità e lo si è risolto esplicitamente nel caso mono e bidissipativo in termini di autovettori, autovalori e determinante. Si è ricavata cosí in modo indipendente la formula per la perturbazione di un determinante disponibile in letteratura per modifiche di rango uno e due della matrice identità. Nel caso monodissipativo si sono ridiscussi i risultati classici già presentati nel Capitolo 2, utilizzando il nuovo approccio formulato ed evidenziando le analogie esistenti tra gli indici di rovina diffusa e localizzata. Si sono derivate esplicitamente le proprietà spettrali dell'operatore di rigidezza tangente anticipate nel Capitolo 2. Nel caso bidissipativo, ed in particolare per plasticità combinata a perdita di rigidezza elastica si è dimostrato l'effetto destabilizzante della contemporanea attivazione dei due meccanismi di dissipazione sulle condizioni di singolarità dell'operatore di rigidezza tangente e del relativo tensore di localizzazione. Si mostra anche l'esistenza di un effetto spurio di irrigidimento in corrispondenza dei valori limite ammissibili per i parametri di 'softening'. Si sono derivati risultati espliciti nel caso di meccanismi indipendenti negli sforzi o nelle deformazioni nei quali le relative matrici di incrudimento sono diagonali. Si sono presentati esempi per plasticità di von Mises abbinata a danno scalare mostrando l'innesco di localizzazione quando entrambi i meccanismi sono ancora nel regime di 'hardening'.

Nel Capitolo 5 si è presentata una breve rassegna delle tecniche di regolarizzazione della risposta strutturale e delle strategie computazionali 'arc-length'. Si è mostrata l'implementazione di una tecnica 'arc-length' classica con correzione sul piano perpendicolare alla soluzione di predizione e lunghezza d'arco variabile automaticamente. Si è implementato l'elemento finito con modi incompatibili QM6 il quale soddisfa il 'weak localization test' di Steinmann and Willam-1991a che è stato brevemente richiamato in una sezione del capitolo. Si è proposta ed implementata una tecnica di regolarizzazione di un modello di danno scalare basata sull'energia di frattura. Si è presentata un'analisi strutturale in deformazioni piane in presenza di localizzazione. L'analisi ha mostrato chiaramente la 'mesh-sensitivity' della soluzione numerica, la regolarizzazione della risposta dovuta all'introduzione dell'energia di frattura nel modello a danno e la formazione di 'shear-bands' inclinate rispetto all'asse di carico nel caso di plasticità di von Mises. La tecnica 'arc-length' si è dimostrata in grado di tracciare percorsi 'snap-back' anche molto pronunciati.

6.2 Rassegna di alcuni problemi aperti e di eventuali futuri sviluppi di questo studio

Molteplici sono i problemi che appaiono tutt'ora aperti nell'ambito dei fenomeni di localizzazione e per quanto concerne i nessi esistenti tra questi ed i fenomeni di frattura. Nell'opinione dello scrivente, particolarmente difficile ma anche altamente auspicabile, è l'interazione tra i diversi ambiti di ricerca, sui modelli 'smeared' da una parte e su quelli 'discrete' dall'altra: una notevole attività di ricerca è in corso in questi due ambiti, ma scarsi contributi unificanti sono stati sinora prodotti dalle diverse visioni della meccanica strutturale a collasso ('failure mechanics'). Anche limitatamente agli aspetti della localizzazione delle deformazioni trattati nella tesi, si intravedono numerosi plausibili scenari di ricerca e potenziali futuri sviluppi. Varie questioni che meritano approfondimenti sono già state indicate nelle considerazioni conclusive esposte al termine di ogni capitolo e vengono qui riproposte in modo sommario.

L'effetto delle condizioni al contorno non è stato considerato nelle analisi di localizzazione presentate nei Capitoli 2, 3, 4, nei quali si è fatto riferimento a solidi illimitati di caratteristiche costitutive diverse. Gli effetti al contorno sono osservabili sperimentalmente ed appare utile studiarli non solo con tecniche numeriche regolarizzate ma anche con approcci analitici ove possibile. Nonostante che alcuni contributi significativi siano apparsi nella letteratura recente, tale argomento sembra ancora sostanzialmente inesplorato allo stato attuale.

La trattazione di discontinuità deboli delle deformazioni incrementali, assunte nella teoria della localizzazione delle deformazioni e quella di discontinuità forti degli incrementi di spostamento, ipotizzate in meccanica della frattura, potrebbero ammettere una metodologia comune capace di chiarire appieno le condizioni che regolano l'insorgenza dei due fenomeni. A questo proposito la trattazione sistematica delle discontinuità per mezzo della teoria delle distribuzioni, proposta recentemente da alcuni autori, sembra promettere risultati significativi a breve termine.

Nell'ambito della formulazione ed analisi di modelli costitutivi per materiali con perdita di rigidezza elastica, l'attuale attività di ricerca va sicuramente continuata in direzioni distinte: formulazione di leggi di degradazione anisotrope su base micromeccanica; sviluppo di modelli di danno di ordine tensoriale differente; calibrazione dei modelli costitutivi su base sperimentale con implementazione delle leggi costitutive; introduzione di forme generali di non località nei modelli di danno. Inoltre, relativamente all'analisi di localizzazione per tali modelli costitutivi, è opportuno ricordare che i risultati analitici espliciti finora acquisiti riguardano solo il caso di rigidezza elastica di forma isotropa. In casi piú generali di comportamento elastico resta ancora da chiarire quale sia l'effetto dell'anisotropia elastica sulle predizioni di localizzazione.

Anche nell'ambito dei modelli elastoplastici con degradazione di rigidezza elastica e, piú in generale, nell'ambito dei modelli multidissipativi, ulteriori indagini sono richieste per la formulazione di modelli che interpretino quantitativamente le risultanze sperimentali in modo soddisfacente per le piú esigenti applicazioni tecnologiche pratiche. Tali aspetti sono già attualmente oggetto di un'intensa attività di ricerca. Nell'analisi delle instabilità costitutive di modelli multidissipativi i risultati presentati nel Capitolo 4 sono da considerarsi preliminari e forniscono vari spunti di estensione e di applicazione a casi specifici. Occorre inoltre affrontare il problema di definire quale sia l'effettivo primo innesco di localizzazione quando sono possibili meccanismi multipli di dissipazione. La congettura che sia piú svantaggioso l'ingresso in regime anelastico di tutti i meccanismi nei due lati della superficie di discontinuità va verificata o dimostrata.

Le tecniche di regolarizzazione al livello strutturale non sono certamente consolidate, ma sono oggetto di una notevole attività di ricerca nei vari settori che sono stati individuati nella breve rassegna introduttiva presentata nel Capitolo 5. Ogni gruppo di ricerca è fatalmente fautore del proprio approccio ed appare ancora impossibile stabilire quale sia la strategia vincente, né sembrano potersi intravedere nuovi approcci rivoluzionari che portino ad una soluzione definitiva del problema. Tra gli auspicabili sviluppi dello studio svolto nella tesi sui modelli di danno, si può citare come particolarmente promettente la ricerca di metodi di regolarizzazione con gradienti di ordine superiore delle variabili di danno e la relativa implementazione che potrebbe risultare piú semplice di quella di un modello di danno non locale. Tale filone di ricerca sembra suscettibile di condurre a risultati immediati, in quanto la tecnica del gradiente è stata sperimentata recentemente con esiti soddisfacenti nell'ambito elastoplastico. Anche lo sviluppo di elementi finiti formulati ad hoc per le analisi di localizzazione sembra produttivo al fine di valorizzare e combinare in sinergesi tecniche di regolarizzazione al livello costitutivo ed al livello strutturale per eliminare ogni dipendenza patologica dei risultati numerici dalla discretizzazione spaziale per elementi finiti. Le tecniche di regolarizzazione andrebbero poi sperimentate nella soluzione di problemi strutturali di reale interesse ingegneristico in modo da pervenire all'elaborazione di strumenti d'analisi adeguati alle esigenze della pratica industriale e professionale. Tale scopo sembra tuttavia ancora lontano dall'essere raggiunto.

BIBLIOGRAFIA

[1] ACHENBACH, J. D. (1973). *"Wave propagation in elastic solids"*. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands.

[2] AIFANTIS, E.C. (1987). *"The physics of plastic deformation"*. Int. J. Plasticity, 3, 211-247.

[3] AIFANTIS, E.C. (1992). *"On the role of gradients in the localization of deformation and fracture"*. Int. J. Eng. Science, 10, 1279-1299.

[4] ANAND, L. AND SPITZIG, W.A. (1980). *"Initiation of localized shear bands in plane strain"*. J. Mech. Phys. Sol., 28, 113-128.

[5] ASARO, R.J. (1985). *"Material modelling and failure modes in metal plasticity"*. Mechanics of Materials, 4, 343-373.

[6] AUBRY, D. AND MODARESSI, A. (1992). *"Strain localization in multipotential elastoplasticity"*. Int. J. Num. Meth. Eng., 34, 349-363.

[7] BARENBLATT, G.I. (1962). *"The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture"*. Advances in Appl. Mech., 7, 55-129.

[8] BATDORF, S.B. AND BUDIANSKY, B. (1949). *"A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip"*. NACA Techn. Note 1871.

[9] BATOZ, J.-L. AND DHATT, G. (1979). *"Incremental displacement algorithms for nonlinear problems"*. Int. J. Num. Meth. Eng., 14, 1262-1267.

[10] BAŽANT, Z. P. AND CEDOLIN, L. (1979). *"Blunt crack band propagation in finite element analysis"*. J. Eng. Mech. Division, ASCE, 105(EM2), 297-315.

[11] BAŽANT, Z. P. AND KIM, S. (1979). *"Plastic-fracturing theory for concrete"*. J. Eng. Mech. Division, ASCE, 105(EM3), 407-428.

[12] BAŽANT, Z. P. AND CEDOLIN, L. (1980). *"Fracture mechanics of reinforced concrete"*. J. Eng. Mech. Division, ASCE, 106(EM6), 1287-1306.

[13] BAŽANT, Z. P. (1980). *"Work inequalities for plastic fracturing materials"*. Int. J. Solids Structures, 16, 873-901.

[14] BAŽANT, Z. P. AND CEDOLIN, L. (1983). *"Finite element modeling of crack band propagation"*. J. Struct. Eng., ASCE, 109(1), 69-92.

[15] BAŽANT, Z. P. (1986). *"Mechanics of distributed cracking"*. Appl. Mech. Rev., ASME, 39(5), 675-705.

[16] BAŽANT, Z. P. AND CEDOLIN, L. (1991). *"Stability of structures: principles of elastic, inelastic and damage theories"*. Oxford University Press, New York.

[17] BELYTSCHKO, T., FISH, J. AND ENGELMANN, B.E. (1988). *"A finite element with embedded localization zones"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 70, 59-89.

[18] BELYTSCHKO, T., FISH, J. AND BAYLISS, A. (1990). *"The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 81, 71-89.

[19] BENALLAL, A., BILLARDON, R. AND GEYMONAT, G. (1989). *"Some mathematical aspects of the damage softening rate problem"*. Cracking and Damage. Strain Localization and Size Effect. Ed. Mazars, J. and Bažant, Z. P., Elsevier Applied Science, 247-258.

[20] Benallal, A. (1992). *"On localization phenomena in thermo-elasto-plasticity"*. Archives of Mechanics, 44(1), 15-29.

[21] Benallal, A. and Comi, C. (1995). *"Localisation analysis via a geometrical method"*. To appear in Int. J. Solids Structures.

[22] Betten, J. (1983). *"Damage tensors in continuum mechanics"*. J. Mécanique Théorique Appliquée, 2(1), 13-32.

[23] Bigoni, D. and Hueckel, T. (1990). *"A note on strain localization for a class of non-associative plasticity rules"*. Ingenieur Archiv, 60, 491-499.

[24] Bigoni, D. (1991). *"Localization and bifurcation in incremental non-associative plasticity: applications to brittle cohesive materials"* (in Italian). Ph.D. Thesis, University of Bologna, Italy.

[25] Bigoni, D. and Hueckel, T. (1991). *"Uniqueness and localization.-I. Associative and non-associative elastoplasticity.-II. Coupled elastoplasticity"*. Int. J. Solids Structures, 28(2), 197-214, 215-224.

[26] Bigoni, D. and Zaccaria, D. (1992). *"Loss of strong ellipticity in non-associative elasto-plasticity"*. J. Mech. Phys. Sol., 40(6), 1313-1331.

[27] Bolzon, G., Maier, G. and Novati, G. (1994). *"Some aspects of quasi-brittle fracture analysis as a linear complementarity problem"*. In Bažant, Z.P., Bittnar, Z., Jirásek, M. and Mazars, J. eds., Fracture and Damage in Quasibrittle structures, Proc. of the US-Europe Workshop held in Prague, Czech republic, September 21-23, 1994 E & FN Spon, London, 1994, 159-174.

[28] Borré, G. and Maier, G. (1989). *"On linear versus nonlinear flow rules in strain localization analysis"*. Meccanica, 24, 36-41.

[29] Brodlie, K.W., Gourlay, A.R. and Greenstadt, J. (1973). *"Rank-one and rank-two corrections to positive definite matrices expressed in product form"*. J. Inst. Maths Applics, 11, 73-82.

[30] Carol, I., Bažant, Z. P. and Prat, P. C. (1991). *"Geometric damage tensor based on microplane model"*. J. Eng. Mech., ASCE, 117(10), 2429-2448.

[31] Carol, I., Prat, P.C. and Gettu, R. (1993). *"Numerical analysis of mixed-mode fracture of quasi-brittle materials using a multicrack constitutive model"*. Mixed-Mode Fracture and Fatigue, ESIS publ. N. 14, Ed. Rossmanith, H.P. and Miller, K.J., Mechanical Engineering Publications, London, 319-331.

[32] Carol, I., Rizzi, E., and Willam, K. (1994a). *"Towards a general formulation of elastic degradation and damage based on a loading surface"*. Proc. Computational Modelling of Concrete Structures, (EURO-C 1994), March 22-25, 1994, Innsbruck, Austria, Ed. H. Mang, N. Bićanić and R. de Borst, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1994, 199-434.

[33] Carol, I., Rizzi, E. and Willam, K. (1994b). *"A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface"*. Int. J. Solids Structures, 31(20), 2835-2865.

[34] Carol, I. and Prat, P.C. (1995). *"A multicrack model based on the theory of multisurface plasticity and two fracture energies"*. In Owen, D.R.J., Oñate, E. and Hinton, E. eds., Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, Proc. of Complas IV, Barcelona, Spain, April 3-6, 1995, 1583-1594.

[35] Carol, I., Rizzi, E. and Willam, K. (1995a). *"Current issues in elastic degradation and damage"*. In Sture, S. ed., Proc. of 10^{th} ASCE Eng. Mech. Specialty Conf., CU-Boulder, CO, USA, May 21-24, 1995.

[36] Carol, I., Rizzi, E. and Willam, K. (1995b). *"On the characterization of damage variables in elastic-degrading materials"*. In preparation.

[37] Carpinteri, A. (1989a). *"Softening and snap-back instability of softening solids"*. Int. J. Num. Meth. Eng., 29, 1521-1538.

[38] Carpinteri, A. (1989b). *"Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: two different explanations based on fracture mechanics"*. Int. J. Solids Structures, 25, 407-429.

[39] Cedolin, L., Dei Poli, S. and Iori, I. (1987). *"Tensile behavior of concrete"*. J. Eng. Mech., ASCE, 113(3), 431-449.

[40] Cen, Z. and Maier, G. (1992). *"Bifurcations and instabilities in fracture of cohesive-softening structures: a boundary element analysis"*. Fatigue Frac. Eng. Mater. Struct., 15(9), 911-928.

[41] Chen, Z. and Schreyer, H.L. (1990). *"A numerical solution scheme for softening problems involving total strain control"*. Computers and Structures, 37(6), 1043-1050.

[42] Chow, C. L. and Wang, J. (1987). *"An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture"*. Eng. Fracture Mech., 27(5), 547-558.

[43] Chow, C. L. and Wang, J. (1988). *"Ductile fracture characterization with an anisotropic continuum damage theory"*. Eng. Fracture Mech., 30(5), 547-563.

[44] Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W. (1979). *"A class of phenomenological corner theories of plasticity"*. J. Mech. Phys. Sol., 27, 465-487.

[45] Coleman, B.D. and Gurtin, M.E. (1967). *"Thermodynamics with internal state variables"*. The J. of Chemical Physics, 47(2), 597-613.

[46] Comi, C., Corigliano, A. and Maier, G. (1992). *" Dynamic analysis of elastoplastic softening discretized structures"*. J. Eng. Mech., ASCE, 118(12), 2352-2375.

[47] Comi, C. and Perego, U. (1994). *"A unified approach for variationally consistent finite elements in elastoplasticity"*. To appear in Computer Meth. Appl. Mech. Eng.

[48] Comi, C. and Perego, U. (1995). *"A regularization technique for elastoplastic softening analyses based on generalized variables"*. In Owen, D.R.J., Oñate, E. and Hinton, E. eds., Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, Proc. of Complas IV, Barcelona, Spain, April 3-6, 1995, 535-546.

[49] Cordebois, J. P. and Sidoroff, F. (1982). *"Endommagement anisotrope in élasticité et plasticité"* (in French). J. Mécanique Théorique Appliquée, No. Special 1982, 45-60.

[50] Corigliano, A. (1993). *"Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination"*. Int. J. Solids Structures, 30(20), 2779-2811.

[51] Costin, L. S. (1985). *"Damage mechanics in the post-failure regime"*. Mechanics of Materials, 4, 149-160.

[52] Cowin, S. C. (1985). *"The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor"*. Mechanics of Materials, 4, 137-147.

[53] Crisfield, M.A. (1981). *"A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through"*. Computers and Structures, 13, 55-62.

[54] Crisfield, M.A. (1983). *"An arc-length method including line searches and accelerations"*. Int. J. Num. Meth. Eng., 19, 1269-1289.

[55] Crisfield, M.A. (1984). *"Accelerating and damping the modified Newton-Raphson method"*. Computers and Structures, 18(3), 395-407.

[56] de Borst, R. (1987). *"Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids"*. Computers and Structures, 25(2), 211-224.

[57] de Borst, R. (1988). *"Bifurcations in finite element models with a non-associated flow law"*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 116, 99-116.

[58] de Borst, R. (1992). *"Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects"*. Int. J. Num. Anal. Meth. Eng., 35, 521-539.

[59] de Borst, R., Sluys, L.J., Mühlhaus, H.-B. and Pamin, J. (1993). *"Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation"*. Eng. Computations, 10, 99-121.

[60] Dennis, J.E. and Schnabel, R.B. (1983). *"Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations"*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.

[61] Desoyer, T. and Cormery, F. (1994). *"On uniqueness and localization in elastic-damage materials"*. Int. J. Solids Structures, 31(5), 733-744.

[62] Dietsche, A. (1993). *"Lokale Effekte in linear-elastischen und elasto-plastischen Cosserat-Kontinua"* (in German). Ph.D. Thesis, Institute of Mechanics, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany.

[63] Dietsche, A., Steinmann, P. and Willam, K. (1993). *"Micropolar elastoplasticity and its role in localization"*. Int. J. Plasticity, 9(7), 813-831.

[64] di Prisco, C., Matiotti, R. and Nova, R. (1992). *"A mathematical model of grouted sand allowing for strength degradation"*. Numerical Models in Geomechanics, Proceedings of the NUMOG IV Conf., Swansea, U.K., Aug. 24-27, 1992, Ed. Pande, G. N. and Pietruszczak, S., Balkema, Rotterdam, 25-35.

[65] di Prisco, M. and Mazars, J. (1994). *"A non-local damage model to investigate mixed mode cracking in concrete"*. Proc. Computational Modelling of Concrete Structures, (EURO-C 1994), March 22-25, 1994, Innsbruck, Austria, Ed. H. Mang, N. Bićanić and R. de Borst, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1994, 145-154.

[66] Dougill, J. W. (1976). *"On stable progressively fracturing solids"*. J. Appl. Math. Phys., 27, 423-437.

[67] Dougill, J. W. (1980). *"Further consideration of progressively fracturing solids"*. J. Eng. Mech. Division, ASCE, 106(EM5), 1021-1038.

[68] Dragon, A. and Mróz, Z. (1979). *"A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete"*. Int. J. Eng. Science, 17, 121-137.

[69] Drucker, D.C. (1964). *"On the postulate of stability of materials in the mechanics of continua"*. J. de Mécanique, 3(2), 235-249.

[70] Dugdale, D.S. (1960). *"Yielding of steel sheets containing slits"*. J. Mech. Phys. Solids, 8, 100-104.

[71] Etse, G. (1992). *"Theoretische und numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton"* (in German). Ph.D. Thesis, Institute of Mechanics, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany.

[72] Etse, G. and Willam, K. (1994). *"Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete"*. J. Eng. Mech., ASCE, 120(9), 1983-2011.

[73] Feenstra, P.H. (1993). *"Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete"*. Ph.D. Thesis, Delft University Press, Delft, The Netherlands.

[74] Forde, B.W.R. and Stiemer, S.F. (1987). *"Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis"*. Computers and Structures, 27(5), 625-630.

[75] Fung, Y. C. (1965). *"Foundations of solid mechanics"*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.

[76] Germain, P. and Lee, E.H. (1973). *"On shock waves in elastic-plastic solids"*. J. Mech. Phys. Solids, 21, 359-382.

[77] Graff, K. F. (1975). *"Wave motion in elastic solids"*. Ohio State University Press, Columbus.

[78] Gurtin, M. E. (1972). *"The linear theory of elasticity"*. Mechanics of Solids, Ed. Truesdell, C. , Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[79] Guzina, B.B., Rizzi, E., Willam, K. and Pak R.Y.S. (1995). *"Failure prediction of smeared-crack formulations"*. J. Eng. Mech., ASCE, 121(1), 150-161.

[80] Hadamard, J. (1903). *"Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique"* (in French). Chelsea Publishing Company, New York, 1949.

[81] Han, D.J. and Chen, W. F. (1986). *"Strain-space plasticity formulation for hardening-softening materials with elastoplastic coupling"*. Int. J. Solids Structures, 22(8), 935-950.

[82] Hansen, N. R. and Schreyer, H. L. (1994). *"A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage"*. Int. J. Solids Structures, 31(3), 359-389.

[83] Hill, R. (1958). *"A general theory of uniqueness and stability in elatic-plastic solids."* J. Mech. Phys. Solids, 6, 236-249.

[84] Hill, R. (1962). *"Acceleration waves in solids"*. J. Mech. Phys. Solids, 10, 1-16.

[85] Hill, R. (1966). *"Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip"*. J. Mech. Phys. Sol., 14, 95-102.

[86] Hill, R. (1967). *"The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals"*. J. Mech. Phys. Sol., 15, 79-95.

[87] Hill, R. and Hutchinson, J.W. (1975). *"Bifurcation phenomena in the plane tension test"*. J. Mech. Phys. Sol., 23, 239-264.

[88] Hillerborg, A., Modéer, M. and Petersson, P.-E. (1976). *"Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements"*. Cement and Concrete Research, 6, 773-782.

[89] Hillerborg, A. (1983). *"Analysis of the sigle crack"*. Fracture Mechanics of Concrete, Chapter 4.1, Ed. Wittmann, F.H., Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam, 223-249.

[90] Hueckel, T. and Maier, G. (1977). *"Incrementally boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations: a rock mechanics oriented theory"*. Int. J. Solids Structures, 13, 1-15.

[91] Ichicawa, Y., Ito, T. and Mróz, Z. (1990). *"A strain localization condition applying multi-response theory"*. Ingenieur Archiv, 60, 542-552.

[92] Jessup, E.R. (1993). *"A case against a divide and conquer approach to the nonsymmetric eigenvalue problem"*. Applied Numerical Mathematics, 12, 403-420.

[93] Ju, J. W. (1989). *"On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects"*. Int. J. Solids Structures, 25(7), 803-833.

[94] JU, J. W. (1990). *"Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics"*. J. Eng. Mech., ASCE, 116(12), 2764-2770.

[95] KACHANOV, L. M. (1958). *"Time rupture process under creep conditions"* (in Russian). Izv. Akad Nauk S.S.S.R., Otd Tekh Nauk 8, 26-31.

[96] KACHANOV, M. (1992), *"Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts"*. Appl. Mech. Rev., 45(8), 304-334.

[97] KANATANI, K.-I. (1984). *"Distribution of directional data and fabric tensors"*, Int. J. Eng. Science, 22(2), 149-164.

[98] KLISINSKI, M., RUNESSON, K. AND STURE, S. (1991). *"Finite element with inner softening band"*. J. Eng. Mech., ASCE, 117(3), 575-587.

[99] KOITER, W.T. (1953). *"Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface"*. Quart. Appl. Math., 11(3), 350-354.

[100] KOLSKY, H. (1953). *"Stress waves in solids"*. Dover, New York, 1963.

[101] KRAJCINOVIC, D. AND FONSEKA, G. U. (1981). *"The continuous damage theory of brittle materials. 1-2"*. J. Appl. Mech., 48, 809-824.

[102] KRAJCINOVIC, D. (1989). *"Damage mechanics"*. Mechanics of Materials, 8, 117-197.

[103] KUPFER, H., HILSDORF, H.K. AND RUSCH, H. (1969). *"Behavior of concrete under compressive loadings"*, J. ACI, 66(8), 656-666.

[104] LARSSON, R., RUNESSON, K. AND OTTOSEN, N.S. (1993). *"Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization"*. I. J. Num. Meth. Eng., 36, 2087-2105.

[105] LECKIE, F. A. AND ONAT, E. T. (1980). *"Tensorial nature of damage measuring internal variables"*. Proc. IUTAM Symp. on Nonlinearities in Structural Analysis, Senlis, France, Ed. Hult, J. and Lemaitre, J., Springer Verlag, 140-155.

[106] LEMAITRE, J. (1992). *"A course on damage mechanics"*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

[107] LEMAITRE, J. AND CHABOCHE, J. L. (1985). *"Mècanique des materiaux solides"* (in French). Dunod, Paris.

[108] LORET, B. (1987). *"Non-linéarité incrémentale et localisation des déformations: quelques remarques"* (in French). J. Mécanique Théorique Appliquée, 6(3), 423-459.

[109] LORET, B. (1991). *"Acceleration waves, flutter instabilities and stationary discontinuities in inelastic porous media"*. J. Mech. Phys. Sol., 39(5), 569-606.

[110] LOTFI, H.R. AND SHING, P.B. (1991). *"An appraisal of smeared crack models for masonry shear wall analysis"*. Comput. Struct., 41(3), 413-425.

[111] LOTFI, H.R. (1992). *"Finite element analysis of fracture in concrete and masonry structures"*. Ph.D. Thesis, University of Colorado, CEAE Department, Boulder, U.S.A.

[112] LOTFI, H.R. AND SHING, P.B. (1994). *"Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements"*. Submitted to Int. J. Numer. Meth. Eng..

[113] LOVE, A. E. H. (1892). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover Publications, New York, 1944.

[114] LUBARDA, V.A. AND KRAJCINOVIC, D. (1993). *"Damage tensors and the crack density distribution"*. Int. J. Solids Structures, 30(20), 2859-2877.

[115] Lubliner, J. (1990). *"Plasticity theory"*. Mac Millan, New York.

[116] Maier, G. (1968). *"On softening flexural behaviour in elastic-plastic beams"*. Studi e Ricerche, 8, Corso Perfezionamento Costruzioni in C.A., Politecnico di Milano, 85-117, 1986, (English version of the paper appeared in Italian in 1968).

[117] Maier, G. (1969). *"'Linear' flow-laws of elastoplasticity: a unified general approach"*. Rendiconti Accademia Nazionale Lincei, Serie VIII, Vol. XLVII(5).

[118] Maier, G. (1970a). *"A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes"*. Meccanica, 5(1), 54-66.

[119] Maier, G. (1970b). *"A minimum principle for incremental elastoplasticity with non-associated flow laws"*. J. Mech. Phys. Sol., 18, 319-330.

[120] Maier, G. (1971). *"Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects"*. Int. J. Solids Structures, 7, 345-372.

[121] Maier, G. and Hueckel, T. (1979). *"Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials"*. Int. J. Rock Mech. Mining Sciences, 16, 77-92.

[122] Maier, G., Novati, G. and Cen, Z. (1993). *"Symmetric Galerkin boundary element method for quasi-brittle-fracture and frictional contact problems"*. Computational Mech., 13, 74-89.

[123] Mandel, J. (1965). *"Géneralisation de la théorie de plasticité de W.T. Koiter"*. Int. J. Solids Structures, 1, 272-295.

[124] Marchand, A. and Duffy, J. (1988). *"An experimental study of the formation process of adiabatic shear bands in a structural steel"*. J. Mech. Phys. Sol., 36(3), 251-283.

[125] Maugin, G. A. (1992). *"The thermomechanics of plasticity and fracture"*. Cambridge University Press, Cambridge.

[126] Maxwell, J.C. (1873). *"A treatise on electricity and magnetism"*. Dover Publications, U.S.A., 1954.

[127] Mazars, J. (1982). *"Mechanical damage and fracture of concrete structures"*. Advances in fracture research (Fracture 81), Pergamon Press, Oxford, 4, 1499-1506.

[128] Mazars, J., (1984). *"Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure"*. Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Paris 6, LMT, Cachan, France.

[129] Mazars, J. and Lemaitre, J. (1984). *"Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete"*. Application of Fracture Mechanics to Cementitiuos Composites, NATO Advanced Research Workshop, 4-7 September 1984, Northwestern University, Ed. Shah, S. P., 375-378.

[130] Mazars, J. and Saouridis, C. (1992). *"Prediction of the failure and size effect in concrete via a bi-scale damage approach"*. Eng. Computations, 9, 329-344.

[131] Mazars, J., Dube, J. F. and Bournazel, J. P. (1992). *"Damage models and modelling strategies for concrete structures under severe loadings"*. Fracture Mechanics of Concrete Structures, FRAMCOS 1, Ed. Bažant, Z. P., Elsevier, 260-268.

[132] Mirsky L. (1955). *"An introduction to linear algebra"*. Dover, New York, 1990.

[133] Mróz, Z. (1963). *"Non-associated flow laws in plasticity"*. J. de Mécanique, 2(1), 21-42.

[134] Mühlhaus, H.-B. and Aifantis, E.C. (1990). *"A variational principle for gradient plasticity"*. Int. J. Solids Structures, 28(7), 845-857.

[135] Murakami, S. and Ohno, N. (1980). *"A continuum theory of creep and creep damage"*. Creep in Structures, Ed. Ponter, A. R. S. et al., Springer Verlag, Berlin, Germany, 422-444.

[136] Murakami, S. (1987). *"Anisotropic damage theory and its application to creep crack growth analysis"*. Constitutive Laws for Engineering Materials, Ed. Desai, C. S. et al., Elsevier, 187-194.

[137] Nadai, A. (1931). *"Plasticity"*. McGraw-Hill, New York.

[138] Naghdi, P.M. and Trapp, J.A. (1975). *"The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space"*. Int. J. Eng. Science, 13, 785-797.

[139] Needleman, A. (1988). *"Material rate-dependence and mesh sensitivity in localization problems"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 67, 69-85.

[140] Needleman, A. and Ortiz, M. (1991). *"Effect of boundaries and interfaces on shear-band localization"*. Int. J. Solids Structures, 28(7), 859-877.

[141] Neilsen, M. K. and Schreyer, H. L. (1992). *"Bifurcations in elastic-damaging materials"*. Damage Mechanics and Localization, Ed. Ju, J. W. and Valanis, K. C., ASME, AMD-Vol. 142, MD-Vol. 34, 109-123.

[142] Neilsen, M. K. and Schreyer, H. L. (1993). *"Bifurcations in elastic-plastic materials"*. Int. J. Solids Structures, 30(4), 521-544.

[143] Nemat-Nasser, S. and Gao, Y.C. (1988). *"Discontinuities in elastic-plastic solids"*. Mechanics of Materials, 7, 215-229.

[144] Nova, R. (1994). *"Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programmes"*. J. of the Mech. Behavior of Materials, 5(2), 193-201.

[145] Olmstead, W.E., Nemat-Nasser, S. and Ni, L. (1994). *"Shear bands as surfaces of discontinuity"*. J. Mech. Phys. Sol., 42(4), 697-709.

[146] Ord, A., Vardoulakis, I. and Kajewski, R. (1991). *"Shear band formation in Gosford sandstone"*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr., 28(5), 397-409.

[147] Ortiz, M. (1985). *"A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete"*. Mechanics of Materials, 4, 67-93.

[148] Ortiz, M. (1987). *"An analytical study of the localized failure modes of concrete"*. Mechanics of Materials, 6, 159-174.

[149] Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A. (1987). *"A finite element method for localized failure analysis"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 90, 781-804.

[150] Ortiz, M. and Quigley, J.J. (1987). *"Adaptive mesh refinement in strain localization problems"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 61, 189-214.

[151] Ottosen, N. S., and Runesson, K. (1991a). *"Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity"*. Int. J. Solids Structures, 27(4), 401-421.

[152] Ottosen, N. S., and Runesson, K. (1991b). *"Acceleration waves in elasto-plasticity"*. Int. J. Solids Structures, 28(2), 135-159.

[153] Palmer, A.C., Maier. G. and Drucker, D.C. (1967). *"Normality relations and convexity of yield surfaces for unstable materials or structural elements"*. J. Appl. Mech., June 1967, 464-470.

[154] Pamin, J. (1992). *"Mesh sensitivity in gradient-dependent softening plasticity - I. A rectangular element for plane strain/stress"*. Internal Report TU-DELFT 25-2-92-2-01, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.

[155] Pamin, J. (1993). *"Mesh sensitivity in gradient-dependent softening plasticity - II. Application of Rankine and Drucker-Prager yield criteria"*. Internal Report TU-DELFT 25-2-93-2-14, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.

[156] Pamin, J. (1993). *"Mesh sensitivity in gradient-dependent softening plasticity - III. Finite element formulations"*. Internal Report TU-DELFT 25-2-93-2-15, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.

[157] Pamin, J. (1994). *"Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena"*. Ph.D. Thesis, Delft University Press, Delft, The Netherlands.

[158] Pearson, J.D. (1969). *"Variable metric methods of minimisation"*. The Computer J., 12, 171-178.

[159] Perić, D. (1990). *"Localized deformation and failure analysis of pressure sensitive granular materials"*. Ph.D. Thesis, University of Colorado, CEAE Department, Boulder, U.S.A.

[160] Perzyna, M.K.D. and Perzyna, P. (1993). *"Adiabatic shear band localization in elastic-plastic single crystals"*. Int. J. Solids Structures, 30(1), 61-89.

[161] Petryk, H. (1989). *"On constitutive inequalities and bifurcation in elastic-plastic solids with a yield-surface vertex"*. J. Mech. Phys. Sol., 37(2), 265-291.

[162] Petryk, H. (1992). *"Material instability and strain-rate discontinuities in incrementally nonlinear continua"*. J. Mech. Phys. Sol., 40(6), 1227-1250.

[163] Petryk, H. and Thermann, K. (1992). *"On discretized plasticity problems with bifurcations"*. Int. J. Solids Structures, 29(6), 745-765.

[164] Pietruszczak, S. and Mróz, Z. (1981). *"Finite element analysis of deformation of strain-softening materials"*. Int. J. Num. Meth. Eng., 17, 327-334.

[165] Pietruszczak, S. and Niu, X. (1993). *"On the description of localized deformation"*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 17, 791-805.

[166] Pijaudier-Cabot, G. and Bažant, Z. P. (1987). *"Nonlocal damage theory"*. J. Eng. Mech., ASCE, 113(10), 1512-1533.

[167] Pijaudier-Cabot, G. and Benallal, A. (1993). *"Strain localization and bifurcation in a non local continuum"*. Int. J. Solids Structures, 30(13), 1761-1775.

[168] Pramono, E. and Willam, K. (1989). *"Implicit integration of composite yield surfaces with corners"*. Eng. Comput., 6, 186-197.

[169] Prevost, J. H. (1984). *"Localization of deformations in elastic-plastic solids"*. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 8, 187-196.

[170] Ramm, E. (1981). *"Strategies for tracing the nonlinear response near limit points"*. Proc. of Europe-US Workshop, (Ed. Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K.J.), 63-89, Ruhr-Universität Bochum, Germany, July 28-31, 1980, Springer-Verlag.

[171] Raniecki, B. and Bruhns, O.T. (1981). *"Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain."* J. Mech. Phys. Solids, 29(2), 153-172.

[172] Rayleigh, J. W. S. (1896). *"The Theory of Sound"*, Dover Publications, New York, Vol. 1-2, 1945.

[173] RESENDE, L. (1987). *"A damage mechanics constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 60, 57-93.

[174] RICE, J. R. (1976). *"The localization of plastic deformations"*. Theoretical and Applied Mechanics, Koiter, W. T. (Ed.), North-Holland Publ. Comp., 207-220.

[175] RICE, J.R. AND RUDNICKI, J.W. (1980). *"A note on some features of the theory of localization of deformation"*. Int. J. Solids Structures, 16, 597-605.

[176] RIKS, E. (1970). *"On the numerical solution of snapping problems in the theory of elastic stability"*. Ph.D. Thesis, SUDAAR No.401, Stanford University, Stanford, California, U.S.A.

[177] RIKS, E. (1979). *"An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems"*. Int. J. Solids Structures, 15, 529-551.

[178] RIZZI, E. (1993a). *"Localization analysis of damaged materials"*. Tec. Rep. CU/SR-93/5, CEAE Dept., University of Colorado, Boulder, U.S.A.

[179] RIZZI, E. (1993b). *"Determinazione analitica e numerica di direzioni di localizzazione in modelli a danneggiamento scalare"* (in Italian). Atti Settimo Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, AIMETA, June 1-3, 1993, Trieste, Italy, 309-314.

[180] RIZZI, E., CAROL, I. AND WILLAM, K. (1994). *"Localization analysis of constitutive models for elastic degradation"*. Proc. Computational Modelling of Concrete Structures, (EURO-C 1994), March 22-25, 1994, Innsbruck, Austria, Ed. H. Mang, N. Bićanić and R. de Borst, Pineridge Press, Swansea, U.K. 425-434.

[181] RIZZI, E. (1994). *"Fracture-energy-based regularization of a scalar damage model"*. Atti Ottavo Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, AIMETA, June 15-17, 1994, Torino, Italy, 107-112.

[182] RIZZI, E. AND WILLAM, K. (1994). *"Spatial discretization of strain localization"*. Proc. Computer Aided Assessment and Control, (LOCALIZED DAMAGE 94), Udine, Italy, June 21-23, 1994, Ed. M.H. Aliabadi, A. Carpinteri, S. Kaliszky and D.J. Cartwright, Computational Mechanics Publications, Southampton, U.K., 553-560.

[183] RIZZI, E., CAROL, I. AND WILLAM, K. (1995). *"Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage"*. J. Eng. Mech., ASCE, 121(4), 541-554.

[184] RIZZI, E., WILLAM, K. AND CAROL, I. (1995). *"Strain localization for constitutive models combining plasticity with elastic degradation"*. In Owen, D.R.J., Oñate, E. and Hinton, E. eds., Computational Plasticity: Fundamentals and Applications, Proc. of Complas IV, Barcelona, Spain, April 3-6, 1995, 623-634.

[185] RIZZI, E. AND WILLAM, K. (1995a). *"Constitutive singularities of coupled elastic degradation and plasticity"*. In Sture, S. ed., Proc. of 10^{th} ASCE Eng. Mech. Specialty Conf., CU-Boulder, CO, USA, May 21-24, 1995.

[186] RIZZI, E. AND WILLAM, K. (1995b). *"Rank-one updates and failure indicators in multi-dissipative materials"*. Tec. Rep. CU/SR-95/1, CEAE Dept., University of Colorado, Boulder, U.S.A.

[187] ROTS, J.G. AND BLAAUWENDRAAD, J. (1989). *"Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating?"*. HERON, 34(1).

[188] RUDNICKI, J.W. AND RICE, J.R. (1975). *"Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials"*. J. Mech. Phys. Solids, 23, 371-394.

[189] RUNESSON, K. AND MRÓZ, Z. (1989). *"A note on nonassociated plastic flow rules"*. Int. J. Plasticity, 5, 639-658.

[190] Runesson, K., Ottosen, N.S., and Peric, D. (1991). *"Discontinuous bifurcation of elasto-plastic solutions in plane stress and plane strain"*. Int. J. Plasticity, 7, 99-121.

[191] Ryzhak, E.I. (1993). *"On stable deformation of 'unstable' materials in a rigid triaxial testing machine"*. J. Mech. Phys. Solids, 41(8), 1345-1356.

[192] Sabban, S. A. (1989). *"Property analysis and incremental formulation of J_2 elasto-plastic solids in plane stress"*. Ph.D. Thesis, University of Colorado, CEAE Department, Boulder, U.S.A.

[193] Schweizerhof, K.H. and Wriggers, P. (1986). *"Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 59, 261-279.

[194] Sewell, M.J. (1972). *"A survey of plastic buckling"*. Ch. 5 in Stability, Ed. Leipholz, H.H.E., University of Waterloo, April, 1972.

[195] Sewell, M.J. (1973). *"A yield-surface corner lowers the buckling stress of an elastic-plastic plate under compression"*. J. Mech. Phys. Solids, 21, 19-45.

[196] Sewell, M.J. (1974). *"A plastic flow rule at a yield vertex"*. J. Mech. Phys. Solids, 22, 469-490.

[197] Sherman, J. and Morrison, W. J. (1950). *"Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix"*. The Annals of Mathematical Statistics, XXI, 124-127.

[198] Sidoroff, F. (1981). *"Description of anisotropic damage application to elasticity"*. Proc. IUTAM Symp. on Nonlinearities in Structural Analysis, Senlis, France, Ed. Hult, J. and Lemaitre, J., Springer Verlag, 237-244.

[199] Simo, J. C. and Ju, J. W. (1987). *"Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation - II. Computational aspects"*. Int. J. Solids Structures, 23(7), 821-840, 841-869.

[200] Simo, J.C., Kennedy, J.G. and Govindjee, S. (1988). *"Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms"*. Int. J. Num. Meth. Eng., 26, 2161-2185.

[201] Simo, J. C., and Rifai, M.S. (1990). *"A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes"*. Int. J. Num. Meth. Eng., 29, 1595-1638.

[202] Simo, J.C., Oliver, J. and Armero, F. (1993). *"An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids"*. Computational Mech., 12, 277-296.

[203] Sluys, L. J. (1992). *"Wave propagation, localization and dispersion in softening solids"*. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.

[204] Sobh, N. A. (1987). *"Bifurcation analysis of tangential material operators"*. Ph.D. Thesis, University of Colorado, CEAE Department, Boulder, U.S.A.

[205] Sobh, N. A., Sabban, S. A., Sture, S. and Willam, K. (1990). *"Failure diagnostics of elasto-plastic operators"*. Numerical Methods in Engineering, Theory and Applications, Proceedings of the NUMETA90 Conf., Swansea, Ed. Pande, G. N. and Middleton, J., Elsevier Applied Science, London, Vol. 2, 775-794.

[206] Steinmann, P. and Willam, K. (1991a). *"Performance of enhanced finite element formulations in localized failure computations"*. Computer Meth. Appl. Mech. Eng., 90, 845-867.

[207] Steinmann, P. and Willam, K. (1991b). *"Finite elements for capturing localized failure"*. Archives Appl. Mech., 61, 259-275.

[208] Steinmann, P. and Willam, K. (1991c). *"A critical assessment of FE-performance in localized failure analysis"*. Nonlinear Computational Mechanics, Ed. Wriggers, P. and Wagner, W., Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 586-605.

[209] Steinmann, P. and Willam, K. (1992) *"Adaptive techniques for localization analysis"*. Symp.-Vol. on Adaptive, Multilevel and Hierarchical Computational Strategies, ASME-WAM '92, A. Noor ed., ASME New York, 437-462.

[210] Steinmann, P. (1992). *"Lokalisierungsprobleme in der Plasto-Mechanik"* (in German). Ph.D. Thesis, Institute of Mechanics, University of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany.

[211] Steinmann, P. and Willam, K. (1994). *"Finite Element Analysis of Elastoplastic Discontinuities"*. J. Eng. Mech. , ASCE, 120(11), 2428-2442.

[212] Stören, S. and Rice, J. R. (1975). *"Localized necking in thin sheets"*. J. Mech. Phys. Solids, 23, 421-441.

[213] Takemori, M.T. (1990). *"Competition between crazing and shear flow during fatigue"*. Crazing in Polymers, Ed. Kausch, H.H., Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[214] Thomas, T. Y. (1961). *"Plastic flow and fracture in solids"*. Academic Press, London.

[215] Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K.K. (1981). *"Flow localization in the plane strain tensile test"*. J. Mech. Phys. Sol., 29(2), 115-142.

[216] Tvergaard, V. (1987). *"Effect of yield surface curvature and void nucleation on plastic flow localization"*. J. Mech. Phys. Sol., 35(1), 43-60.

[217] Valanis, K. C. (1985). *"On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials"*. J. Appl. Mech., ASME, 52, 649-653.

[218] Valanis, K. C. (1990). *"A theory of damage in brittle materials"*. Eng. Fracture Mech., 36, 403-416.

[219] Vardulakis, I. and Aifantis, E.C. (1991). *"A gradient flow theory of plasticity for granular materials"*. Acta Mechanica, 87, 197-217.

[220] Wempner, G.A. (1971). *"Discrete approximations related to nonlinear theories of solids"*. Int. J. Solids Structures, 7, 1581-1599.

[221] Willam, K., Sobh, N. A. and Sture, S. (1987). *"Elastic-plastic tangent operators: localization study on constitutive and finite element levels"*. Advances in Inelastic Analysis, Nakazawa, S., Willam, K. and Rebelo, N., Ed., ASME AMD-Vol. 88, New York, 107-126.

[222] Willam, K. (1989). *"Recent issues in computational plasticity"*. Proceedings of Complas II, Part II, Barcelona, Spain, Sept. 18-22, Pineridge Press Swansea, 1353-1377.

[223] Willam, K. and Etse, G. (1990). *"Failure assessment of the extended Leon model for plain concrete"*. Proceedings of SCI-C 1990, Zell am See, Austria, April 4-6, Pineridge Press Swansea, 851-865.

[224] Willam, K. and Dietsche, A. (1992a). *"Regularization of localized failure computations"*. Proceedings of Complas III, Part II, Barcelona, Spain, April 6-10, Ed. Owen, D.R.J., Oñate, E. and Hinton, E., Pineridge Press, Swansea, 2185-2204.

[225] Willam, K. and Dietsche, A. (1992b). *"Fundamental aspects of strain-softening descriptions"*. Fracture Mechanics of Concrete Structures, FRAMCOS 1, Ed. Bažant, Z. P., Elsevier, 227-238.

[226] Willam, K., Etse, G. and Münz (1993). *"Localized failure in elastic-viscoplastic materials"*. Proc. Concreep 5, Barcelona, Spain, Sept. 6-9, 1993, Ed. Bažant, Z. P. and Carol, I., E&FN Spon, London, 327-344.

[227] Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P. and Ghaboussi, J. (1973). *"Incompatible displacement models"*. Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Ed. Fenves, S.J. et al., Academic Press, New York, 43-57.

[228] Xu, X.-P. and Needleman, A. (1994). *"Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids"*. J. Mech. Phys. Sol., 42(9), 1397-1434.

[229] Yazdani, S. and Schreyer, H. L. (1988). *"An anisotropic damage model with dilatation for concrete"*. Mechanics of Materials, 7, 231-244.

[230] Yazdani, S. and Schreyer, H. L. (1990). *"Combined plasticity and damage mechanics model for concrete"*. J. Eng. Mech., ASCE, 116(7), 1435-1450.

[231] Ziegler, H. (1959). *"A modification of Prager's hardening rule"*. Quart. Appl. Math., 17(1), 55-65.

[232] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1991). *The finite element method*, Vol. 1-2, McGraw-Hill Book Company, UK.