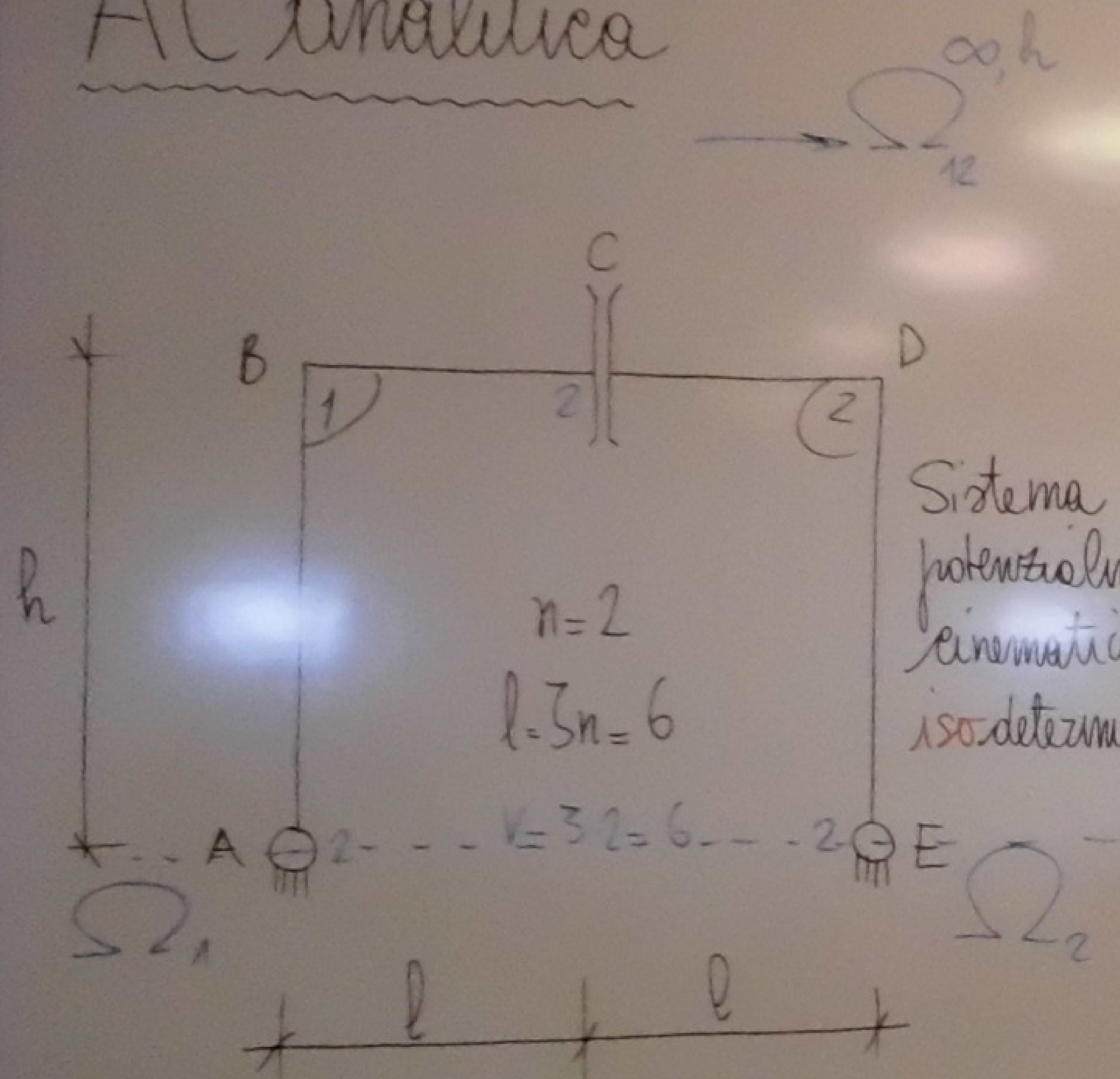
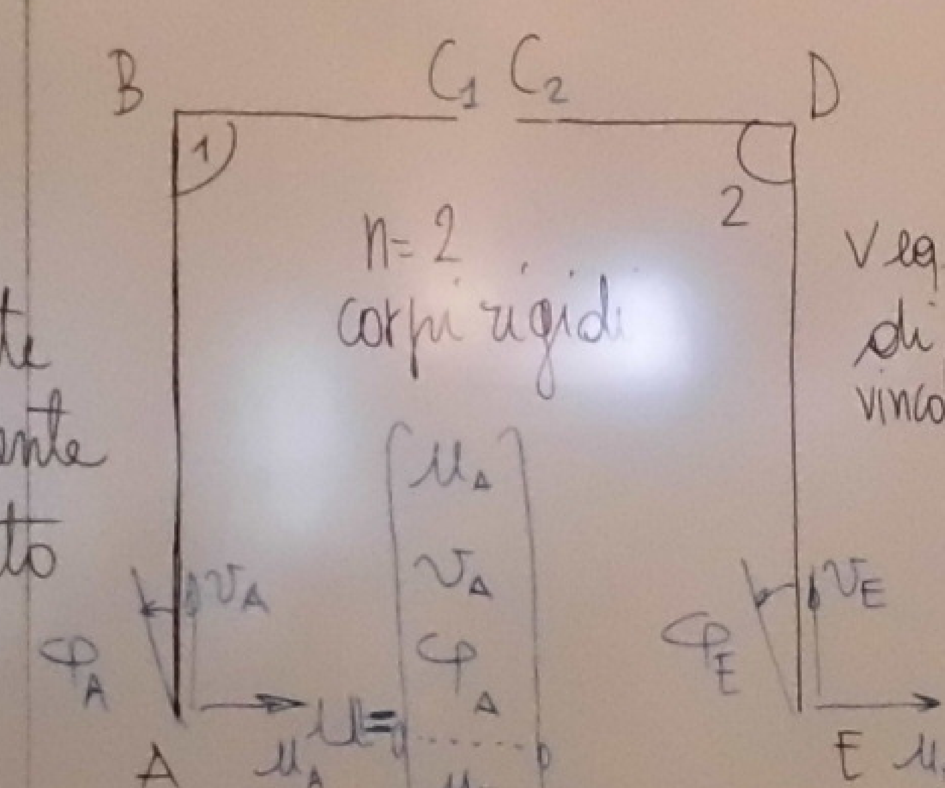
# AC analitica




Sistema potenzialmente cinematicamente isodeterminato

AC Geometrica: trattasi di arco a tre cerniere allineate labile $(L=1)$ ⇒ cinematicamente indet.

## Approccio analitico (completo)




$n=2$ corpi rigidi

V eqn di vincolo

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{pmatrix}_{(l=3n\times 1)}$$

vettore dei gdl scelti, con componenti in numero pari a $l=3n$

## Scrittura delle eqn di vincolo corrispondenti ai gdv rimossi

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \Delta u_C = u_{C2} - u_{C1} = 0 \\ \Delta\varphi_C = \varphi_{C2} - \varphi_{C1} = 0 \\ u_E = 0 \\ v_E = 0 \end{cases}$$

$$\underline{V}_{v\times 1} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \Delta u_C \\ \Delta\varphi_C \\ u_E \\ v_E \end{pmatrix}$$

vettore delle componenti di spostamento in corrispondenza dei gdv rimossi, in numero V

$$\begin{cases} u_A = 1\, u_A \\ v_A = 1\, v_A \\ \Delta u_C = 1\, u_E - h\varphi_E - 1\, u_A + h\varphi_A \\ \Delta\varphi_C = 1\, \varphi_E - 1\, \varphi_A \\ u_E = 1\, u_E \\ v_E = 1\, v_E \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 5 \\ L = l - r = 6 - 5 = 1 \end{cases}$$

sistema labile

$V = l$

⇒ $\det[C] = l - l = 0$

C è singolare ⇒ sist. labile

grado di labilità

grado di indeterm. cinematica

$$\Rightarrow L = N[C] = l - r[C] \geq 0$$

dimensione del nucleo della matrice C

n° delle soluz. non banali $\underline{u} \neq 0$ del sistema di congruenza

n° di incognite del sistema di congruenza

## Scrittura matriciale

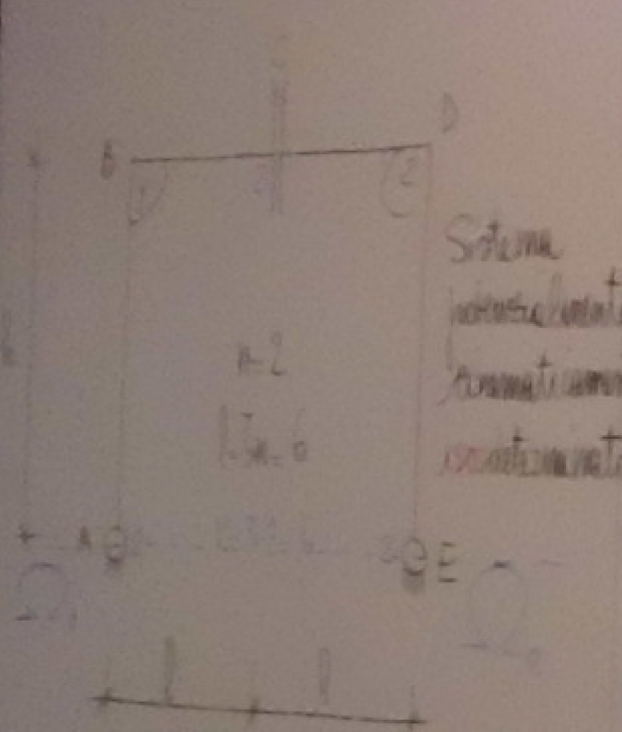
$$\underline{V}_{v\times 1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_A & v_A & \varphi_A & u_E & v_E & \varphi_E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{pmatrix} = C\,\underline{u}$$

$C_{v\times l}$

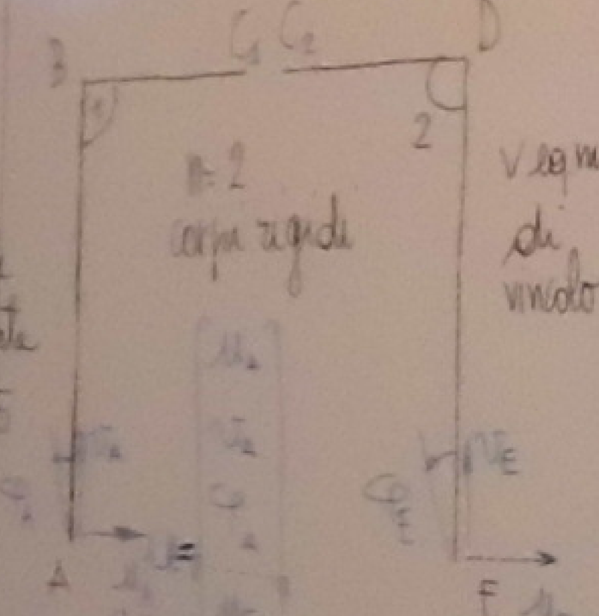
Sistema di congruenza


AC analitica
Sistema potenzialmente cinematicamente isodeterminato
n=2
l=3n=6
Approccio analitico (completo)
n=2 corpi rigidi
v eqni di vincolo
Scrittura delle eqni di vincolo corrispondenti ai gdv rimossi
uA = 0
vA = 0
ΔuC = uC2 - uC1 = 0
ΔφC = φC2 - φC1 = 0
uE = 0
vE = 0
r=5
L = l-r = 6-5 = 1
sistema labile
dimensione del nucleo della matrice C
grado di labilità
grado di indeterm. cinematica
L = N[C] = l - r[C] ≥ 0
n° delle soluz. non banali u≠0 del sistema di congruenza
n° di incognite del sistema di congruenza
rango di C
rango pieno
deficiente di rango
v=l
Scrittura matriciale (relazione lineare tra V e u)
uA vA φA uE vE φE
1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0
-1 0 h 1 0 -h
0 0 -1 0 0 1
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
C
v×(l=3n)
Sistema di congruenza
= C·u = V = 0
matrice di congruenza o di compatibilità
sistema lineare
eqni di vincolo
r[C] ≤ min{v, l}
= 0 labile, e indet.
vincoli non cedevoli
proprietà algebriche della matrice di congruenza determ. le condiz. di esistenza di soluz. non banali u≠0

AC analitico



Approccio analitico completo



Scrittura delle eq.ni di vincolo corrispondenti ai gdl rimossi

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \Delta u_C = u_{C2} - u_{C1} = 0 \\ \Delta\varphi_C = \varphi_{C2} - \varphi_{C1} = 0 \\ u_E = 0 \\ v_E = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_A = u_A \\ v_A = v_A \\ \Delta u_C = u_E - h\varphi_E - u_A + h\varphi_A \\ \Delta\varphi_C = \varphi_E - \varphi_A \\ u_E = u_E \\ v_E = v_E \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 5 \\ L = l - r = 6 - 5 = 1 \end{cases}$$

sistema labile

# Scrittura matriciale (relazione lineare tra $\mathbb{V}$ e $\mathbb{u}$)

$$\underset{v\times 1}{\mathbb{V}} = \begin{array}{cccccc} u_A & v_A & \varphi_A & u_E & v_E & \varphi_E \end{array}$$

$$\underset{v\times 1}{\mathbb{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underset{v\times(l=3n)}{\mathbb{C}}} \underset{(l=3n)\times 1}{\begin{Bmatrix} u_A \\ v_A \\ \varphi_A \\ u_E \\ v_E \\ \varphi_E \end{Bmatrix}} = \mathbb{C}\cdot\mathbb{u} = \mathbb{V} = \mathbb{0}$$

eq.ni di vincolo

sist. ass.

vincoli non cedevoli

(nulli)

matrice di congruenza o di compatibilità

Sistema di congruenza

- sistema lineare omogeneo (vincoli non cedevoli)
- proprietà algebriche della matrice di congruenza determ. le condiz. di $\exists$nza di soluz. non banali $\mathbb{u} \neq \mathbb{0}$

dimensione del nucleo della matrice $\mathbb{C}$

grado di labilità

grado di indeterm. cinematica

$$L = N[\mathbb{C}] = l - r[\mathbb{C}] \geq 0$$

n° delle soluz. non banali $\mathbb{u} \neq 0$ del sistema di congruenza

n° di incognite del sistema di congruenza

rango di $\mathbb{C}$ (max n° di righe o di colonne linearm. indipend.)

rango pieno $= 0$ non labile, cinem. det.

deficiente di rango $> 0$ labile, " indet.

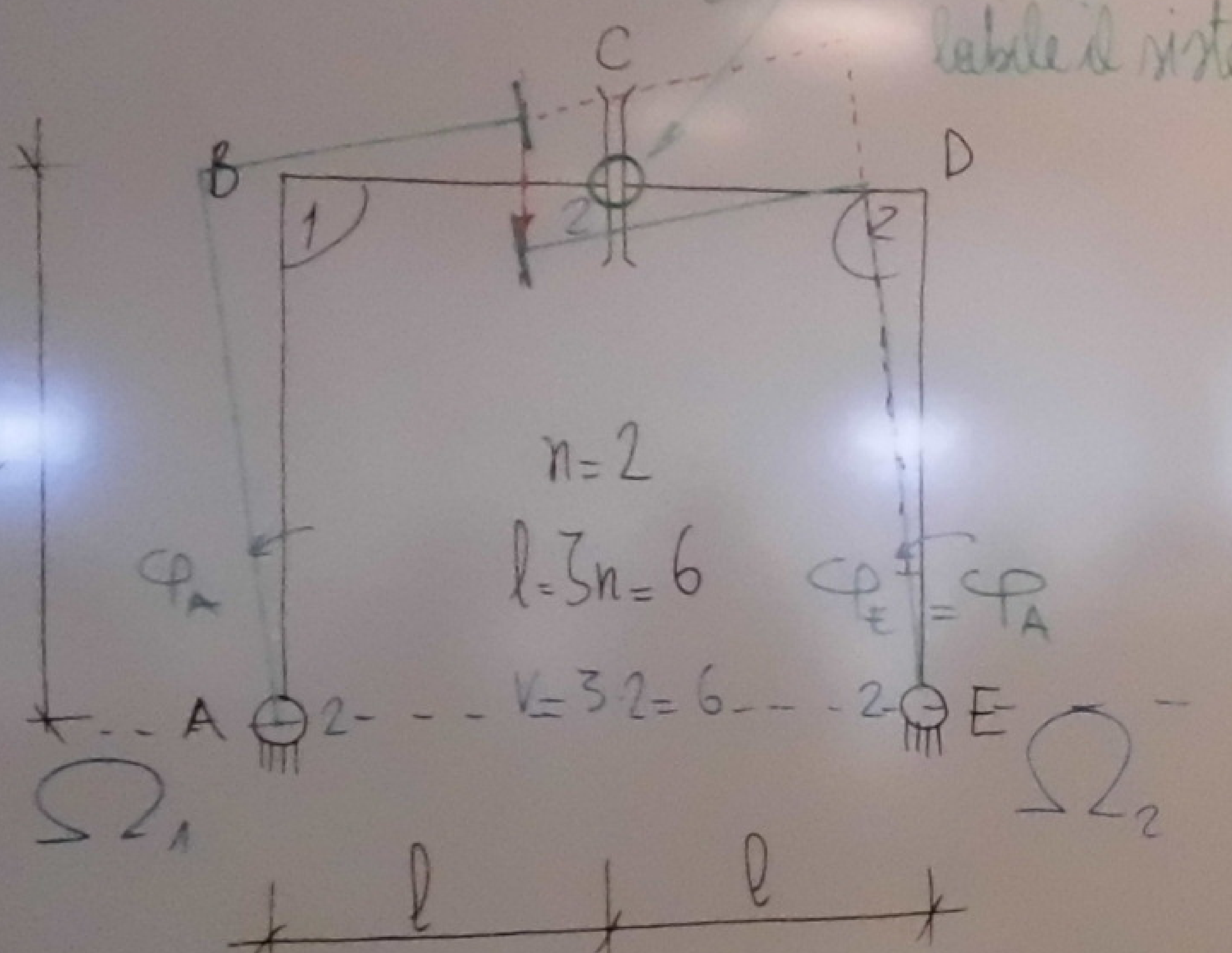
$$r[\mathbb{C}] \leq \min\{v, l\}$$

$v = l$

$\mathbb{C}$ singolare $\Rightarrow$ sist. labile

$2\varphi_A l$

modifica (rende non labile il sistema)



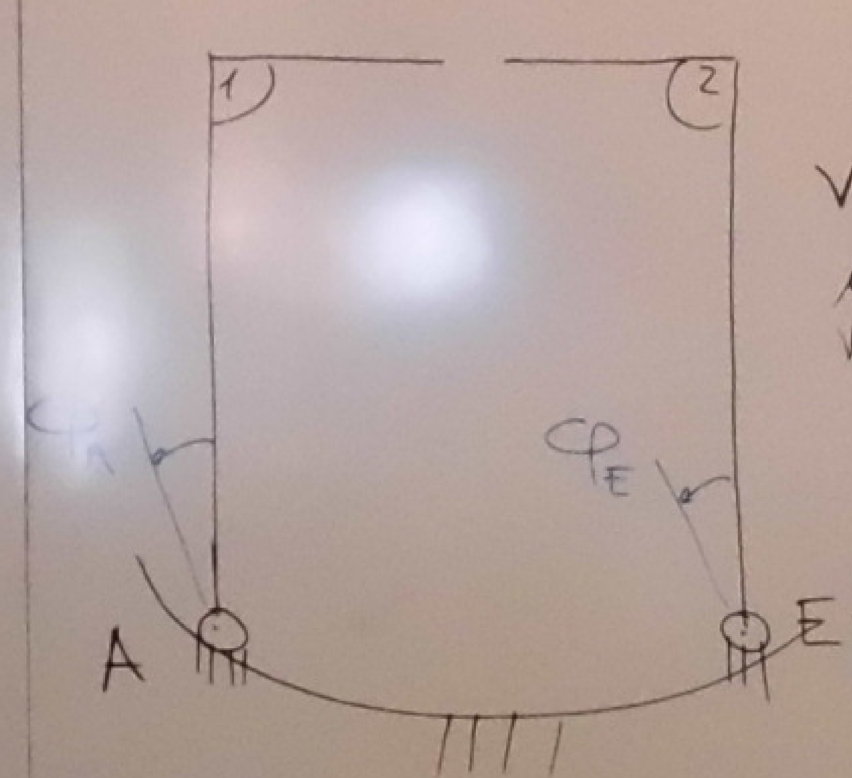

$n = 2$

$l = 3n = 6$

$v = 3 \cdot 2 = 6$

AC Geometrica: trattasi di arco a tre cerniere allineate labile $(L = 1) \Rightarrow$ cinematicamente indet.

## Approccio ridotto tramite schema ad albero




$$\overset{\triangleright}{u} = \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_E \end{Bmatrix} \text{ sottovettore di } u$$

$l^{\triangleright} \times 1$
$(2 \times 1)$

## Scrittura delle eqni di vincolo corrispondenti ai gdv rimossi

$$\overset{\triangleright}{v} \text{ eqni di vincolo } \begin{cases} \Delta u_C = u_{C2} - u_{C1} = 0 \\ \Delta \varphi_C = \varphi_{C2} - \varphi_{C1} = 0 \Rightarrow \Delta v_C = 0 \end{cases}$$

solur. $\varphi_A = \varphi_E$

$$\overset{\triangleright}{v} = \begin{Bmatrix} \Delta u_C \\ \Delta v_C \end{Bmatrix} \text{ sottovettore di } v$$

$v^{\triangleright} \times 1$
$(2 \times 1)$

sottomatrice di $C$

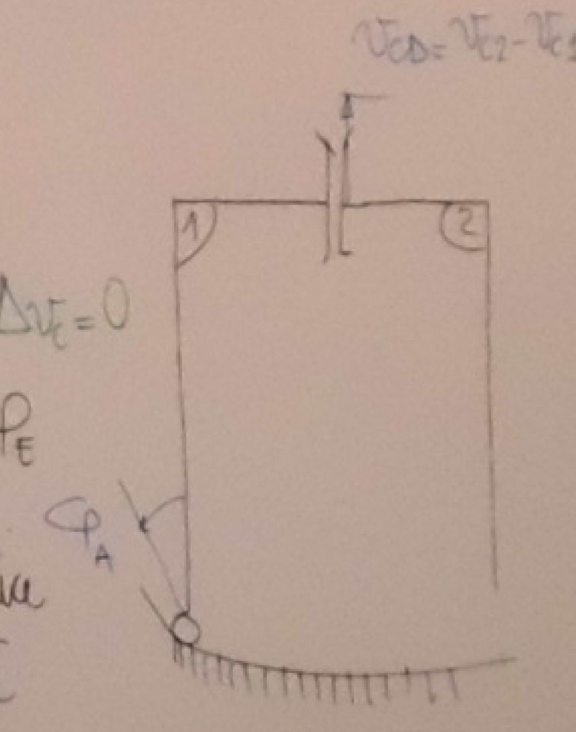
$v^{\triangleright} \times l^{\triangleright}$

$$\overset{\triangleright}{v} = \begin{bmatrix} h & -h \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \overset{\triangleright}{u} = \overset{\triangleright}{C} \cdot u = 0$$

sistema di congruenza ridotto; matrice di congr. ridotta $\det[\overset{\triangleright}{C}] = h - h = 0$

$r = 1$
$L = 2 - 1 = 1$

$L = N[\overset{\triangleright}{C}] = l^{\triangleright} - r[\overset{\triangleright}{C}]$




$$\overset{\triangleright\triangleright}{v} = \begin{Bmatrix} u_E \\ v_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ v_{C} \end{Bmatrix} = \overset{\triangleright\triangleright}{C} \cdot \overset{\triangleright\triangleright}{u}$$

$L = 1$ $\quad v_{CD} = -2\varphi_A l$ soluzione

## Scrittura matriciale

$$\begin{array}{c} \\ v \\ v \times 1 \\ \text{cerniera in } C \end{array} = \begin{array}{cccccc} u_A & v_A & \varphi_A & u_E & v_E & \varphi_E \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -l & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

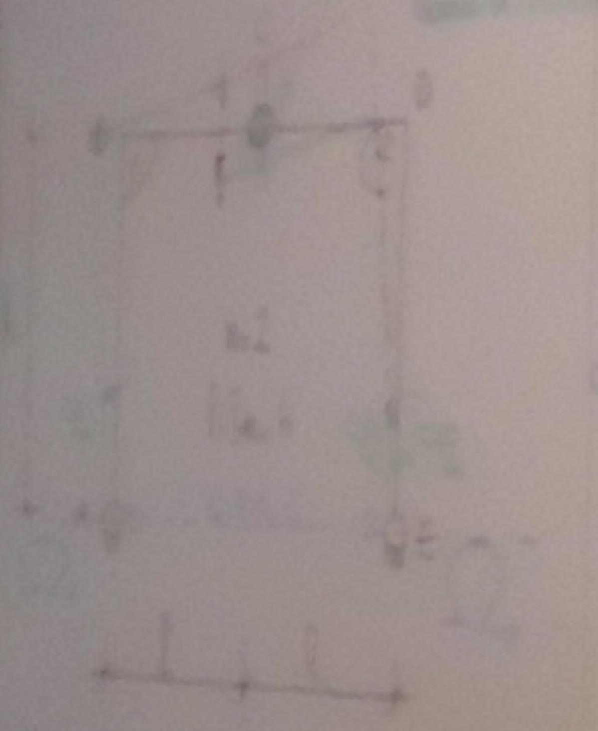
$L > 0$ $\quad v < l$

matrice di congruenza e di compatibilità

$= C \cdot u = v = 0$

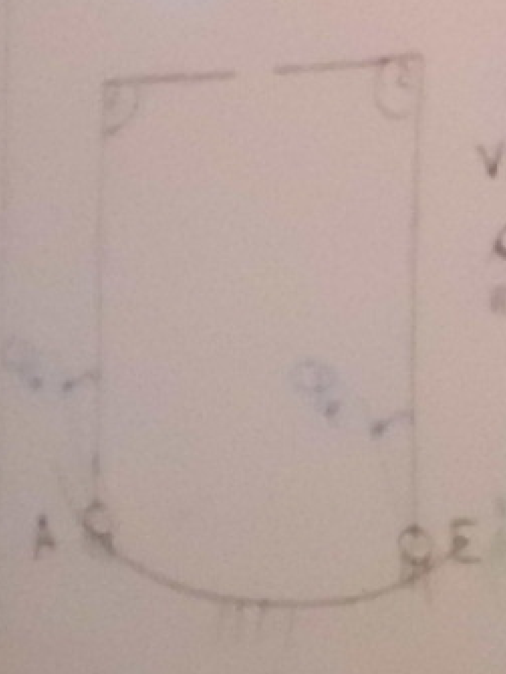
Compatibilità

Approccio ridotto
tramite schema ad albero
Scrittura delle eq.ni di vincolo
corrispondenti ai gdv rimossi
Scrittura matriciale (relazione lineare tra v e u)
sottovettore di v
sottomatrice di C
sistema di congruenza ridotto
matrice di congr. ridotta
soluzione
matrice di congruenza o di compatibilità
vett. basso
vett. alto
C non singolare



Schema ridotto

Scrittura delle eq.ni di vincolo corrispondenti ai gdv rimossi



V eq.ni di vincolo

solut. $\varphi_A = \varphi_E$

sottomatrice di $\mathbb{C}$

$v^* = l^*$

$$\overset{*}{\mathbb{V}} = \begin{bmatrix} h & -h \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{*}{\mathbb{U}} = \overset{*}{\mathbb{C}} \cdot \overset{*}{\mathbb{U}} = 0$$

matrice di congruenza ridotta

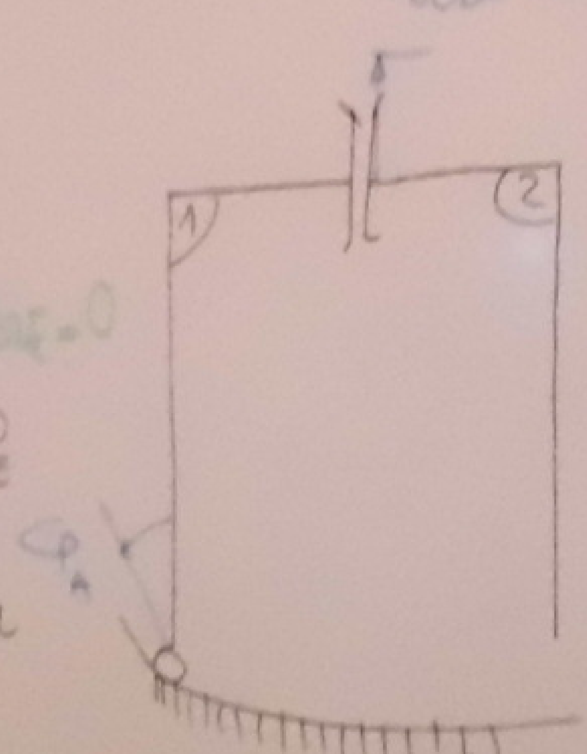
$r = 1$

$L = 2 - 1 = 1$

$L = N[C^*] = l^* - r[C^*]$

$\det[C^*] = h - h = 0$

$v_{CD} = v_{C2} - v_{C1}$



$$\overset{**}{\mathbb{V}} = \begin{Bmatrix} u_E \\ v_E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2l & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ v_{CD} \end{Bmatrix} = \overset{**}{\mathbb{C}} \cdot \overset{**}{\mathbb{U}}$$

$L = 1$ $\quad v_{CD} = -2\varphi_A l$

soluzione

## Scrittura matriciale (relazione lineare tra $\mathbb{V}$ e $\mathbb{U}$)

$$\begin{array}{c|cccccc} & u_A & v_A & \varphi_A & u_E & v_E & \varphi_E \\ \hline & & & & & & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \mathbb{V} \\ v \times 1 \\ \text{cerniera in } C \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & -l & 0 & 1 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \boxed{\varphi_A} \\ u_E \\ v_E \\ \boxed{\varphi_E} \end{bmatrix} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{V} = \mathbb{O}$$

eq.ni di vincolo

sist. ass.

vincoli non cedevoli

(nulli)

matrice di congruenza o di compatibilità

$L > 0$ $\quad v \, \underset{l}{\boxed{\mathbb{C}}}$ rett. bassa $\quad v < l$

$v \, \underset{l}{\boxed{\mathbb{C}}}$ quadr. $\quad v = l$ $\quad r = l$ isom. ISO det.

$v \, \underset{l}{\boxed{\mathbb{C}}}$ rett. alta $\quad v > l$ IPER det.

$r = 6 \rightarrow L = 0$

$\mathbb{C}$ non singolare

$\Delta v_C = v_{C2} - v_{C1} = (v_E - l\varphi_E) - (v_A + l\varphi_A)$

$= -1 v_A - l\varphi_A + 1 v_E - l\varphi_E$