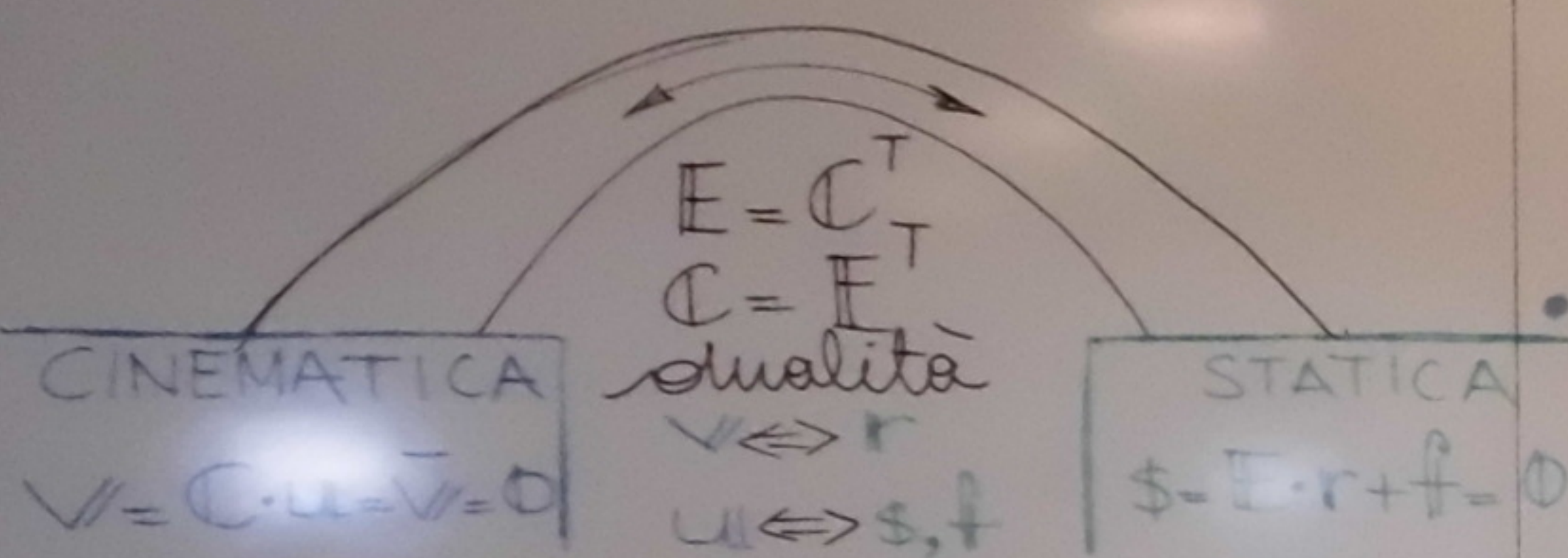


Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

Definizione

PLV



fronte tra cinematica/statica

- Il PLV fornisce una relazione utile a mettere in comunicazione le sponde della cinemotica e della statica, pur non raggiungendo nuove eq. in governanti.
- Trattasi di un assunto alquanto generale, in verità dimostrabile (Teorema dei L.V.) $\Rightarrow$ vedi Meccanica dei Continui

- Sistema A: famiglie di quantità statiche staticamente ammissibili (cioè equilibrate).
- Sistema B: famiglie di quantità cinematiche cinematicamente ammissibili (cioè congruenti)

- In generale trattarsi di sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sistema strutturale reale
- In generale, non vi è alcuna relazione di causa-effetto tra i due sistemi, l'uno statico, l'altro cinematico
- Disgiunti, quindi il comportamento meccanico del materiale non entra in gioco nella definizione della relazione tra questi due sistemi

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di coerenza)

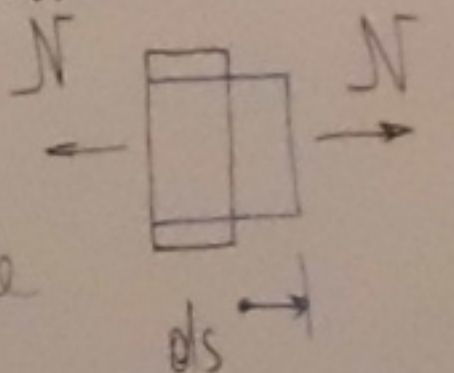
2. PSV/CSK

$$\forall A, B \Rightarrow L_e^{AB} = L_i^{AB} \quad \text{identità dei lavori virtuali}$$

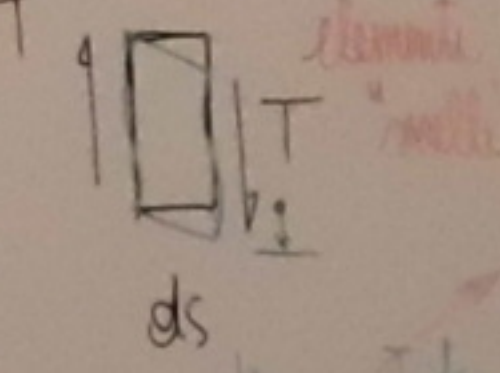
$$\text{ovv } L_e^{AB} = \sum_i R_i^{AB} \delta_i + F_i^{AB} \delta_i + W_i^{AB} \phi_i \quad \text{lavoro virtuale esterno}$$

$$L_i^{AB} = \int N^{AB} \cdot d\epsilon + T^{AB} \cdot d\gamma + M^{AB} \cdot d\theta \quad \text{lavoro virtuale interno}$$

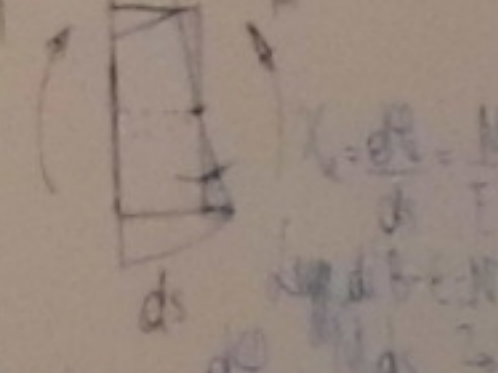
assenza di efflu
flemmonati


$$d\epsilon = \frac{N \Delta s}{EA}$$

E. modulo elast. long. σ
modulo di Young
A: area della sezione trasv.


$$d_1 = \frac{r_1}{GA}$$

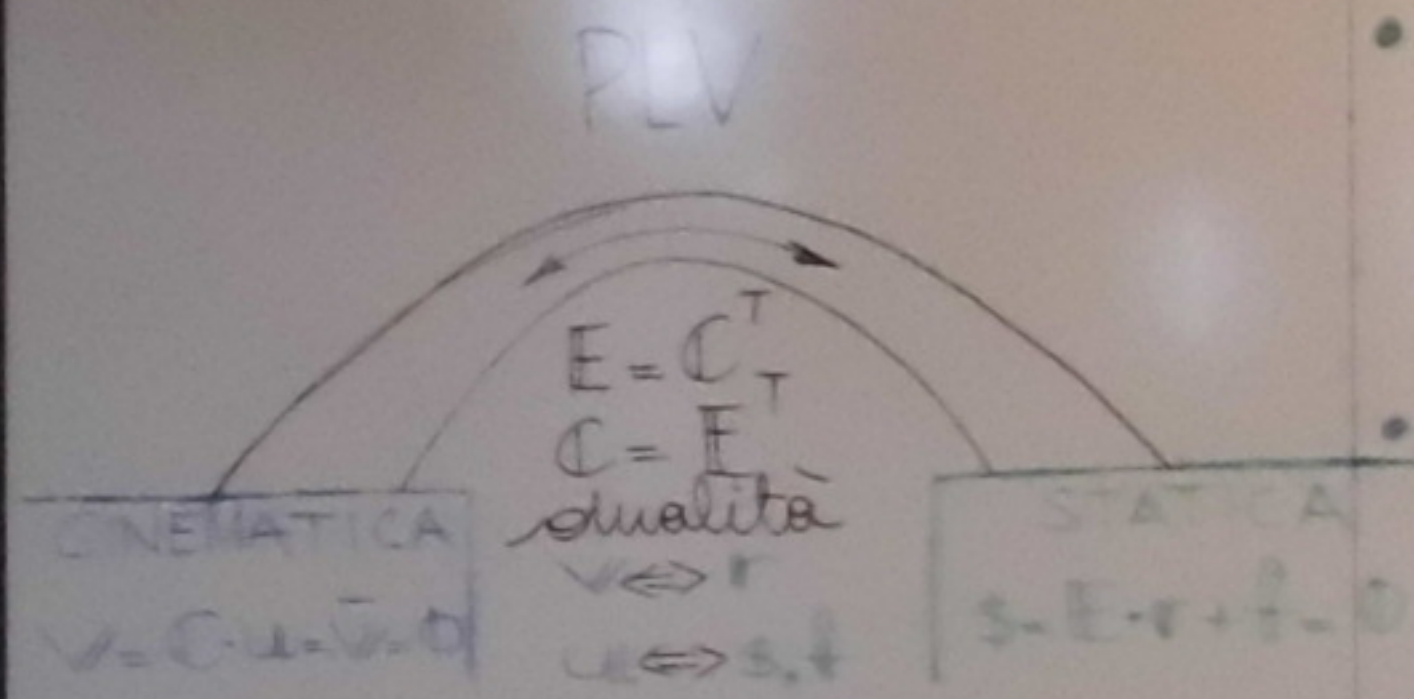
G. modulo di Dirichlet
modulo di foglio $G =$
A. serie di Frobenius



Y. S. de Antioch, 1700.
A. A. POISSON

1000

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) Definizioni



- Il PLV fornisce una relazione utile a mettere in comunicazione le sfere della cinematica e della statica, pur non appoggiandosi su di esse in modo diretto.
- Trattando di un argomento alquanto generale, in verità dimostrabile (Teorema di Betti) → vedi Meccanica dei Continui

- Sistema A: famiglia di quantità statiche staticamente ammissibili (cioè equilibrate).
- Sistema B: famiglia di quantità cinematiche cinematicamente ammissibili (cioè congruenti).

- In generale trattarsi di sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sistema strutturale reale.
- In genere, ma vi è alcuna relazione di causa-effetto tra i due sistemi, l'uno statico, l'altro cinematico.

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di congruenza)

$V(A, B) \Rightarrow L_e = L_i$ identità dei lavori virtuali

ovvero $L_e = \sum_{AB} R_i^A \delta_i^B + F_i^A \delta_i^B + W_i^A \delta_i^B$ lavoro virtuale esterno

$L_i = \int_{AB} N^A \delta n^B + T^A \delta t^B + M^A \delta \varphi^B$ lavoro virtuale interno

assenza di effetti flessionali

N T M

ds dt $d\varphi$

EA GA J

E: modulo elast. longitudinale, o modulo di Young

A: area della sezione trasversale

G: modulo elast. trasversale, o modulo di taglio

A: area di taglio

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

J: momento d'inerzia della sezione trasversale

ν : coeff. di Poisson

PSV (CS di equili.)

$L_e = L_i$

Calcolo di RVE e AI

nei sistemi articolati di corpi rigidi ($\delta_i^A = 0$)

$\Rightarrow L_e = 0$

effetti anelastici di origine termica (reazione)

PFV (CS di congruenza)

$L_e = L_i$

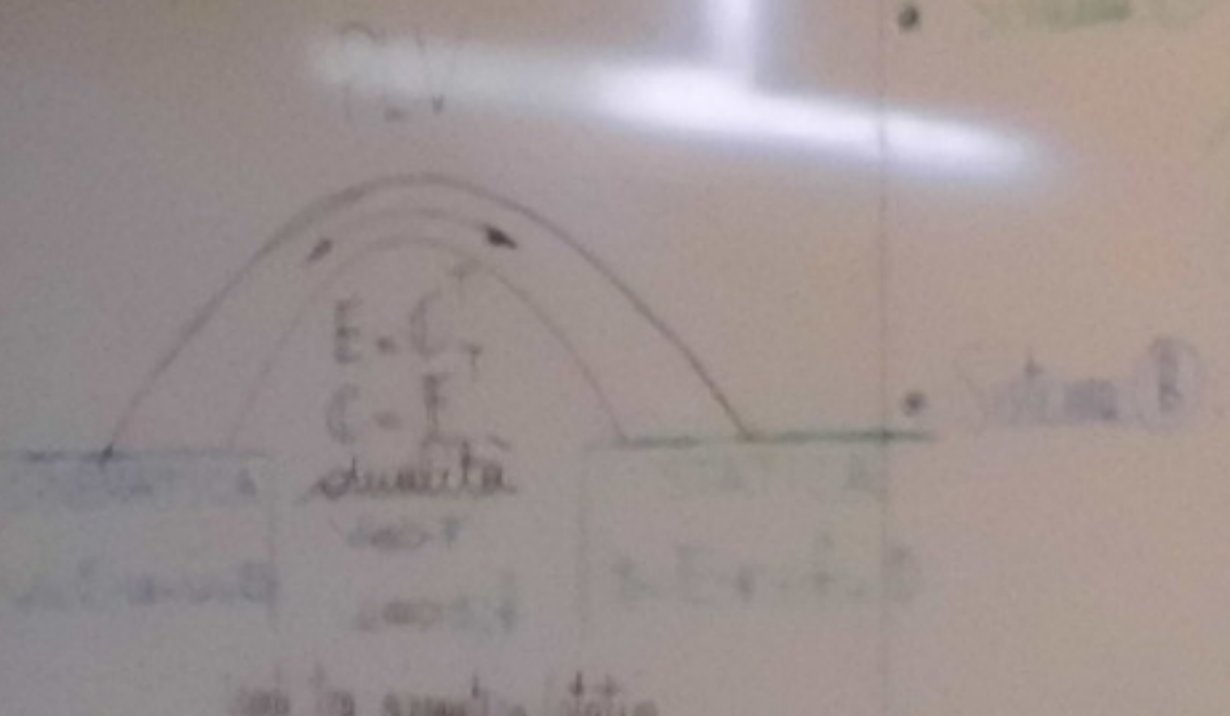
Calcolo di strutturali e AI

nei sistemi articolati di corpi rigidi ($\delta_i^A = 0$)

$\Rightarrow L_e = 0$

effetti anelastici di origine termica (reazione)

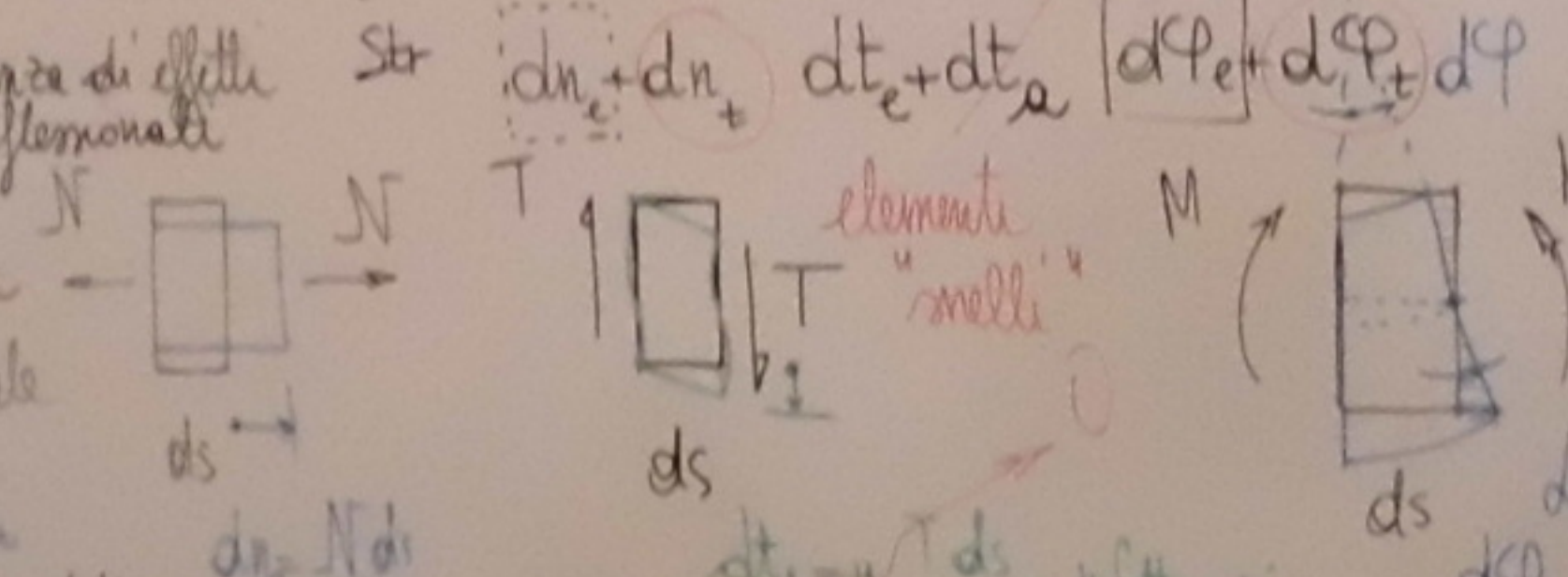
Principio dei Lavori Virtuali (PLV)



Il PLV fornisce una relazione utile a mettere in relazione le grandezze cinematiche e statiche, per cui esso costituisce uno strumento molto utile in ingegneria strutturale, in particolare per la verifica di sistemi strutturali.

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di congruenza)

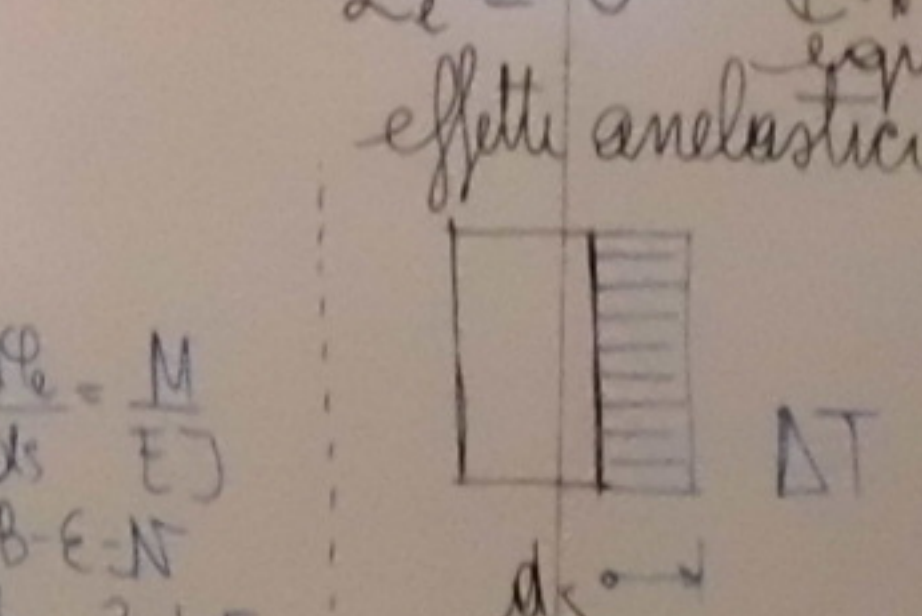
$V(A, B) \Rightarrow L_e = L_i$ identità dei lavori virtuali
 $L_e = \sum R_i^A \delta_i^B + F_i^A \delta_i^B + W_i^A \phi_i^B$ lavoro virtuale esterno
 $L_i = \int N^A \delta n^B + T^A \delta t^B + M^A \delta \phi^B$ lavoro virtuale interno



In generale trattiamo sistemi "virtuali", cioè non necessariamente vincolati al sistema strutturale reale.
 In pratica, per i calcoli di effetto termico, si assume che il sistema virtuale sia in equilibrio con il sistema reale.

PSV (CS di congruenza)

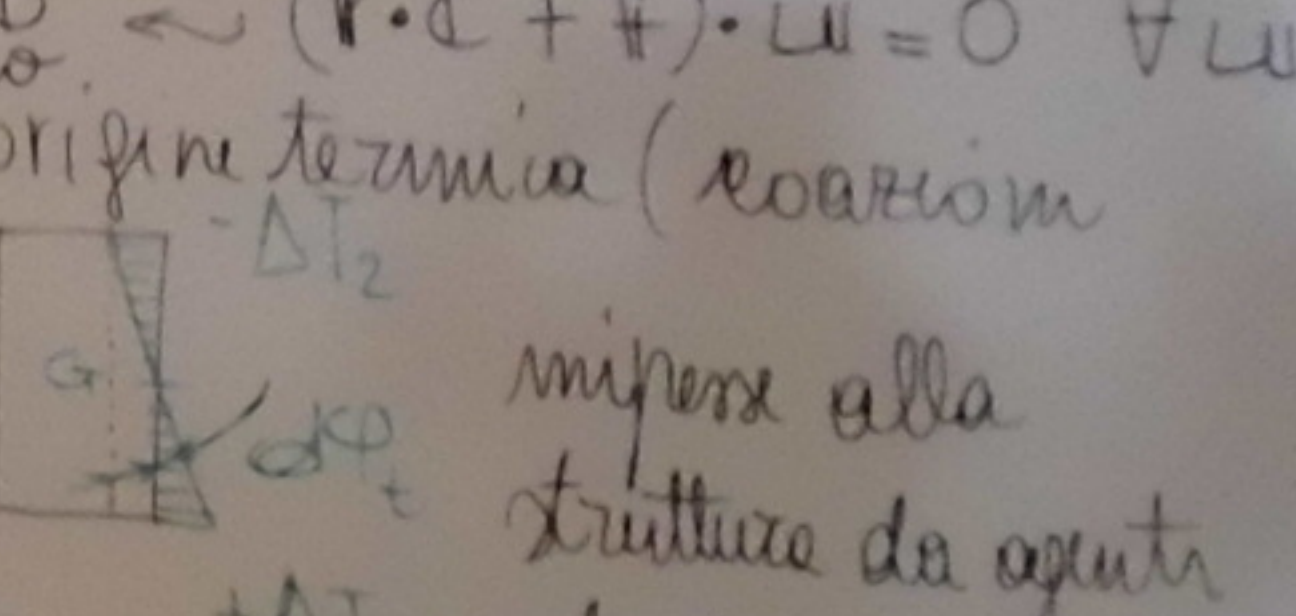
$\{ \delta_i^A \} \Rightarrow \{ \delta_i^B \}$
 $L_e = L_i$
 Calcolo di RVE e AI nei sistemi articolati di corpi rigidi ($L_i = 0$)
 $L_e = 0 \Rightarrow \sum C_i \delta_i^A = 0$



effetti anelastici di origine termica (reazioni)
 Ingegneria alla struttura da agenti esterni $\Rightarrow$ variazioni di temperatura

PFV (CS di congruenza)

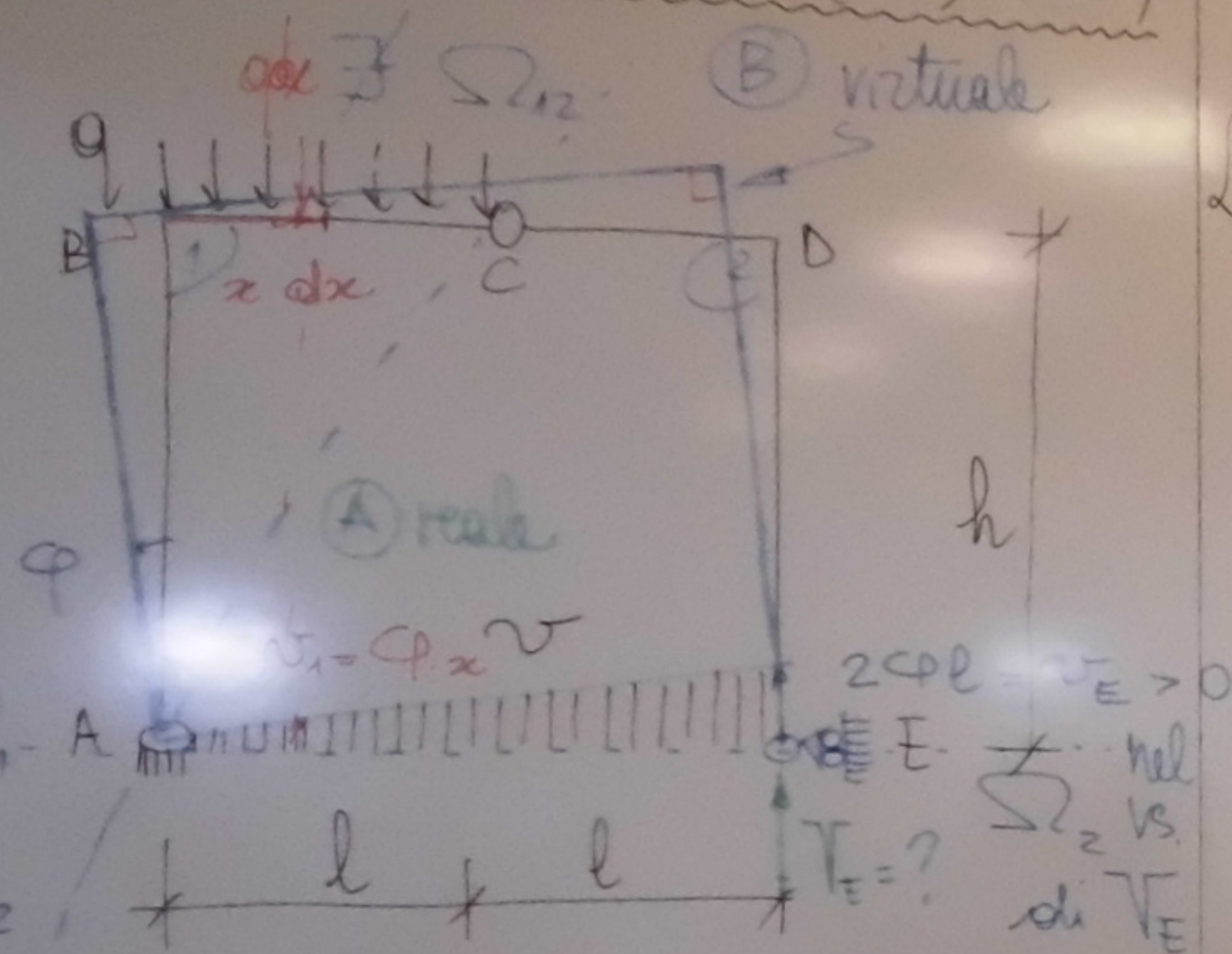
$\{ \delta_i^A \} \Rightarrow \{ \delta_i^B \}$
 $L_e = L_i$
 Calcolo di strutture statiche e dinamiche
 Det. di comp. di spostamento
 $\delta_i^A = C_i \cdot u_i$ reale
 $L_e = \sum R_i^A \delta_i^B + F_i^A \delta_i^B + W_i^A \phi_i^B = 0$
 $(R_i \cdot C_i + F_i) \cdot u_i = 0 \quad \forall u_i$



Ingegneria alla struttura da agenti esterni $\Rightarrow$ variazioni di temperatura
 coefficiente di dilatazione termica α
 ΔT incremento di temperatura



Calcolo di RV e AI al PLV (PSV, $\Delta e = 0$)



- contesti ingegneristici reali
- verifica indip. delle RV
- scrittura di una sola eq. in un'unica incognita

Calcolo di RV

$$\Delta e = V_E \cdot 2\phi l - \int_0^l (q dx) \phi x = 0$$

$$q \phi \frac{l^2}{2} = (ql) \cdot \left(\phi \frac{l}{2}\right)$$

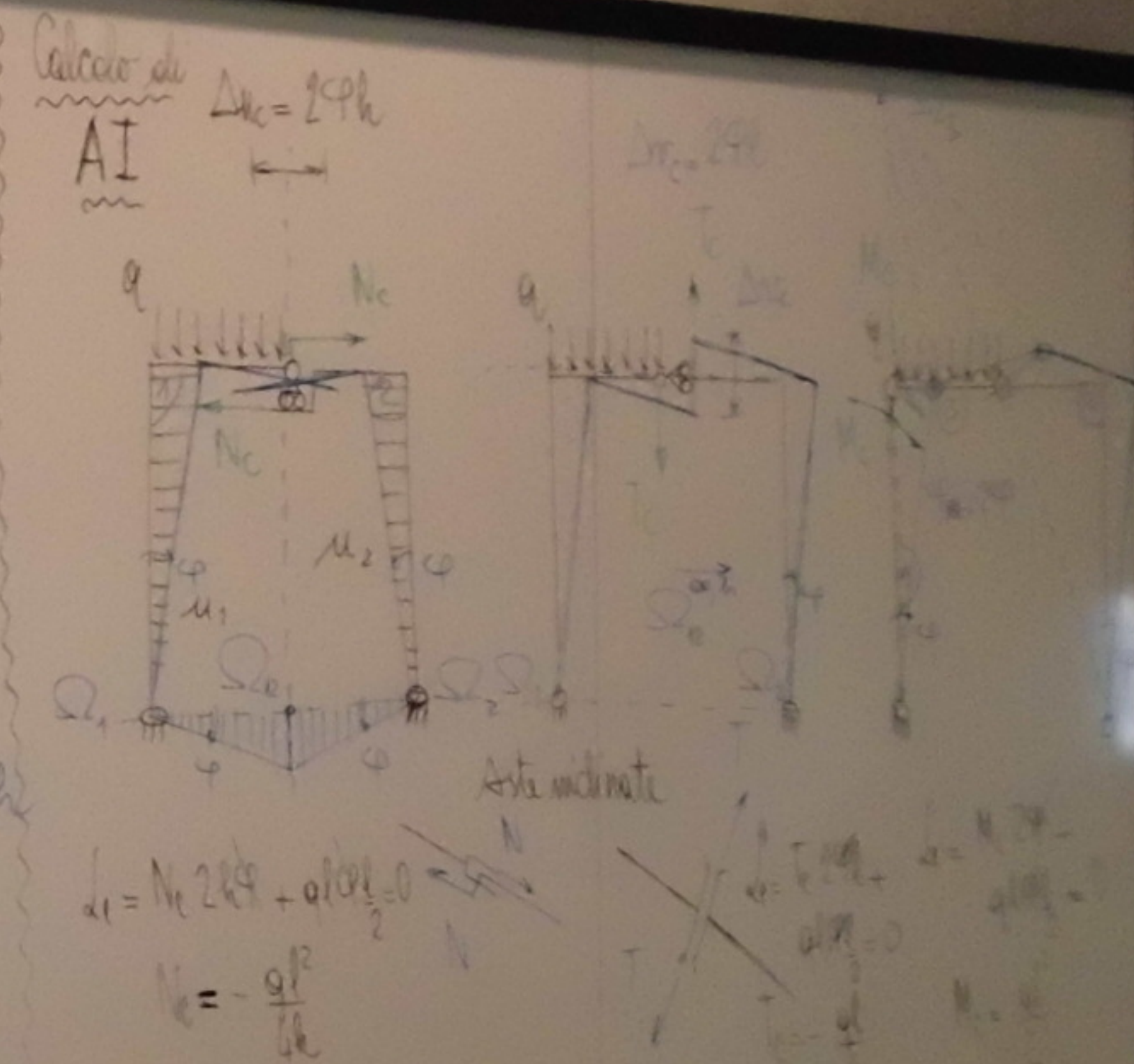
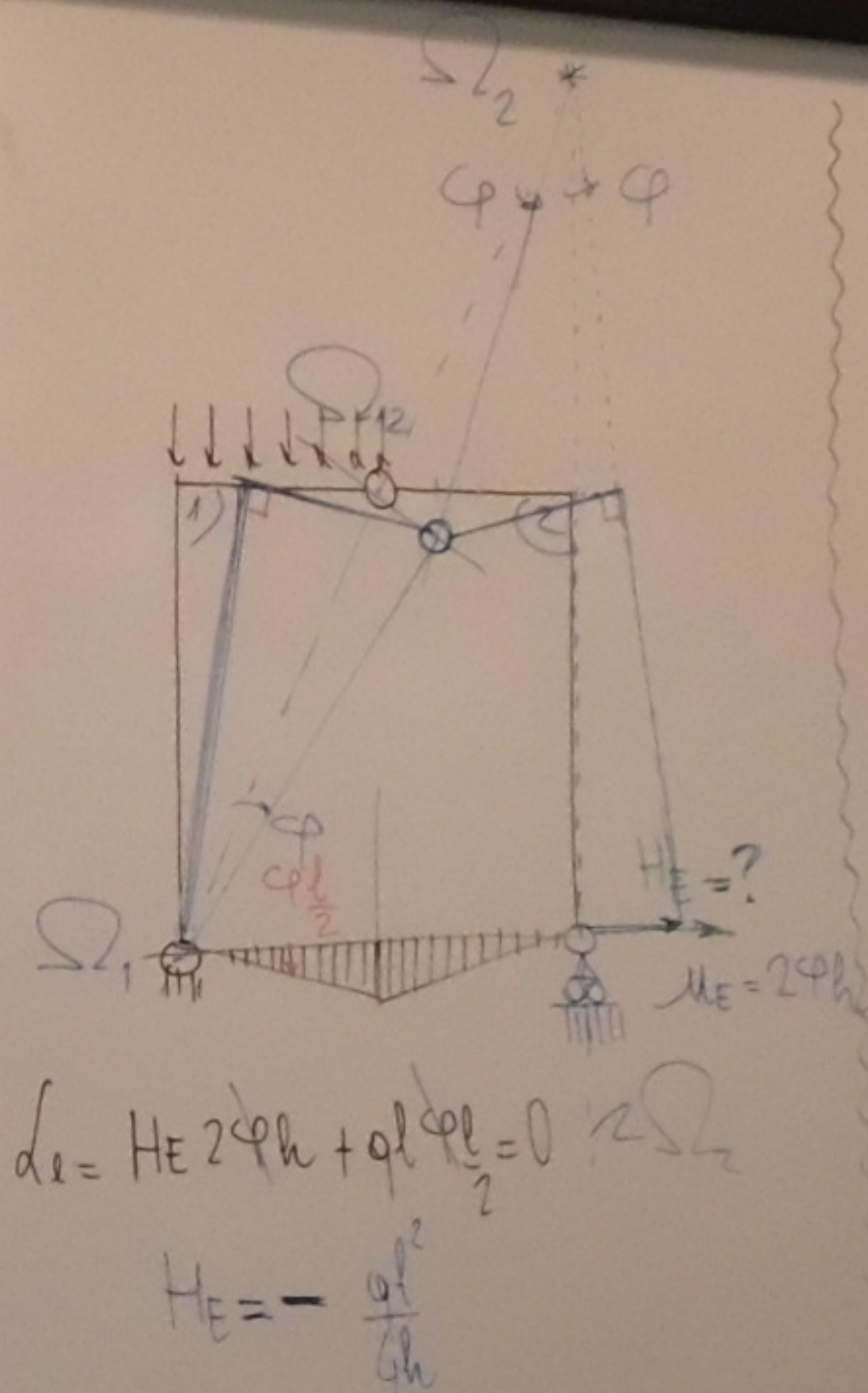
risult. spot. di q applic.

$$V_E 2\phi l - ql \phi \frac{l}{2} = 0$$

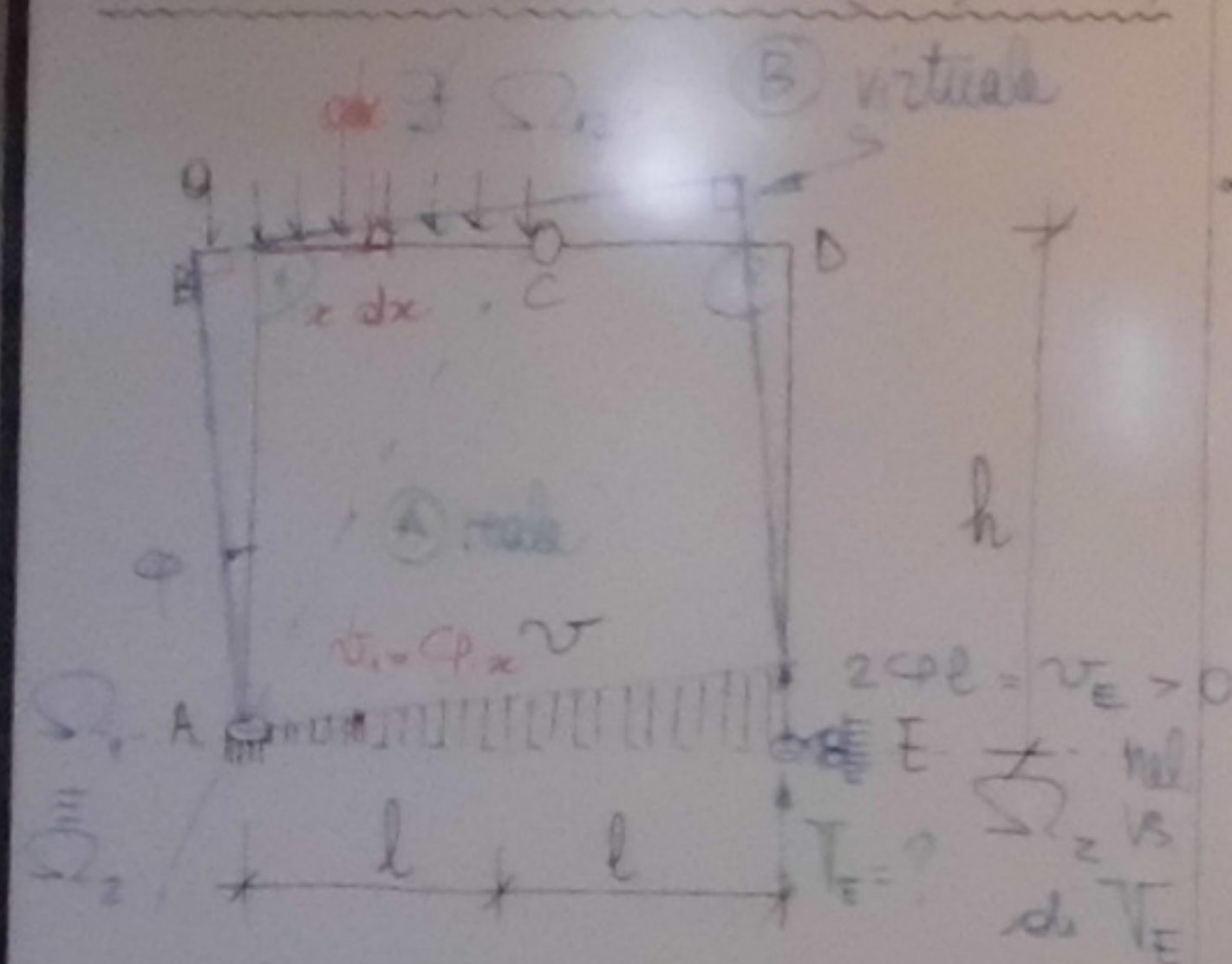
$$(2V_E - \frac{ql}{2}) \phi = 0$$

$$V_E = \frac{ql}{4}$$

$$\sum M_A^{(1)+(2)} = 0 \Rightarrow V_E = \frac{ql}{4}$$



Calcolo di RV e AI col PLV (PSV, $\Delta e = 0$)



- Contesto ingegneristico reale
- Verifica indep. della RV
- Sostituzione di una sola eq. in un'unica incognita

Calcolo di RV

$$\Delta e = V_E \cdot 2\phi l - \int_0^l (q dx) \phi x = 0$$

$$q \phi \frac{l^2}{2} = (ql) \cdot \left(\frac{\phi l}{2}\right)$$

ult. spot di q applic.

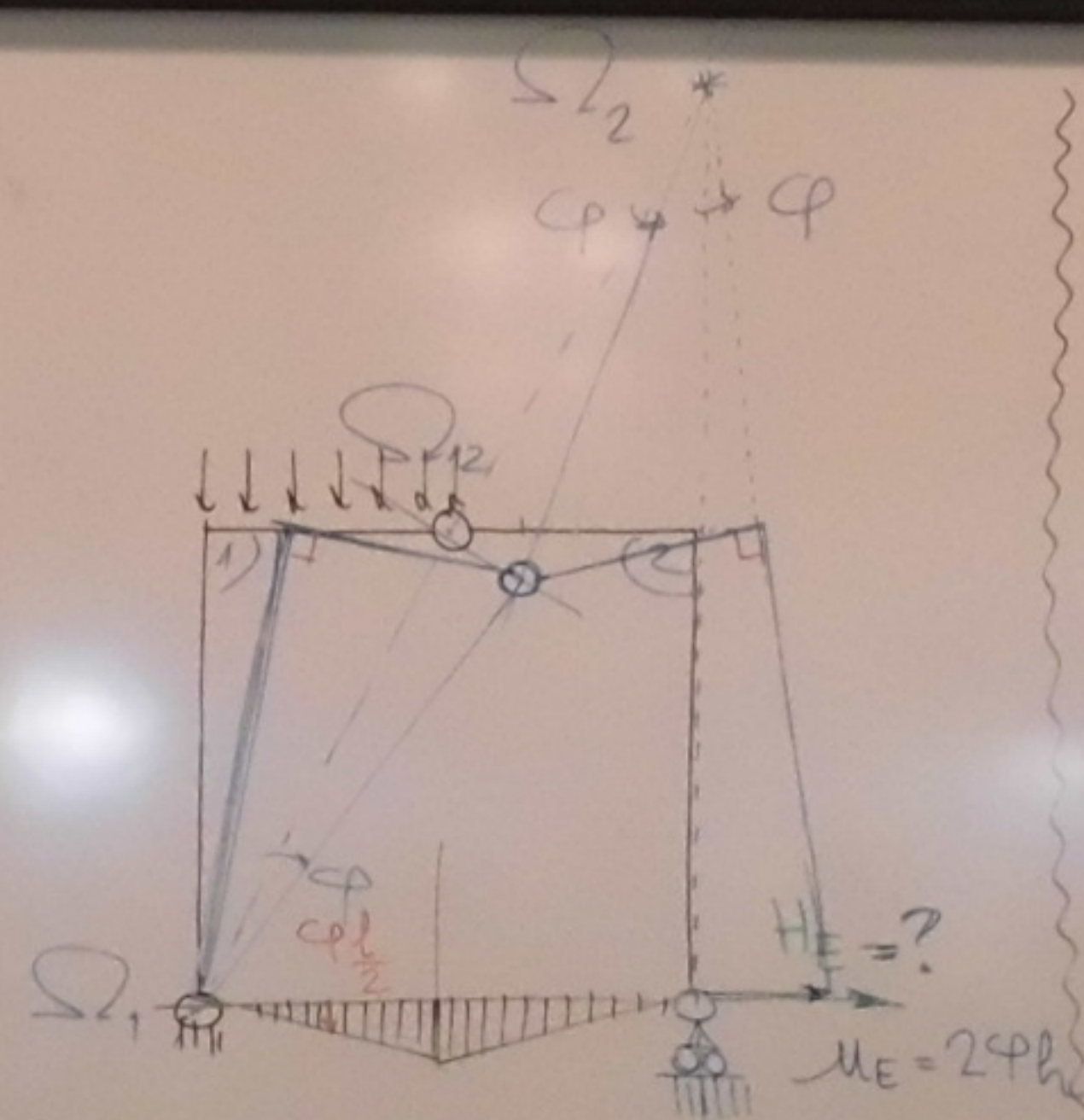
VCP

$$V_E 2\phi l - ql \phi \frac{l}{2} = 0$$

$$(2V_E - \frac{ql}{2}) \phi = 0$$

$$V_E = \frac{ql}{4}$$

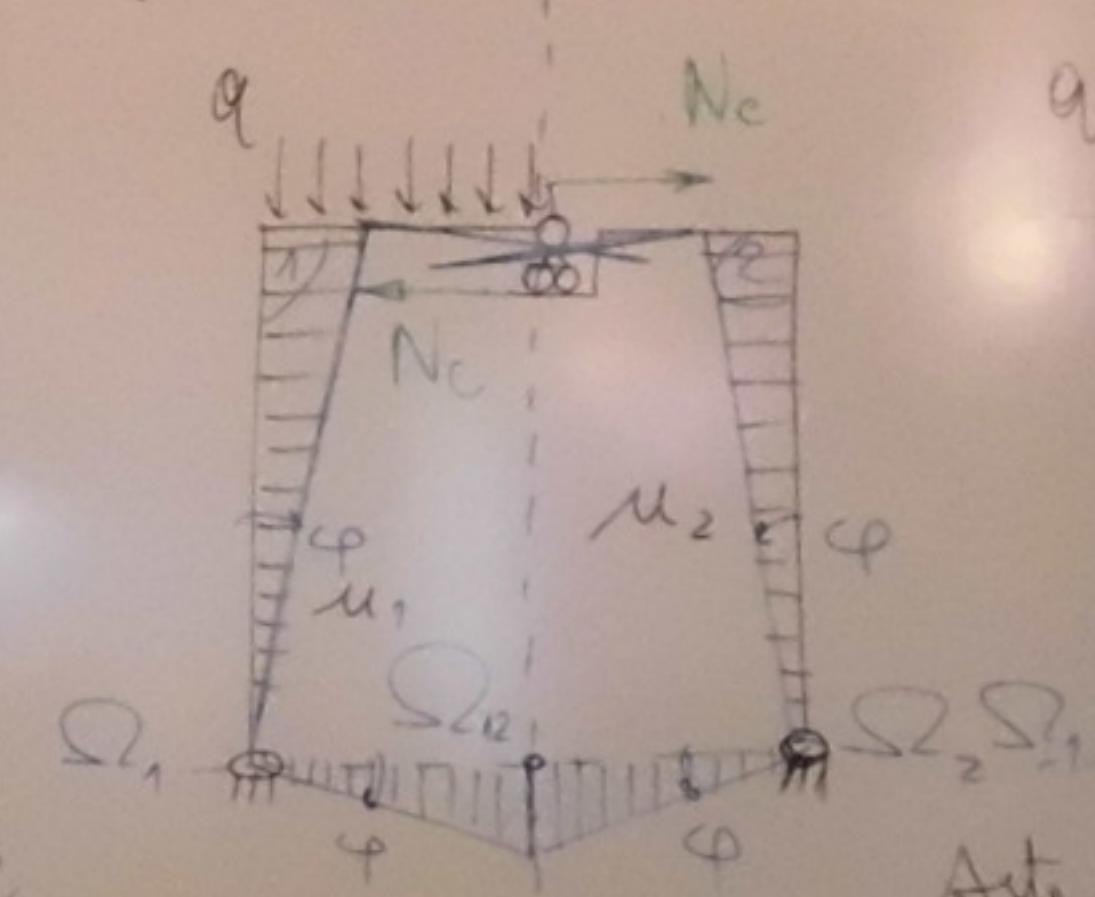
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_E = \frac{ql}{4}$$



$$\Delta e = H_E 2\phi h + ql \phi \frac{l}{2} = 0$$

$$H_E = -\frac{ql^2}{4h}$$

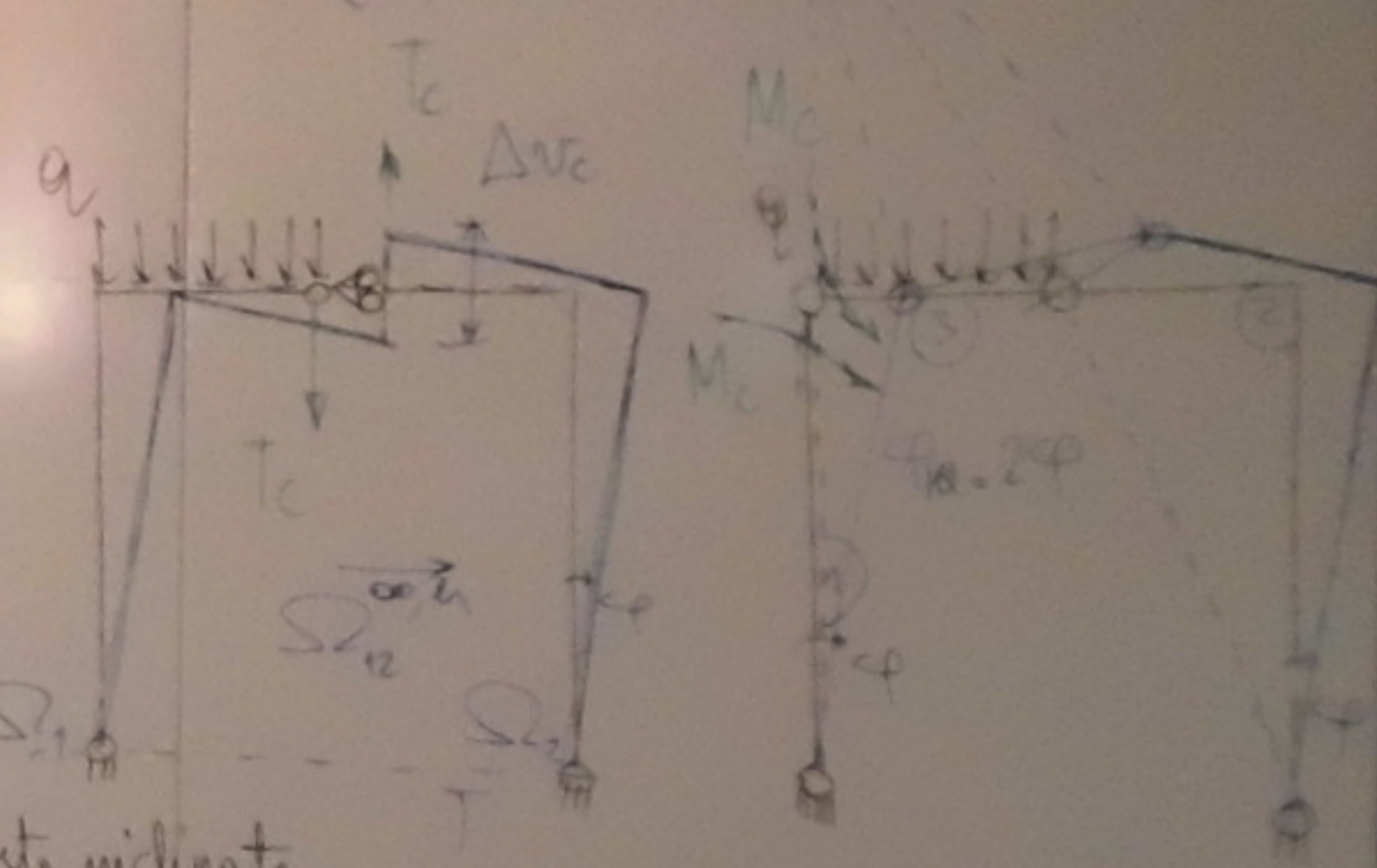
Calcolo di AI



$$\Delta e = N_c 2h\phi + ql \phi \frac{l}{2} = 0$$

$$N_c = -\frac{ql^2}{4h}$$

$\Delta e = 2\phi l$

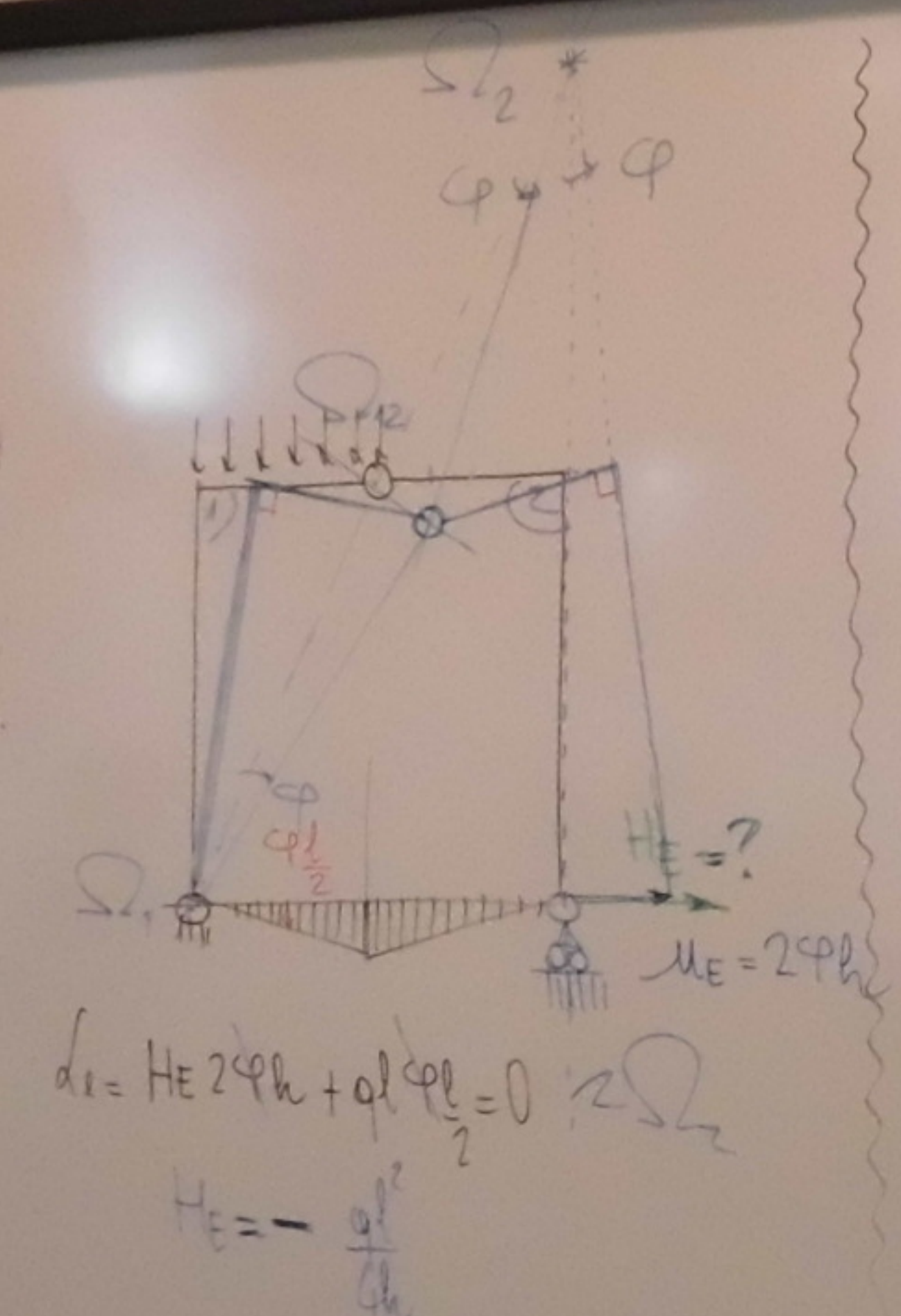


$$\Delta e = T_c 2\phi l + ql \phi \frac{l}{2} = 0$$

$$T_c = -\frac{ql^2}{4h}$$

$$\Delta e = M_c 2\phi - ql \phi \frac{l}{2} = 0$$

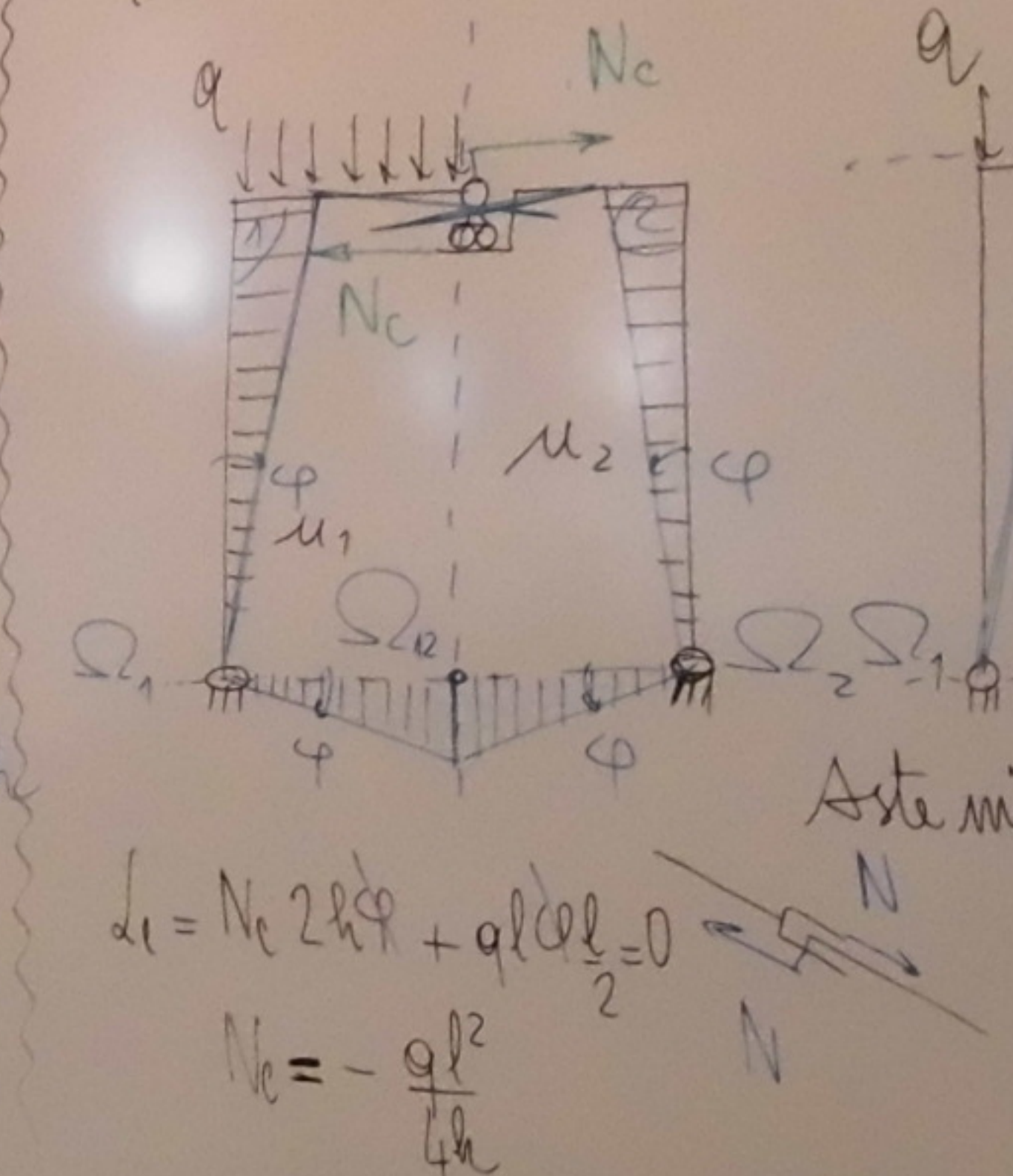
$$M_c = \frac{ql^2}{4}$$



Calcolo di
AI

$\Delta u_c = 2 \phi h$

$\leftarrow \rightarrow$



Aster inclinate

