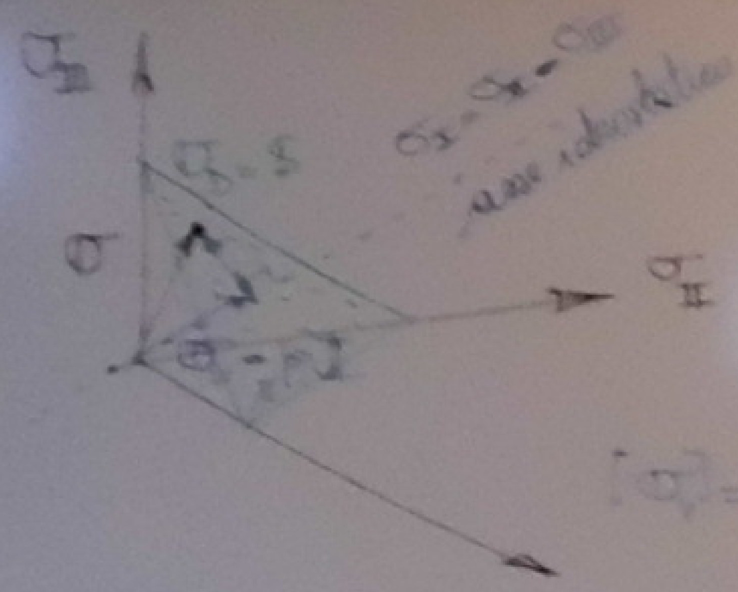

Meccanica dei Solidi (Continui)
Sforzo (statica dei continui)
Continuo (non polare) di Cauchy: ~ 1822
vettore sforzo di Cauchy
tensore sforzo di Cauchy
Relazione di Cauchy (equil. del tetraedro di C.)
componenti
Da equil. alla rotaz. del tetraedro
Equazioni indefinite di equil. (dei continui)
Th. della divergenza
campo tensoriale g
sforzo normale
normale
coseni direttori
gradiente
matrice sforzo
sforzi normali
sforzi taglianti
Variazione del sist. di rif.
Q tensore ortogonale
tensore identità del 2° ordine
Legge di trasf. delle comp. di un vettore
Direzioni principali di sforzo


Meccanica dei Solidi (continui)
Sforzo: statica dei continui
vettore sforzo di Cauchy
tensore sforzo di Cauchy
componenti
matrice sforzo
sforzi normali
sforzi taglianti
Equazioni indefinite di equil. (dei continui)
Variazione del sist. di rif.
Q tensore ortogonale
tensore identità del 2° ordine
Direzioni principali di sforzo
autovalori
autovettori
polinomio caratteristico
Invarianti di sforzo
primo
secondo
terzo

Variazione del sist. di rif.
Q tensore ortogonale
rif. ruotato
rif. originario
Direzioni principali di sforzo:
$t_n = \sigma^{(T)} \cdot n = \sigma_n n$
$(\sigma - \sigma_n I) \cdot n = 0$
pb. agli autovalori associato a σ
n princ
$\tau_n = 0$
sse soluz. non banale $n \neq 0$
$- \det[\sigma - \sigma_n I] =$
eq.ne caratteristica
$= \sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$
polinomio caratteristico
con Invarianti di sforzo:
$\sim \sigma^1$ primo $I_1 = tr\sigma$
$\sim \sigma^2$ secondo $I_2 = \frac{1}{2}(tr\sigma^2 - tr^2\sigma)$
$\sim \sigma^3$ terzo $I_3 = \det\sigma =$
• σ_n autovalori
tensioni principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$
reali
• n autovettori
direzioni principali n_I, n_{II}, n_{III}
Th. di Cayley-Hamilton
$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 I = 0$
$tr\sigma^3 - I_1 tr\sigma^2 - I_2 tr\sigma - I_3 3 = 0$
$I_3 = \frac{1}{3}tr\sigma^3 - \frac{1}{3}tr\sigma\, tr\sigma^2 - \frac{1}{6}(tr\sigma^2 - tr^2\sigma)tr\sigma$
$= \frac{1}{3}tr\sigma^3 - \frac{1}{2}tr\sigma\, tr\sigma^2 + \frac{1}{6}tr^3\sigma$
è invariante al variare del sistema di rif.


Componenti volumetrica e deviatorica
asse idrostatico
σ = σv + σD
= p I + s → s = σ − trσ/3 I
tensione media
deviatore di sforzo (tensore a traccia nulla)
Pb agli autovalori
autovalori pari a p
autovettori arbitrari
Sforzo sferico, idrostatico o volumetrico (uguale in tutte le direzioni)
Deviatore di sforzo
autovalori shiftati di p
autovettori ≡ con quelli di σ
Soluzione analitica
cos 3α
Calcolo autovalori
Pb agli auto per s

Componenti volumetrica e deviatorica



$$[\sigma_V] = \begin{bmatrix} p & & \\ & p & \\ & & p \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D$$

$$= pI + s \Rightarrow s = \sigma - \frac{tr\,\sigma}{3} I$$

tensione media $p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{tr\,\sigma}{3} = \frac{I_1}{3}$

deviatore di sforzo (tensione a traccia nulla)

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad tr\,s = tr\,\sigma - \frac{tr\,\sigma}{3} tr\,I = 0$$

Pb agli autovalori

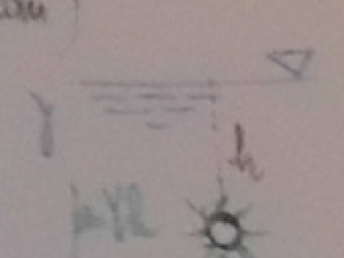
$$\sigma_V n = \sigma_V n$$

$$p \underbrace{I \cdot n}_{n} = \sigma_V n \quad \forall n$$

$$p = \sigma_V$$

- autovalori pari a p
- autovettori arbitrari

Sforzo sferico, idrostatico o volumetrico (uguale in tutte le direzioni)



Deviatore di sforzo

$$s \cdot n = s\,n$$

$$\left(\sigma - \frac{tr\,\sigma}{3} I\right) \cdot n = s\,n$$

$$\sigma \cdot n - p\,n = s\,n$$

$$\sigma \cdot n = (s + p)\,n$$

- autovalori shiftati di p

$$\sigma = s + p$$

$$s = \sigma - p$$

- autovettori ≡ con quelli di σ

Pb agli autov. ⇒ eq.ni caratt. di s

$$s^3 - \cancel{J_1 s^2} - J_2 s - J_3 = 0$$

$$\begin{cases} J_1 = tr\,s = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} tr\,s^2 \\ J_3 = \frac{1}{3} tr\,s^3 \end{cases}$$

Soluzione analitica

$$s = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2}\, \cos\alpha$$

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2} \cos^3\alpha - J_2 \frac{2}{\sqrt{3}} J_2^{1/2} \cos\alpha = J_3$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} J_2^{3/2} \underbrace{(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}_{\cos 3\alpha} = J_3$$

$$\cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$$

$$\begin{cases} 0 \le \alpha_1 = \frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \le \frac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\pi \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Calcolo autovalori

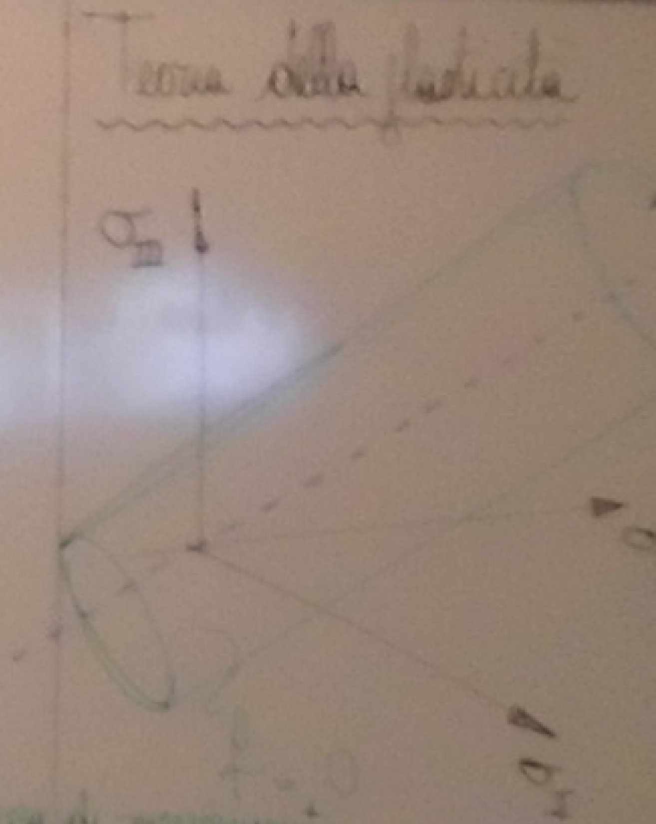
- Pb agli autov. per s

$$J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2$$

$$J_3 = \frac{2}{27} I_1^3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3$$

- Calcolo α_i
- Calcolo $s_i = \frac{2}{\sqrt{3}} J_2 \cos\alpha_i$
- Tens. princ. $\sigma_i = s_i + p$

Teoria della plasticità



Condizione di snervamento

$$f = f(\underbrace{\xi}_{\frac{I_1}{\sqrt{3}}}, \underbrace{\rho}_{\sqrt{2J_2}}, \underbrace{\theta}_{\alpha})$$

pos. lungo l'asse idrost. — dist. dall'asse idrostatico


Soluzione analitica
$s = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2} \cos\alpha$
$\cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$
Calcolo autovalori
– Pb. agli autov. per s
$J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2$
$J_3 = \frac{2}{27} I_1^3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3$
– Calcolo α_1
– Calcolo $s_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} J_2 \cos\alpha_1$
– Tens. princ. $\sigma_1 = s_1 + p$
Teoria della plasticità
cilindro di von Mises
$f = 0$
Condizioni di snervamento
$f = f(\xi, \rho, \vartheta)$
posiz. lungo l'asse idrost.
dist. dallo asse idrostatico
piano deviatorico
$R = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \sigma_1$