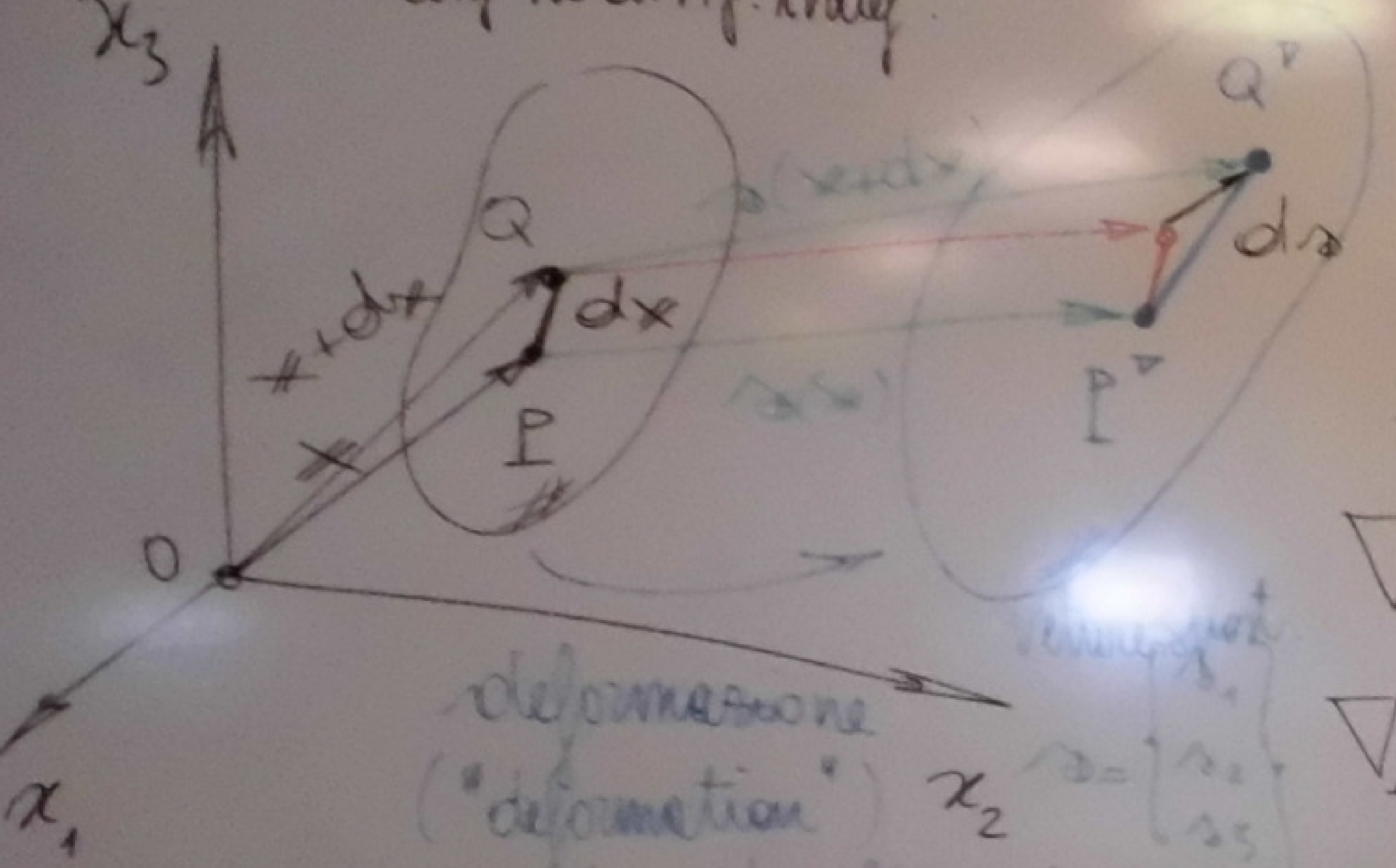
Deformazione e eq.ni di congruenza

conf. ne di rif. indef.



deformazione ("deformation")

variazioni di configurazione

$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix}$

- Il campo di spostamento $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x})$ spaziale definisce compiutamente il processo di deformazione

$$d\mathbf{s} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{x}}}_{\Psi = \nabla \mathbf{s}} \cdot d\mathbf{x} + \dots \quad \to 1^\circ \text{ ord.}$$

Tensore gradiente di spostamento

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = {}_{,i}$$

regime di piccole deformazioni

(piccoli gradienti di spostamento):

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j}$$

$$|\Psi_{ij}| \ll 1$$

(v. concetto $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ prova di trazione)

La misura di "strain" deve essere contenuta in Ψ

- Decomposizione additiva di Ψ

$$\Psi = \varepsilon + \vartheta$$

dove:

$$\varepsilon = \overset{\text{sim}}{\Psi} = \frac{1}{2}\left(\Psi + \Psi^T\right) = \varepsilon^T \leftrightarrow \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$$

$$\vartheta = \overset{\text{emis}}{\Psi} = \frac{1}{2}\left(\Psi - \Psi^T\right) = -\vartheta^T \leftrightarrow \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$$

$i = j,\ \vartheta_{ii} = 0$

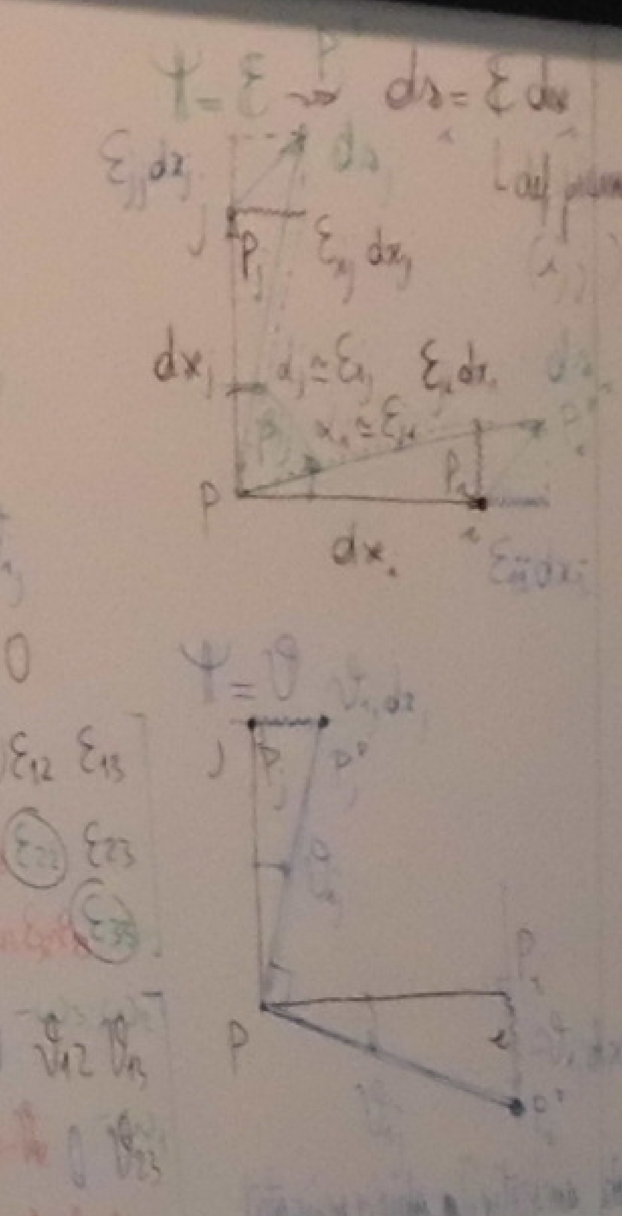
$\varepsilon + \vartheta = \Psi$ $\quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = s_{i,j} + s_{j,i}$

Componenti: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{i,j} + s_{j,i}\right) \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{i,j} - s_{j,i}\right) \Rightarrow [\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ -\vartheta_{13} & -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix}$

$$-2\dot{\omega}_k = 2\dot{\vartheta}_{ij} = \dot{s}_{i,j} - \dot{s}_{j,i}$$

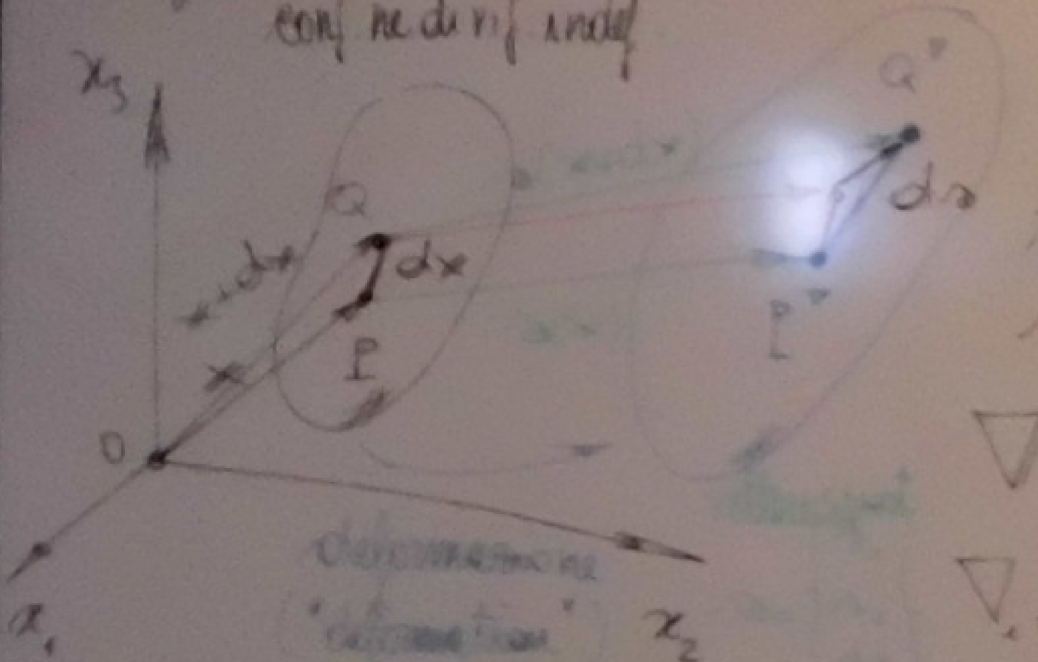
vettore velocità angolare $\omega = \nabla \wedge \mathbf{v}$



Deformazione pura

Deformazione e leggi di congruenza

conf. ne di rif. indef.



- Il campo di spostamento $s = s(x)$ spaziale definisce completamente il processo di deformazione

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot dx + \dots$$

$1°$ ord.

$$\Psi = \nabla s$$

tensore gradiente di spostamento

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \cdot_{,i}$$

regime di piccole deformazioni (piccoli gradienti di spostamento).

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial x_j} = s_{i,j}$$

$$|\Psi_{ij}| << 1$$

(v. concetto $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ prova di trazione)

La misura di "strain" deve essere contenuta in Ψ

- Decomposizione additiva di Ψ:

$$\Psi = \mathcal{E} + \vartheta$$

dove:

$$\mathcal{E} = \Psi^{sim} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T) = \mathcal{E}^T \leftrightarrow \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$$

$$\vartheta = \Psi^{emis.} = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T) = -\vartheta^T \leftrightarrow \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$$

$i = j, \ \vartheta_{ii} = 0$

$\mathcal{E} + \vartheta = \Psi$ $\quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = s_{i,j} + s_{j,i}$

Componenti: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i}) \Rightarrow [\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} & \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

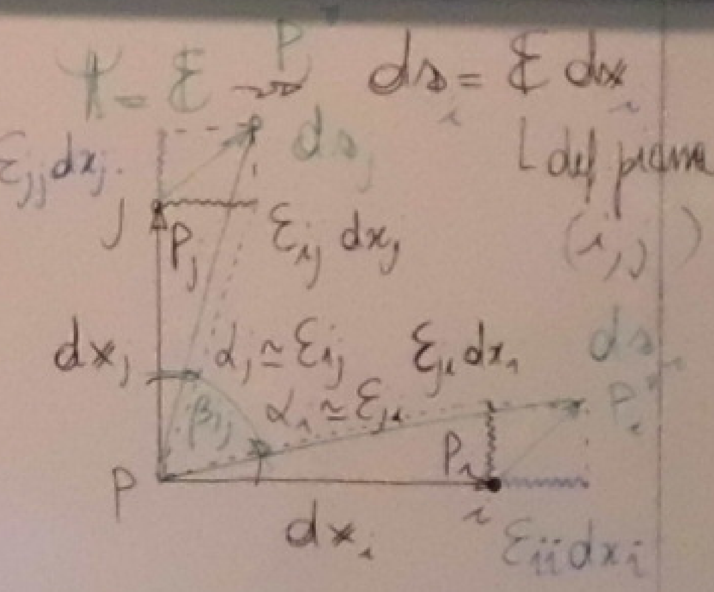
$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i}) \Rightarrow [\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ \vartheta_{21} = -\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ \vartheta_{31} = -\vartheta_{13} & \vartheta_{32} = -\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix}$

$$-2\dot{\omega}_k = 2\dot{\vartheta}_{ij} = \dot{s}_{i,j} - \dot{s}_{j,i}$$

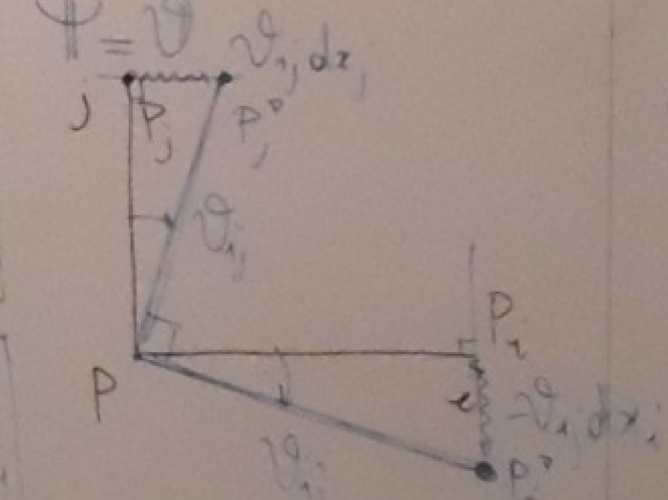
vettore velocità angolare $\omega = \nabla \wedge v$

$\Psi = \mathcal{E} \rightarrow ds = \mathcal{E}\, dx$

def. piana (i, j)



$\Psi = \vartheta$



rotazione rigida infinitesima dell'intorno di P

Deformazione pura

- ε_{ii} allungamento specifico di fibre allineate con il dir. i

$$\frac{(dx_i + \varepsilon_{ii} dx_i) - dx_i}{dx_i} = \varepsilon_{ii}$$ deformazione normale

- ε_{ij} metà scorrimento angolare tra fibre i, j mutuamente $\perp$ e // ad x

$$\alpha_i \simeq \tan \alpha_i = \frac{\varepsilon_{ji}\, dx_i}{dx_i} = \varepsilon_{ji}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij} = \alpha_i + \alpha_j = \varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

scorrimento angolare $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$; $\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma$

deformazione tagliante

$ds = \frac{\partial s}{\partial x} \cdot dx$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$

Decomposizione additiva di Ψ:

$$\Psi = \mathcal{E} + \vartheta$$

dove:

$$\mathcal{E} = \Psi^{sym} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T) = \mathcal{E}^T \leftrightarrow \varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$$

$$\vartheta = \Psi^{emi} = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T) = -\vartheta^T \leftrightarrow \vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$$

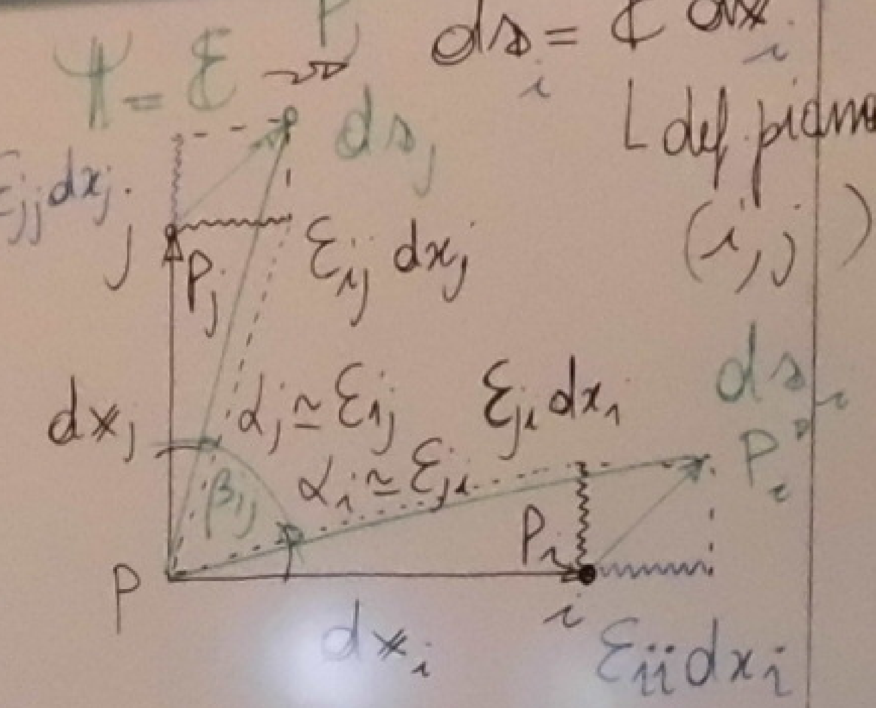
$i = j,\ \vartheta_{ii} = 0$

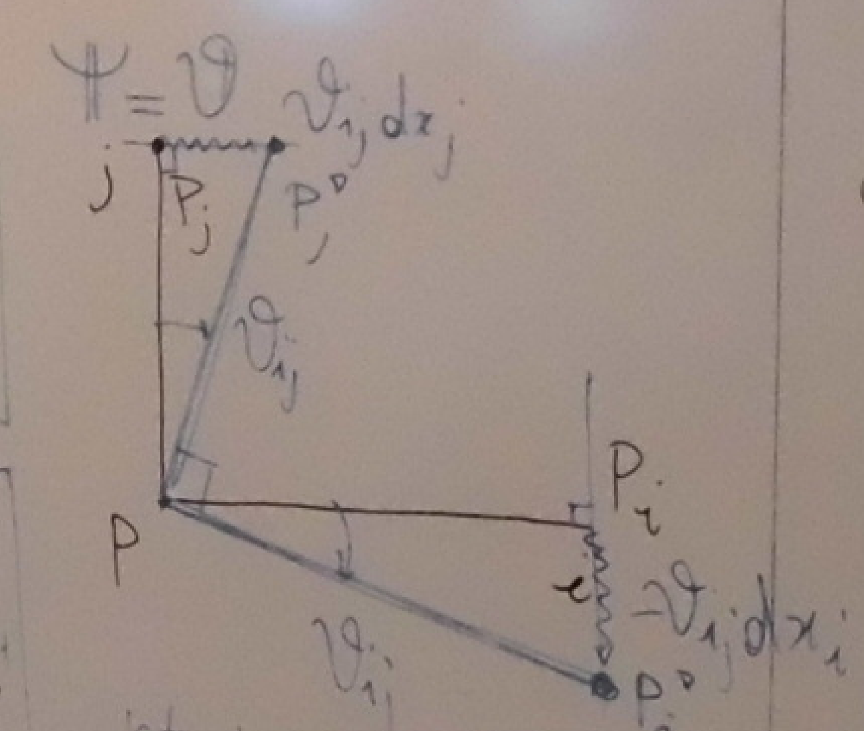
$\mathcal{E} + \vartheta = \Psi \qquad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = s_{i,j} + s_{j,i}$

Componenti: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i}) \Rightarrow [\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21}=\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31}=\varepsilon_{13} & \varepsilon_{32}=\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

$\vartheta_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i}) \Rightarrow [\vartheta] = \begin{bmatrix} 0 & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} \\ \vartheta_{21}=-\vartheta_{12} & 0 & \vartheta_{23} \\ \vartheta_{31}=-\vartheta_{13} & \vartheta_{32}=-\vartheta_{23} & 0 \end{bmatrix}$

$-2\omega_{ij} = 2\vartheta_{ij} = s_{i,j} - s_{j,i}$





rotazione rigida infinitesima dell'intorno di P

Deformazione pura

- ε_{ii} : allungamento specifico di fibre allineate con il dir. i — deformazione normale

$$\frac{(dx_i + \varepsilon_{ii}\, dx_i) - dx_i}{dx_i} = \varepsilon_{ii}$$

- ε_{ij} : metà scorrimenti angolari tra fibre i, j mutuam. ⊥ e // al sist.

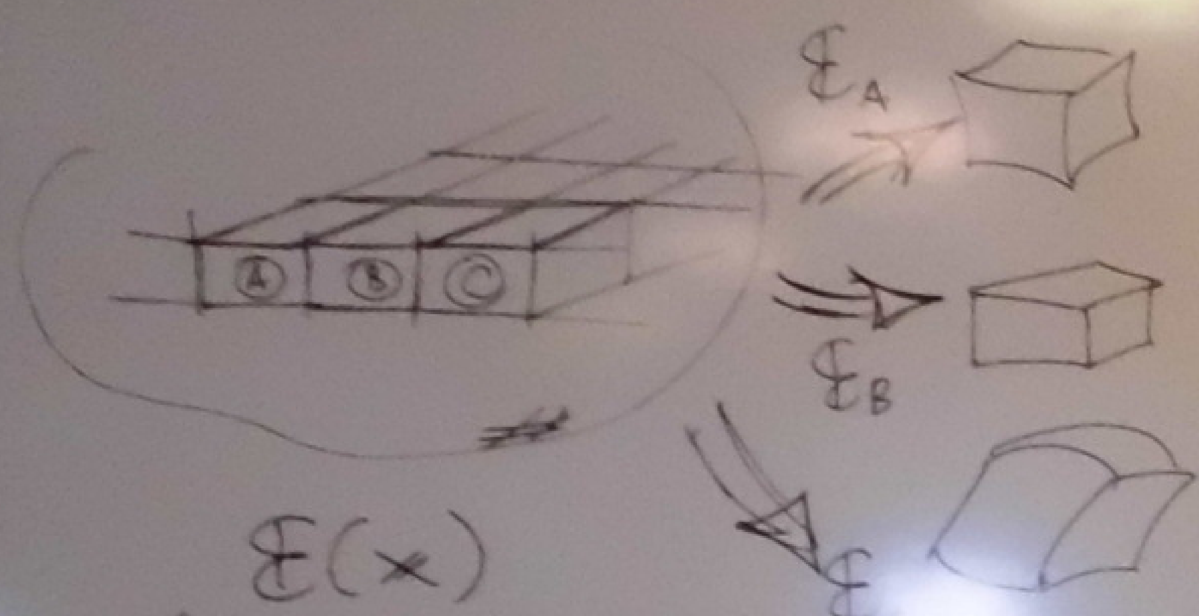
$$\alpha_i \simeq \tan \alpha_i = \frac{\varepsilon_{ji}\, dx_i}{dx_i} = \varepsilon_{ji}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij} = \alpha_i + \alpha_j = \varepsilon_{ji} + \varepsilon_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

scorrimento angolare $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$

deformazione tagliante

Eq.ni di congruenza o di compatibilità interna



$\varepsilon(x)$

deformazione pura

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

$(\varepsilon^T = \varepsilon)$

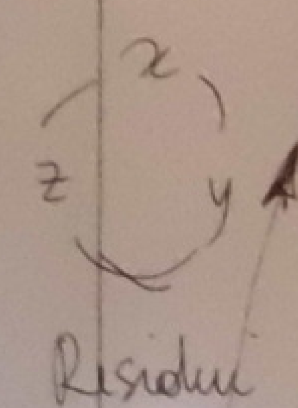
variazione spaziale arbitraria: potrebbe risultare incongruente o incompatibile

Se $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla s^T) \Rightarrow \varepsilon$ congruente

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$

eq.ni di compatibilità DSV ~1884

Malvern, 1969



$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla s^T)$ (+)

Th. Schwarz

$$
\begin{cases}
R_z = S_{zz} = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} \overset{(+)}{=} \cancel{s_{x,xyy}} + \cancel{s_{y,yxx}} - 2\,\frac{1}{2}(s_{x,y} + s_{y,x})_{,xy} \overset{!}{=} 0 \\
R_x = S_{xx} = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0 \\
R_y = S_{yy} = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0
\end{cases}
$$

Scarti di compatibilità

$$
\begin{cases}
U_x = S_{yz} = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} \overset{(+)}{=} -s_{x,xyz} - \frac{1}{2}(s_{y,z} + s_{z,y})_{,xx} + \frac{1}{2}(s_{x,y} + s_{y,x})_{,xz} + \frac{1}{2}(s_{x,z} + s_{z,x})_{,xy} = 0 \\
U_y = S_{zx} = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} \\
U_z = S_{xy} = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx}
\end{cases}
$$

rot $= \nabla\wedge$ $S = \text{rot rot}\,\varepsilon$, S_{ij} $\Rightarrow \boxed{S = 0}$ CN di congruenza

oppure $R = 0$, $U = 0$

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

$3^4 = 81$ eq.ni $\rightarrow$ equiv. a $3+3 = 6$ eq.ni di congruenza separate

$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla s^T) \Rightarrow S = 0$

equivalenti a 3 ...

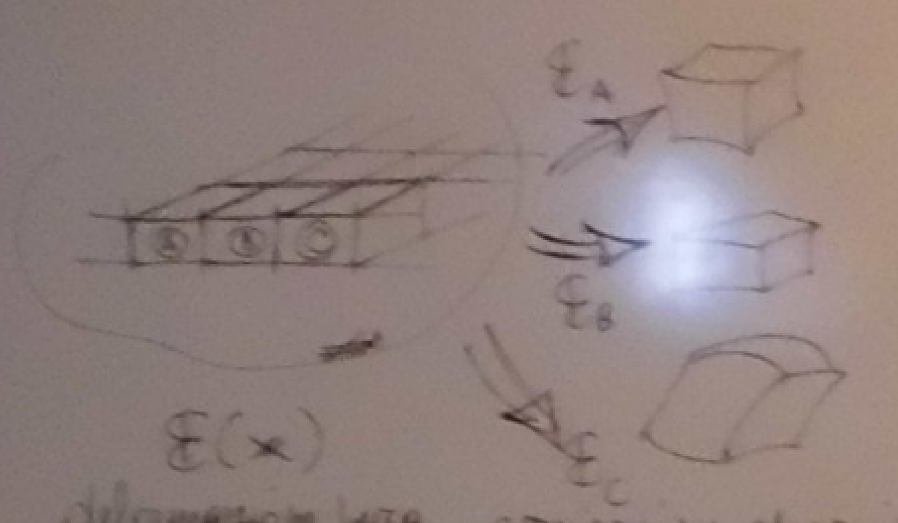
Th. di S.

- 3 Identità di Bianchi

$$
\begin{cases}
R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} = 0 \\
U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} = 0 \\
U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} = 0
\end{cases}
$$

CS di congruenza

Eq.ni di congruenza e di compatibilità interna



$\varepsilon(x)$

deformazione pura

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

$(\varepsilon^T = \varepsilon)$

variazione spaziale arbitraria: potrebbe risultare incongruente o incompatibile

eq.ni di compatibilità ~ 1886

DSV

Malvern, 1969

Residui

$$
\begin{cases}
R_z = S_{zz} = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} \overset{(*)}{=} \cancel{\partial_{x,xyy}} + \partial_{y,yxx} - 2\,\tfrac{1}{2}(\partial_{x,y} + \partial_{y,x})_{,xy} \overset{\text{Th. Schwarz}}{=} 0 \\
R_x = S_{xx} = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0 \\
R_y = S_{yy} = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0
\end{cases}
$$

L Scarti di compatibilità

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)\ (*)$$

$$
\begin{cases}
U_x = S_{yz} = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} \overset{(*)}{=} -\partial_{x,xyz} - \tfrac{1}{2}(\partial_{y,z} + \partial_{z,y})_{,xx} + \tfrac{1}{2}(\partial_{x,y} + \partial_{y,x})_{,xz} + \tfrac{1}{2}(\partial_{x,z} + \partial_{z,x})_{,xy} \overset{\text{Th. di S.}}{=} 0 \\
U_y = S_{zx} = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} = 0 \\
U_z = S_{xy} = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx}
\end{cases}
$$

$\text{rot} = \nabla\wedge$ $\quad \mathbb{S} = \text{rot rot } \varepsilon$, S_{ij} $\Rightarrow \boxed{\mathbb{S} = 0}$ } CN di congruenza

oppure $R = 0$, $U = 0$

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk}}$$

$3^4 = 81$ eq.ni $\rightarrow$ equiv. a $\underbrace{3+3}_{=6}$ eq.ni di congruenza soprascritte

$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi^T) \Rightarrow \mathbb{S} = 0$

equivalenti a 3 sole relazioni indip.

• 3 Identità di Bianchi

$$
\begin{cases}
R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} = 0 \\
U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} = 0 \\
U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} = 0
\end{cases}
$$

$\Leftrightarrow$ div $\mathbb{S} = 0$

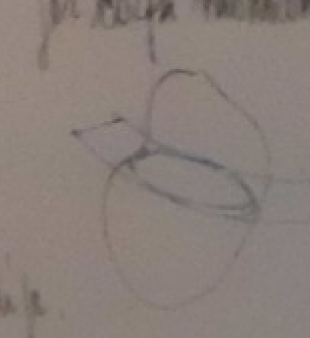
$S_{ij,i} = 0_j$

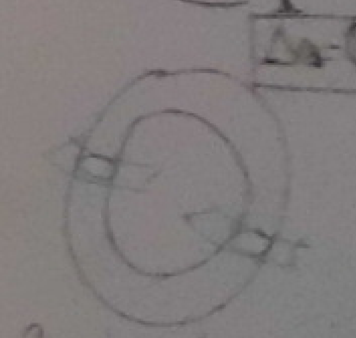
L sempre valide (anche se ε fosse non congr.)

CS di congruenza per corpi semplicemente connessi

No CS di congr.

$\boxed{\Delta u = 0}$





Corpo molteplicemente connesso

Th. Schwarz
R_z = S_zz = ε_xx,yy + ε_yy,xx − ε_xy,xy − ε_xy,xy =
R_x = S_xx = ε_yy,zz + ε_zz,yy − 2ε_yz,yz
R_y = S_yy = ε_zz,xx + ε_xx,zz − 2ε_zx,zx
L scarti di compatibilità
= 0
rot = ∇∧
S = rot rot ε , S_ij ⇒ S = 0
CN di congruenza
ε_ij,kl + ε_kl,ij = ε_ik,jl + ε_jl,ik
3^4 = 81 eq.ni → equiv. a 3+3 eq.ni di congruenza soprascritte
equivalenti a 3 sole relazioni indip.
ε = 1/2(Ψ + Ψ^T) ⇒ S = 0
3 Identità di Bianchi
R_x,x + U_z,y + U_y,z = 0
U_z,x + R_y,y + U_x,z = 0 ⇔ div S = 0
U_y,x + U_x,y + R_z,z = 0
S_ij,i = 0
L sempre valide
Th. di S.
CS di congruenza per corpi monoconnessi
NO CS di congr.
Δs = 0
Corpi pluriconnessi