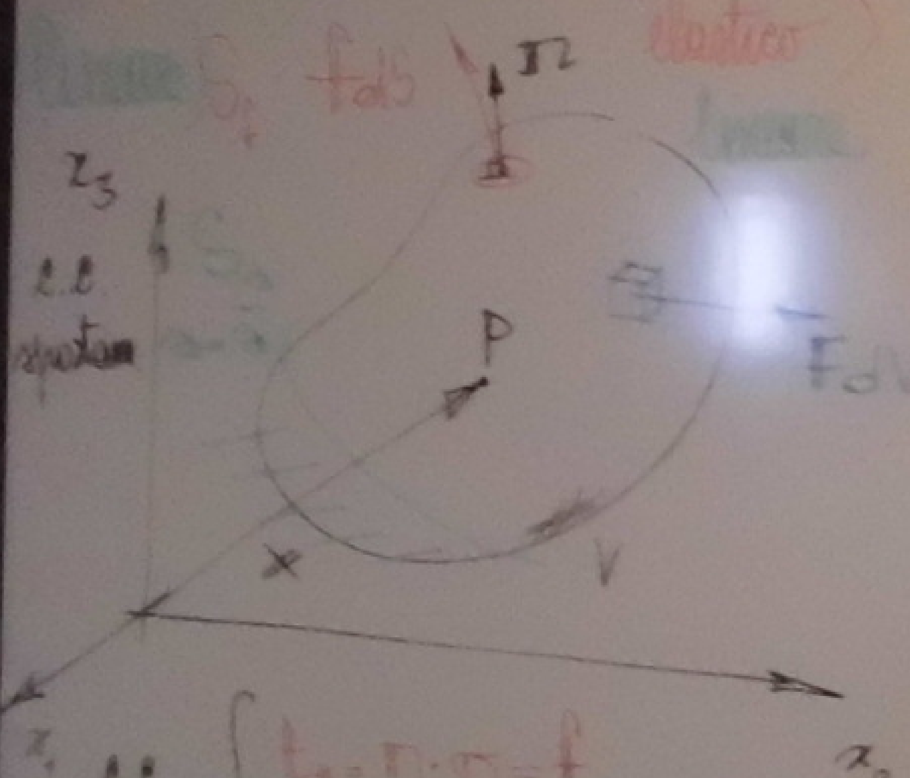
Problema elastico
legame costitutivo elastico
lineare
lineare
c.c. spostam.
c.c. sforzo
Risposta tenso-deformativa:
- sforzo: tensore sforzo di Cauchy σ(x)
di comp. σij (6 comp.)
- deformazione: campo di spostamento s(x)
di comp. si (3 comp.)
campo di deformazione ε(x)
di comp. εij (6 comp.)
15 comp.
(senza det. del campo di spostamento)
12 inc.
Eqni governanti
div σ + F = 0 in V
σij,i + Fj = 0, j=1,2,3 3 eq.
congruenza di
3 Identità di Bianchi
3 eq. ind.
Legame costitutivo (comp. meccanico del materiale)
15 eq.ni
12 eq.ni

Problema elastico



legame costitutivo elastico

c.c. sforzo $\begin{cases} t_n = n \cdot \sigma = f \\ \text{su } S_f \end{cases}$

Risposta tenso-deformativa:

- sforzo: tensore sforzo di Cauchy $\sigma(\underline{x})$
  di comp. σ_{ij} (6 comp.)
- deformazione:
  - campo di spostamento $s(\underline{x})$ di comp. s_i (3 comp.)
  - campo di deformazione $\varepsilon(\underline{x})$ di comp. ε_{ij} (6 comp.)

15 comp.

(senza det. del campo di spostamento) 12 inc.

Eq.m governanti

$\mathrm{div}\,\sigma + F = 0$ in V

- $\sigma_{ij,i} + F_j = 0$; $j = 1,2,3$ 3 eq

congruenza di eq.m di DSV $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$ 81 eq → 6 eq.

3 Identità di Bianchi → 3 eq. ind.

- $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla s^T)$ in V

  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$ $i,j = 1,2,3$ 6 eq

Legame costitutivo (comp. meccanico del materiale)

- $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ o $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ $i,j,k,l = 1,2,3$ 6 eq
  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$ o $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\sigma_{kl})$

(equil. in sede indef. + relaz. deform./spost.) 9 eq.ni
+ comp. del materiale (elastico) 15 eq.ni

(3 eq. equil. + 3 di congr. + 6 leg. cost.) 12 eq.ni

Legame iperelastico → Postuliamo l'esistenza di energia di deformazione definita positiva

Energia complementare (Engesser, Castigliano)

$\chi(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon : d\sigma > 0 \;\forall \sigma \neq 0$

$d\chi$ diff. esatto

$d\chi = \varepsilon : d\sigma = \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij}$

CNS $\varepsilon = \frac{\partial \chi(\sigma)}{\partial \sigma}$

$\varepsilon_{ij} = \partial\chi / \partial\sigma_{ij}$

f.ne potenziale di deformaz.

Per ulteriore derivazione: $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}$

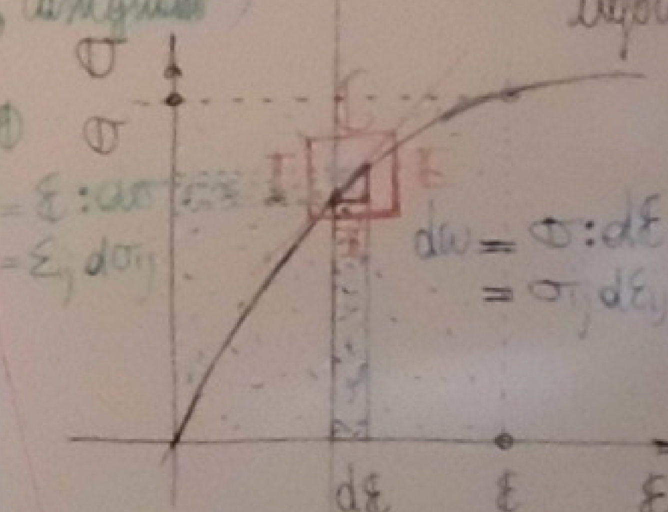
$C = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \chi(\sigma)}{\partial \sigma \partial \sigma}$

tensore di cedevolezza (tangente) (4° ord.)

$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}$ 81 comp → 36 comp.

simmetrie $C_{ijkl} = C_{klij}$

$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$



$d\omega = \sigma : d\varepsilon = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}$

$\omega(\varepsilon) + \chi(\sigma) = \sigma : \varepsilon$

$\chi(\sigma) = \sigma : \varepsilon - \omega(\varepsilon)$

$C = E^{-1}$

$E = C^{-1}$

$\omega(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma : d\varepsilon > 0 \;\forall \varepsilon \neq 0$

energia di deformaz. $d\omega$ diff. esatto

CNS $\sigma = \frac{\partial \omega(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$

$\sigma_{ij} = \partial\omega / \partial\varepsilon_{ij}$

f.ne potenziale di sforzo

(Green elastic. ~1839)

Per ulteriore derivazione $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$

$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \omega(\varepsilon)}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon}$

(4° ordine)

$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$ $3^4 = 81$ comp.

Simmetria: $E_{ijkl} = E_{klij}$ maggiore

(simm. di σ ed ε) $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}$ minori 36

Problema elastico

Risposta tenso-deformativa

- sforzo: tensore sforzo di Cauchy $\sigma(x)$, incogn. σ_{ij} (6 comp.)
- deformazione: - campo di spostamento $s(x)$, incogn. s_i (3 comp.)
  - campo di deformazione $\mathcal{E}(x)$, incogn. ε_{ij} (6 comp.)

12 inc.

Eq.ni governanti

$\text{div}\,\sigma + F = 0$ in V

$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$, $i = 1,2,3$ 3 eq

congruenze di eq.ni di DSV $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$ 81 eq → 6 eq.

3 Identità di Bianchi

3 eq. ind.

$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\nabla s + \nabla s^T)$ in V

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$ $i,j = 1,2,3$ 6 eq

Legame costitutivo (comp. meccanico del materiale)

$\sigma = \sigma(\mathcal{E})$ o $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\sigma)$ $i,j,k,l = 1,2,3$ 6 eq

(equil. in scala indef. + relaz. deform/spost.) 9 eq.ni

+ comp. del materiale (elastico) 15 eq.ni

(3 eq. equil. + 3 di congr. + 6 leg. cost.) 12 eq.ni

Energia complementare (Engesser, Castigliano)

$\chi(\sigma) = \int_0^{\sigma} \mathcal{E} : d\sigma > 0 \ \forall \sigma \neq 0$

$d\chi$ diff esatto

$d\chi = \mathcal{E} : d\sigma = \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij}$

CNS $\mathcal{E} = \frac{\partial \chi(\sigma)}{\partial \sigma}$

$\varepsilon_{ij} = \partial\chi / \partial\sigma_{ij}$

f.ne potenziale di deformaz.

Per ulteriore derivazione: $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}$

$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \chi(\sigma)}{\partial \sigma \partial \sigma}$

tensore di cedevolezza (tangente) (4° ord.)

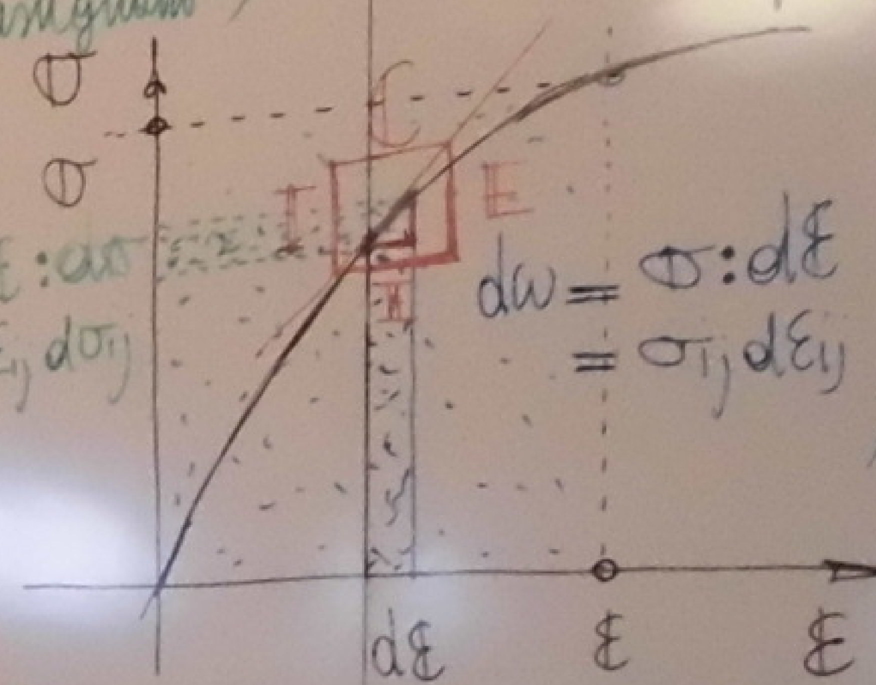
$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}$ 81 comp

simmetrie $C_{ijkl} = C_{klij}$

$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$

36 comp. 21 comp. (σ)

Legame iperelastico → Postuliamo l'∃nza di energia di deformazione definita positiva



$\omega(\mathcal{E}) + \chi(\sigma) = \sigma : \mathcal{E}$

$\chi(\sigma) = \sigma : \mathcal{E} - \omega(\mathcal{E})$ Trasf. di Legendre

$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}$

$\mathbb{E} = \mathbb{C}^{-1}$

$\omega(\mathcal{E}) = \int_0^{\mathcal{E}} \sigma : d\mathcal{E} > 0 \ \forall \mathcal{E} \neq 0$

$d\omega$ diff esatto

$d\omega = \sigma : d\mathcal{E} = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}$ energia di deformaz.

CNS $\sigma = \frac{\partial \omega(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}}$

$\sigma_{ij} = \partial\omega / \partial\varepsilon_{ij}$

f.ne potenziale di sforzo (Green elasticity ~1839)

Per ulteriore derivazione $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$

$\mathbb{E} = \frac{\partial \sigma}{\partial \mathcal{E}} = \frac{\partial^2 \omega(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E} \partial \mathcal{E}}$

tensore di rigidezza (tangente) (4° ordine)

$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$ $3^4 = 81$ comp.

Simmetrie: $E_{ijkl} = E_{klij}$ maggiori (Th. di Schwarz) → 21 ($\mathcal{E}$)

(simm. di σ ed ε) $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk}$ minori 36

Legame iperelastico lineare (legge di Hooke generalizzata)
ω = 1/2 ε : E : ε = 1/2 ε_ij E_ijkl ε_kl > 0 ∀ ε ≠ 0
σ = ∂ω/∂ε = E : ε ⇔ σ_ij = E_ijkl ε_kl
ISOT. σ = λ tr ε I + μ ε
costanti di Lamé
μ = G
λ = νE / (1+ν)(1−2ν)
E = ∂²ω/∂ε∂ε = cost tensore di rigidezza E_ijkl
21
C^iso = matrice di cedevolezza (D.P.)
E > 0
−1 < ν < 1/2
legno, mat. compositi
Materiale ortotropo
diraz. locali
di ortotropia
C = E^−1
E = C^−1
ω = γ = 1/2 σ : ε = 1/2 ε : σ
Comportamento isotropo
21 param. indip. → 2 parametri indip.
Shear modulus
G = E / 2(1+ν)
{ε} = [C]·{σ}
bulk modulus
K = E / 3(1−2ν)
ν → 1/2, K → ∞
Disacc.
Volum./dev.
p = Kv ; v = 1/K p
9 parametri indipendenti
3 moduli elast. lon. E1, E2, E3
3 coeff. di Poisson ν12, ν13, ν23
3 moduli elast. tang.
modulo di elast. longitud. (Young)
coeff. di contraz. trasv. di Poisson

Legame elastico lineare (legge di Hooke generalizzata)
costante di Lamé
tensore di rigidezza
matrice di cedevolezza
Comportamento isotropo
diraz. locali di ortotropia
Materiale ortotropo (simm rispetto a tre piani mutuam. ort.
(es. materiale fibroso legno, mat. compositi)
9 parametri indipendenti
3 moduli elast. lineari E_1, E_2, E_3
3 coeff. di Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$
3 moduli elast. tang.
Mat. trasversalmente isotropo
caso particolare
5 parametri indip.
Hermann Schwarz
lived from 1843 to 1921

Materiale ortotropo (simm. rispetto a tre piani mutuam. ort.)
diaz. locali di ortotropia
materiale fibroso: legno, mat. compositi
C =
9 parametri indipendenti
3 moduli elast. long. E1, E2, E3
3 coeff. di Poisson ν12, ν13, ν23
3 moduli elast. tang. G12, G23, G13
Mat. trasversalmente isotropo
(caso particolare)
un solo array di fibre
comp. isotropo nel piano ortogonale all'asse trasverso
5 parametri indip.
E, ET
ν, νT
GT