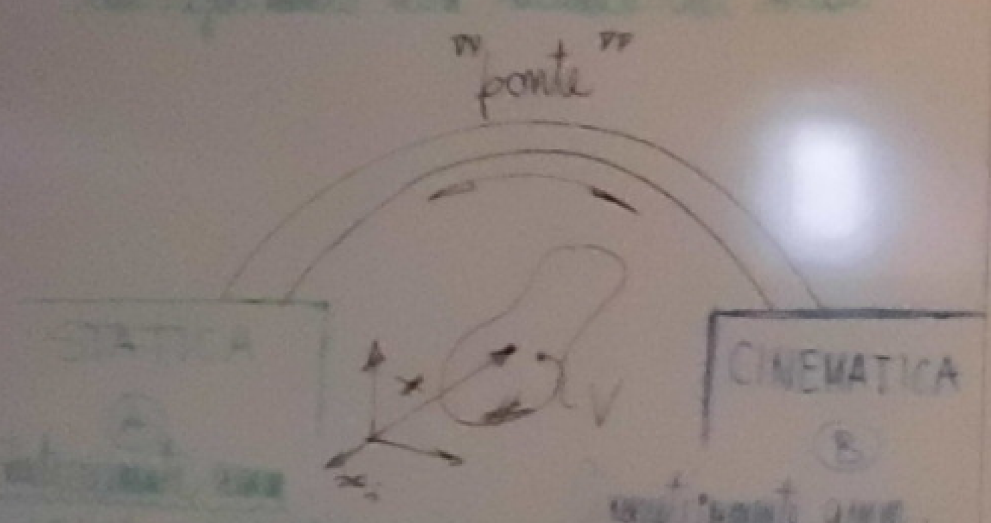
Principio (teorema) dei Lavori Virtuali (PLV)
"ponte"
STATICA
A
CINEMATICA
B
Cinematicamente amm.
Famiglia di quantità cinem. congr.
Enunciato del PLV quale CN di equil. e congr.
Manifestazioni del PLV:
PSV (CS di equil.)
B cin. amm.
PFV (CS di congr.)
A static. amm.
(cioè congruente)
Th della divergenza
Sia
sim.
N.B. .. in generale sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sist. reali, quindi del tutto slegati da relazioni di causa-effetto, pertanto indipendent. dal comportamento del materiale (in particolare elastico o anelastico)

Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

"ponte"



cinematicamente amm.

$$\overset{B}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \overset{B}{s} + \nabla \overset{B}{s}^{T}\right) \text{ in } V$$

$$\overset{B}{s} = \overset{-B}{s} \text{ su } S_s$$

N.B. in generale sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sist. reale, quindi del tutto slegati da relazioni di causa-effetto, pertanto indipendenti dal comportamento del materiale

Enunciato del PLV quale CN di equil. e congr.

$$\forall \text{ coppia } \left.\begin{array}{l} Ⓐ \text{ static. amm.} \\ Ⓑ \text{ cin. amm.} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}_e^{AB} = \int_V \underbrace{\overset{A}{F}\cdot\overset{B}{s}}_{\overset{A}{F_i}\overset{B}{s_i}} dV + \int_{S_f} \overset{A}{f}\cdot\overset{B}{s}\, dS + \int_{S_s} n\cdot\overset{A}{\sigma}\cdot\overset{-B}{s}\, dS \stackrel{CN}{=} \int_V \underbrace{\overset{A}{\sigma} : \overset{B}{\varepsilon}}_{\overset{A}{\sigma_{ij}}\overset{B}{\varepsilon_{ij}}} dV = \mathcal{L}_i^{AB}$$

identità dei lavori virtuali

Manifestazioni del PLV:

– PSV (CS di equil.)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \\ Ⓑ \text{ cin. amm.} \end{array}\right\} \Rightarrow Ⓐ \text{ è static. amm. (cioè equil.)}$$

– PFV (CS di congr.)

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \\ Ⓐ \text{ static. amm.} \end{array}\right\} \Rightarrow Ⓑ \text{ è cin. amm. (cioè congruente)}$$

Th della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div} g\, dV \stackrel{\text{th div}}{=} \int_S n\cdot g\, dS$$

g campo tensoriale (es. vettore di comp. g_i)

dove $\operatorname{div} g = \nabla\cdot g \rightarrow \operatorname{div} g \stackrel{es.}{=} g_{i,i}$ scalare

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\ ; \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$$

Sia:

$$g = \sigma\cdot s \Rightarrow \operatorname{div} g \stackrel{?}{=} \operatorname{div}\sigma\cdot s + \underbrace{\sigma : \nabla s^{T}}$$

$$g_i = \sigma_{ij} s_j \Rightarrow \operatorname{div} g = g_{i,i}$$

$$= (\sigma_{ij} s_j)_{,i}$$

$$= \sigma_{ij,i} s_j + \sigma_{ij} s_{j,i}$$

$$= \operatorname{div}\sigma\cdot s + \underbrace{\sigma : \nabla s^{T}}_{\sigma : (\varepsilon^{T} + \vartheta^{T})}$$

$$\sigma : \varepsilon^{T} + \sigma : \vartheta^{T}$$

$\varepsilon^{T} = \varepsilon$ sim. $\quad \vartheta^{T} = -\vartheta$ emisim.

$$\Psi = \nabla s = \varepsilon + \vartheta$$

mentre σ è sim. $\Rightarrow \sigma^{T} = \sigma$

$$(*)\quad \boxed{\sigma : \varepsilon = \operatorname{div}(\sigma\cdot s) - \operatorname{div}\sigma\cdot s}$$

– PLV (TLV) di validità del tutto generale, quindi anche nell'ambito della meccanica delle strutture

sim. emisim.

$$\sigma \perp \vartheta$$

DIM:

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_V \overset{A}{\sigma} : \overset{B}{\varepsilon}\, dV = \int_V \operatorname{div}(\overset{A}{\sigma}\cdot\overset{B}{s}) - \int_V \operatorname{div}\overset{A}{\sigma}\cdot\overset{B}{s}\, dV$$

Th. div. Ⓐ stat. am. Ⓑ cin. am.

$$= \int_{S_f} \overset{A}{f}\cdot\overset{B}{s}\, dS + \int_{S_s} n\cdot\overset{A}{\sigma}\cdot\overset{-B}{s}\, dS + \int_V \overset{A}{F}\cdot\overset{B}{s}\, dV = \mathcal{L}_e^{AB}$$

c.v.d.

Principio dei Lavori Virtuali (PLV)
Enunciato del PLV quale CN di equil. e congr.
Manifestazioni del PLV.
Th della divergenza
∫ div g dV = ∫ n · g dS
Sia:
g_j = σ · s ⇒ div g_j = (div σ) · s + σ : ∇s^T
g_i = σ_ij s_j ⇒ div g = g_i,i
= (σ_ij s_j),i
= σ_ij,i s_j + σ_ij s_j,i
= div σ · s + σ : ∇s^T
ε^T = ε   ϑ^T = −ϑ
sim.   emisim.
Ψ = ∇s = ε + ϑ
σ : (ε^T + ϑ^T)
σ : ε^T + σ : ϑ^T
σ : ε = div(σ · s) − (div σ) · s
identità dei lavori virtuali
σ_ij ε_ij
DIM:
ℒ_i^AB = ∫ σ^A : ε^B dV
Th div.
A stat. am.
B cinem. am.
+ ∫ F^A · s^B dV
= ℒ_e^AB
c.v.d.
− PLV (TLV) di validità del tutto generale, quindi anche nell'ambito della meccanica delle strutture −
sim.   emisim.
σ ⊥ ϑ
= 0

Proprietà del pb elastico lineare
- Principio di Sovrapponibilità degli Effetti (PSE)
DATI
SOLUZIONE
Sistema ① → $F_1, f_1, \bar{s}_1 \Rightarrow \sigma_1, \varepsilon_1, s_1$
Sistema ② → $F_2, f_2, \bar{s}_2 \Rightarrow \sigma_2, \varepsilon_2, s_2$
α ① + β ②
comb. lineare dati ⇒ comb. lineare della soluzione.
$\alpha F_1 + \beta F_2$
$\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2$
$\alpha f_1 + \beta f_2 \Rightarrow \alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2$
$\alpha \bar{s}_1 + \beta \bar{s}_2$
$\alpha s_1 + \beta s_2$
Infatti il pb. è retto da equ. (differenziali) e operatori lineari.
Ad es.: $\nabla(\alpha s_1 + \beta s_2) = \alpha \nabla s_1 + \beta \nabla s_2$
- Buona posizione del pb (matematico)
(ammette soluzione con dipendenza continua dai dati)
- Ammette soluzione (v. dim. testi di elasticità), $\exists$
- Unicità soluzione (Th di Kirchhoff ~1859), $\exists!$
Dim. (per assurdo) due soluzioni
stessi dati $F, f, \bar{s}$ → $\sigma_1, \varepsilon_1, s_1$ ≠ ≠ ≠ → $\sigma_2, \varepsilon_2, s_2$
PSE $\alpha = -\beta = 1$
linearità $\Delta F = 0, \Delta f = 0, \Delta \bar{s} = 0 \Rightarrow$
elast. leg. cost.
$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$
$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
non univoca (≠ per moti rigidi)
$\Delta s = s_1 - s_2$
Tramite applicazione del PLV (sist. reale)
elasticità
$L_e \equiv 0 = \int_V \Delta\sigma : \Delta\varepsilon \, dV = L_i = 2 \int_V \omega(\Delta\varepsilon) \, dV > 0 \;\; \forall \Delta\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\varepsilon = 0}$
$\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$
contraddizione del ragionamento per assurdo
$\Delta\sigma = E : \Delta\varepsilon = 0$
$\boxed{\sigma_1 = \sigma_2}$
- Strategie risolutive (problema)
- approccio diretto dati → soluz.
- approccio semi-inverso dati ⇄ soluz.
- approccio inverso dati ← soluz.

Proprietà del pb elastico lineare

- Principio di Sovrapponibilità degli Effetti (PSE)

DATI — SOLUZIONE

Sistema ① → $F_1, f_1, \bar{s}_1$ → $\sigma_1, \varepsilon_1, s_1$

Sistema ② → $F_2, f_2, \bar{s}_2$ → $\sigma_2, \varepsilon_2, s_2$

α ① + β ② — comb. lineare dei dati ⟹ comb. lineare delle soluzioni

$\alpha F_1 + \beta F_2$ — $\alpha \sigma_1 + \beta \sigma_2$

$\alpha f_1 + \beta f_2$ ⟹ $\alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2$

$\alpha \bar{s}_1 + \beta \bar{s}_2$ — $\alpha s_1 + \beta s_2$

- Infatti il pb è retto da eqn. (differenziali) e operatori lineari

Es. $\nabla(\alpha s_1 + \beta s_2) = \alpha \nabla s_1 + \beta \nabla s_2$

- Buona posizione del pb (matematico)
(ammette soluzione con dipendenza continua dai dati)
- Ammette soluzione (v. dim. testi di elasticità), $\exists$
- Unicità soluzione (Th. di Kirchhoff ~1859), $\exists!$

Dim. (per assurdo): due soluzioni

stessi dati $F, f, \bar{s}$ → $\sigma_1, \varepsilon_1, s_1$ $\neq$ $\neq$ $\neq$ → $\sigma_2, \varepsilon_2, s_2$

PSE $\alpha = -\beta = 1$ — linearità

$\Delta F = 0, \Delta f = 0, \Delta \bar{s} = 0$ → $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\Delta s = s_1 - s_2$

$\omega(\Delta\varepsilon)$ elast. leg. cost. — elasticità

non univoca ($\neq$ per moti rigidi)

- Tramite applicazione del PLV (sist. reale)

$L_e = 0 = \int_V \Delta\sigma : \Delta\varepsilon \, dV = L_i = 2 \int_V \omega(\Delta\varepsilon)\, dV > 0$ ⟹ $\boxed{\Delta\varepsilon = 0}$

$> 0 \;\forall \Delta\varepsilon \neq 0$

$\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$ contraddizione del ragionamento per assurdo

$\Delta\sigma = E : \Delta\varepsilon = 0$

$\boxed{\sigma_1 = \sigma_2}$ unicità in σ e ε

- Strategie risolutive (problema)
- approccio diretto: dati → soluz.
raramente percorribile, specie in forma analitica (v. teoria strutturale, pb. di DSV)
- approccio semi-inverso: dati ⇄ soluz.
parte nota — parte nota
strategia risolutiva per pb. di elast. lin. (supportata dalla garanzia di unicità)
- approccio inverso: dati ← soluz.
interesse anche in senso pratico (v. identificazione di proprietà strutturali, es. identificazione di danno, moduli)

- Metodi risolutivi
- Metodi analitici → soluz. analitica
- forma chiusa o sviluppo in serie
- esatta o approssimata
- Metodi grafici (meccanica delle strutture)
- Metodi numerici (pb. discreto)
- Metodo degli Elementi Finiti (FEM)
- Metodo delle Differenze Finite (FD)
- " degli Elementi [illegible]
- " " " di contorno (BEM)


- Strategie risolutive
(problema)
- approccio diretto: dati ⇒ soluz.
raramente percorribile, specie in forma
analitica (v. teorie strutturali, pb. di DSV)
- approccio semi-inverso: dati
parz. nota
parz. nota
strategia risolutiva per pb. di elast. lin.
(supportata dalla garanzia di unicità)
- approccio inverso: dati ⇐ soluz.
interesse anche in casi pratici (v. identificazione
di proprietà strutturali, es. identificazione
dinamica modale)
$\sigma_1 = \sigma_2$ unicità in σ e ε
contraddizione del ragionamento per assurdo
- Metodi risolutivi
- Metodi analitici ⇒
soluz. analitica
- forma chiusa o sviluppi in serie
- esatta o approssimata
- Metodi grafici (meccanica
delle Strutture)
- Metodi numerici (per pb. discreto)
- Metodo degli Elementi Finiti
(FEM)
- Metodo delle Differenze Finite (FD)
- " degli Elementi Distinti o Discreti
DEM
di Contorno (BEM)