
Pb. di de Saint Venant (~1855)
Analisi di un problema elastico lineare riferito ad un solido di forma cilindrica, di sezione A cost., ad asse rettilineo, allungata
(cilindro o prisma di DSV)
– Privo di forze di volume
– Privo di forze di superficie sulla sup. laterale
– Privo di vincoli esterni
– Costituito da materiale omogeneo, elastico lineare isotropo di caratteristiche note (E, ν)
– Soggetto solo ad azioni agenti sulle basi
Postulato di DSV
Hp fondamentali di DSV
Equazioni indef. di equil. in V
ellisse principale d'inerzia
raggi giratori d'inerzia
asse del prisma
Risultante
baricentrica
mutuamente perpendicolari
coniugati
dim. trasv.
Slat


Pb. di de Saint Venant (~1855)
Analisi di un problema elastico lineare riferito ad un solido di forma cilindrica, di sezione A cost, ad asse rettilineo, allungata
(cilindro o prisma di DSV)
Privo di forze di volume
Privo di forze di superficie sulla sup laterale
Privo di vincoli esterni
Costituito da materiale omogeneo, elastico
lineare e isotropo di caratteristiche note (E, ν)
Postulato di DSV
Soluzione mediante approccio semiinverso
Hp fondamentali di DSV
Equazioni indef di equil. in V
Equil. al contorno su Slat
Legame costitutivo

Soluzione mediante approccio seminverso
Hp fondamentali di DSV
$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ in V
Equazioni indef. di equil. in V
$\mathrm{div}\,\sigma + F = 0 \Leftrightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = 0_j$ in V
τ_{zx} indip. da z
τ_{zy} indip. da z
τ_z indip. da z
$\mathrm{div}\,\tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z}$
eq. di equil.
lineare in z
Postulato di DSV
Equil. al contorno su Slat ($f = 0$)
$t_n = n \cdot \sigma = f = 0$ in Slat
$n_i \sigma_{ij} = f_j$
$n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_{zz} = 0$
$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$
τ_z tg. al contorno
Legame costitutivo
$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$
$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu\,\varepsilon_{zz}$
$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$
$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}$
$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = 0$
deform. taglianti

- Eq ni di congruenza $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk}$
$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy}$
$\varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\varepsilon_{yz,yz}$ → ε_{zz}, alias σ_{zz} lin in y
$\varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} = 2\varepsilon_{zx,zx}$ → " " in x
$\varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy}$
$\varepsilon_{yy,zx} + \varepsilon_{zx,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz}$
$\varepsilon_{zz,xy} + \varepsilon_{xy,zz} = \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx}$ → ε_{zz}, alias σ_{zz} indip xy
Risultante
$J_x = \int_A y^2 dA$
$J_y = \int_A x^2 dA$
- $N = \int_A \sigma_{zz} dA = cost$; $M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = M_{x_0} + T_y z$
- $T_x = \int_A \tau_{zx} dA = cost$; $M_y = -\int_A \sigma_{zz} x dA = M_{y_0} - T_x z$
- $T_y = \int_A \tau_{zy} dA = cost$; $M_t - T_x y_0 + T_y x_0 = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$ (*)
- Pertanto, il campo σ_{zz} può essere scritto come
$\sigma_{zz} = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y)$
$= a - bz + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y$
Vedi tenso-flessione derivata per PSE
$\sigma_{zz}(x,y,z) = \frac{N}{A} - \frac{M_y(z)}{J_y} x + \frac{M_x(z)}{J_x} y$
- Equivalenza statica tra σ_{zz} e le az. applicate
• $N = \int_A \sigma_{zz} dA = (a - bz)A + (a_1 - b_1 z)S_y + (a_2 - b_2 z)S_x = cost$
$a = \frac{N}{A}$, $b = 0$
$\int_A div\, \tau_z \, dA = \int_\Gamma n \cdot \tau_z \, d\Gamma$
Th Div
$-\sigma_{zz,z} = b + b_1 x + b_2 y$
• $M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = (a_2 - b_2 z) J_x \rightarrow a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x}$
$= \underbrace{a_2 J_x}_{M_{x_0}} - \underbrace{b_2 J_x z}_{T_y} \rightarrow a_2 = \frac{M_{x_0}}{J_x}$, $\boxed{b_2 = -\frac{T_y}{J_x}}$
• $M_y = -\int_A \sigma_{zz} x dA = -(a_1 - b_1 z) J_y \rightarrow a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y}$
$= -\underbrace{a_1 J_y}_{M_{y_0}} + \underbrace{b_1 J_y z}_{-T_x} \rightarrow a_1 = -\frac{M_{y_0}}{J_y}$, $\boxed{b_1 = -\frac{T_x}{J_y}}$
Eq. di equil.
$div\, \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y} x - \frac{T_y}{J_x} y$
- Le rimanenti 2 eq. ni di congruenza porgono:
$\frac{1+\nu}{E}(\tau_{zx,xy} - \tau_{zy,xx}) = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz,zy}$
$\frac{1+\nu}{E}(\tau_{zx,yy} - \tau_{zy,yx}) = +\frac{\nu}{E} \sigma_{zz,zx}$
$f = f(x,y)$
$\int df = \int f_{,x} dx + f_{,y} dy + cost$

- Eq.ni di congruenza $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\,\varepsilon_{xy,xy} \\ \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\,\varepsilon_{yz,yz} \\ \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} = 2\,\varepsilon_{zx,zx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} \\ \varepsilon_{yy,zx} + \varepsilon_{zx,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} \\ \varepsilon_{zz,xy} + \varepsilon_{xy,zz} = \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} \end{cases}$$

Risultante

$$J_x = \int_A y^2\,dA \qquad J_y = \int_A x^2\,dA$$

$N = \int_A \sigma_{zz}\,dA = \text{cost}$; $M_x = \int_A \sigma_{zz}\,y\,dA = M_{x0} + T_y z$

$T_x = \int_A \tau_{zx}\,dA = \text{cost}$; $M_y = -\int_A \sigma_{zz}\,x\,dA = M_{y0} - T_x z$

$T_y = \int_A \tau_{zy}\,dA = \text{cost}$; $M_t = -T_x y_0 + T_y x_0 = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)\,dA$

- Pertanto, il campo σ_{zz} può essere scritto come

$$\sigma_{zz} = a + a_1 x + a_2 y - z(b + b_1 x + b_2 y)$$
$$= a - bz + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y$$

- Equivalenza statica tra σ_{zz} e le az. applicate

- $N = \int_A \sigma_{zz}\,dA = (a - bz)A + (a_1 - b_1 z)S_y + (a_2 - b_2 z)S_x = \text{cost}$

$$a = \frac{N}{A}, \quad b = 0$$

$\int_A \operatorname{div}\tau_z\,dA = \int_\Gamma n \cdot \tau_z\,d\Gamma$ (th. Div)

$-\sigma_{zz,z} = b + b_1 x + b_2 y$

- $M_x = \int_A \sigma_{zz}\,y\,dA = (a_2 - b_2 z)J_x \rightarrow a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x}$; $bA = 0 \Rightarrow b = 0$

$$= \underbrace{a_2 J_x}_{M_{x0}} \underbrace{- b_2 J_x}_{T_y} z \rightarrow a_2 = \frac{M_{x0}}{J_x}, \quad \boxed{b_2 = -\frac{T_y}{J_x}}$$

- $M_y = -\int_A \sigma_{zz}\,x\,dA = -(a_1 - b_1 z)J_y \rightarrow a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y}$

$$= \underbrace{-a_1 J_y}_{M_{y0}} + \underbrace{b_1 J_y}_{-T_x} z \rightarrow a_1 = -\frac{M_{y0}}{J_y}, \quad \boxed{b_1 = -\frac{T_x}{J_y}}$$

Vedi tenso-flessione deviata per PSE

$$\boxed{\sigma_{zz}(x,y,z) = \frac{N}{A} - \frac{M_y(z)}{J_y}x + \frac{M_x(z)}{J_x}y}$$

Eq. di equil.

$$\operatorname{div}\tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y}x - \frac{T_y}{J_x}y$$

Le rimanenti 2 eq.ni di congruenza porgono:

$$\begin{cases} \frac{1+\nu}{E}\left(\tau_{zx,xy} - \tau_{zy,xx}\right) = -\frac{\nu}{E}\,\sigma_{zz,zy} \\ \frac{1+\nu}{E}\left(\tau_{zx,yy} - \tau_{zy,yx}\right) = +\frac{\nu}{E}\,\sigma_{zz,zx} \end{cases}$$

$f = f(x,y)$

$$\left(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}\right)_{,x} = \bar{\nu}\,b_2 \qquad \left(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}\right)_{,y} = -\bar{\nu}\,b_1 \qquad \bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$\int df = \int f_{,x}\,dx + f_{,y}\,dy + \text{cost}$$

- Abbiamo risolto analiticamente il campo $\sigma_{zz}(x,y,z)$
- Resta da risolvere il pb. nelle τ_{zx}, τ_{zy}

$$\begin{cases} \text{equil.} & \operatorname{div}\tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y}x - \frac{T_y}{J_x}y \quad \text{in } A \\ \text{congr.} & (\operatorname{rot}\tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x}x + \frac{T_x}{J_y}y\right) - c \end{cases}$$

c cost. di integraz. da porre in relaz. ad M_t tramite l'equiv. statica

$$\Rightarrow \underbrace{\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}}_{(\operatorname{rot}\tau_z)_z} = \bar{\nu}(b_2 x - b_1 y) - c \quad \text{eq.ne di congruenza}$$
$$= \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x}x + \frac{T_x}{J_y}y\right) - c$$

- Pertanto, il campo σ_{zz} può essere scritto come:

$$\sigma_{zz} = a + a_1 x + a_2 y - z\left(b + b_1 x + b_2 y\right)$$

$$= a - bz + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z)y \Rightarrow$$

- Equivalenza statica tra σ_{zz} e le az. applicate

- $N = \int_A \sigma_{zz}\, dA = (a - bz)A + (a_1 - b_1 z)S_y + (a_2 - b_2 z)S_x = a A$

$$a = \frac{N}{A}, \quad b = 0 \qquad \underbrace{\int_{A} \operatorname{div} \tau_z \, dA}_{\text{th. Div}} = \int_{\Gamma} \underbrace{n \cdot \tau_z}_{0} \, d\Gamma$$

$$-\sigma_{zz,z} = b + b_1 x + b_2 y$$

- $M_x = \int_A \sigma_{zz}\, y\, dA = (a_2 - b_2 z) J_x \rightarrow a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} \qquad b A = 0 \Rightarrow b = 0$

$$= \underbrace{a_2 J_x}_{M_{x_0}} - \underbrace{b_2 J_x z}_{T_y} \rightarrow a_2 = \frac{M_{x_0}}{J_x}, \quad \boxed{b_2 = -\frac{T_y}{J_x}}$$

- $M_y = -\int_A \sigma_{zz}\, x\, dA = -(a_1 - b_1 z) J_y \rightarrow a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y}$

$$= \underbrace{-a_1 J_y}_{M_{y_0}} + \underbrace{b_1 J_y z}_{-T_x} \rightarrow a_1 = -\frac{M_{y_0}}{J_y}, \quad \boxed{b_1 = -\frac{T_x}{J_y}}$$

Vedi tenso-flessione derivata per PSE

$$\boxed{\sigma_{zz}(x, y, z) = \frac{N}{A} - \frac{M_y(z)}{J_y}x + \frac{M_x(z)}{J_x}y}$$

Eq. di equil.

$$\operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y}x - \frac{T_y}{J_x}y$$

- Le rimanenti 2 eq.ni di congr. ... a porg...

$$\begin{cases} \frac{1+\nu}{E}\left(\tau_{zx,xy} - \tau_{zy,xx}\right) = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz,zy} \\ \frac{1+\nu}{E}\left(\tau_{zx,yy} - \tau_{zy,yx}\right) = +\frac{\nu}{E}\sigma_{zz,zx} \end{cases}$$

$f = f(x, y)$

$\int df = \int f_{,x}\, dx + f_{,y}\, dy + \text{cost}$

$$\left(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}\right)_{,x} = \bar{\nu}\, b_2 \qquad \left(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}\right)_{,y} = -\bar{\nu}\, b_1$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}}^{-(\operatorname{rot} \tau_z)_z} = \bar{\nu}\left(b_2 x - b_1 y\right) - c \quad \text{eq.ne di congruenza}$$

$$= \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x}x + \frac{T_x}{J_y}y\right) - c$$

- Abbiamo risolto analiticamente il campo $\sigma_{zz}(x, y; z)$

- Resta da risolvere il pb. nelle τ_{zx}, τ_{zy}

$$\begin{cases} \text{equil.} & \operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\frac{T_x}{J_y}x - \frac{T_y}{J_x}y \quad \text{in } A \\ \text{congr.} & -(\operatorname{rot} \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x}x + \frac{T_x}{J_y}y\right) + \ldots \end{cases}$$

con c.c. $\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ

- cost. di integraz. da trovare in relaz. ad M_t tramite l'equiv. statica (*)