
Caso di DSV:
Torsione
(N=Tx=Ty=0; Mx=My=0)
Mt=Mz≠0
hp. fond.
Momento torcente costante, se per sezione, staticam. equivalente:
Mt = ∫A (τzy x − τzx y) dA
Equazioni di campo
Eq. equil. div τz = τzx,x + τzy,y = 0
Eq. congr. −(rot τz)z = τzx,y − τzy,x = −c
in A (x∈A)
Approccio agli spostamenti
angolo unitario di torsione (cost)
Fondandosi sull'osservazione sperimentale si ipotizza il seguente campo di spostamenti in soluzione
rotazione rigida della sezione nel suo piano
ingobbamento fuori piano delle sezioni indip. da z
Rotaz. rigida nel piano:
su Γ (x∈Γ)
Leggi costitutive:
Incognite
Campo di deformaz.

Torsione
Approccio agli spostamenti (pago a priori la congruenza, impongo l'equil)
Fondandosi sull'osservazione sperimentale si ipotizza il seguente campo di spostamenti in soluzione:
rotazione rigida della sezione nel suo piano (ossia me)
ingobbamento fuori piano delle sezioni indip. da z
Rotaz. rigida nel piano:
funzione di ingobbamento
rigidezza torsionale
(sez circolare J = J_G)
Incognite
Campo di deformaz
Eq. ne di congruenza
vedi flessione
momento d'inerzia torsionale
Imposizione dell'equil
Eq. di equil

– Approccio agli spostamenti (pago a priori la congruenza, impongo l'equil.)

Fondandosi sull'osservazioni sperimentali si ipotizza il seguente campo di spostamenti in soluzione

– rotazione rigida della sezione nel suo piano (ovvero)

– ingobbamento fuori piano della sezione lungo z

$$\begin{cases} s_x^{(y,z)} = -\beta z y \\ s_y^{(x,z)} = \beta z x \\ s_z^{(x,y)} = \beta \Psi_G(x,y) \end{cases}$$

funzione di ingobbamento

proprietà geometrica della sez. trasv.

$d\vartheta$ dz

$d\vartheta = \beta\, dz$ (vedi flessione)

$= \dfrac{M_t}{\boxed{GJ}}\, dz$

rigidezza torsionale

momento d'inerzia torsionale

(sez. circolare $J = J_G$)

[J (caratt. sez. trasv., Ψ_G)]

• Rotaz. rigida nel piano:

$\varepsilon_{xx} = s_{x,x} = 0$

$\varepsilon_{yy} = s_{y,y} \equiv 0$

$\gamma_{xy} = s_{x,y} + s_{y,x} = -\beta z + \beta z \equiv 0$

Incognite $\boxed{\beta,\ \Psi_G(x,y)} \longleftrightarrow M_t$

• Campo di deformaz. $\Rightarrow$ Campo di sforzo (da leg. cost.)

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{zx} = \gamma_{zx} = s_{z,x} + s_{x,z} = \boxed{G\beta(\Psi_{G,x} - y) = \tau_{zx}} \\ 2\varepsilon_{zy} = \gamma_{zy} = s_{z,y} + s_{y,z} = \boxed{G\beta(\Psi_{G,y} + x) = \tau_{zy}} \end{cases}$$

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

– Eq.ne di congruenza

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c$$

$$G\beta(\cancel{\Psi_{G,xy}} - 1 - \cancel{\Psi_{G,yx}} - 1) = -c$$

th. di Schwarz

$$+2G\beta = +\boxed{c = 2G\beta = 2\frac{M_t}{J}}$$

$$\beta = \frac{c}{2G}$$

significato fisico alla cost. c, direttamente prop. alla torsione β

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}$$

$$G\beta = \frac{M_t}{J}$$

– Imposizione dell'equil.:

Eq. di equil.

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0$$

$$G\beta(\Psi_{G,xx} + 0 + \Psi_{G,yy} + 0) = 0$$

laplaciano della f.ne Ψ_G $\Rightarrow$

$$\boxed{\nabla^2 \Psi_G = \Psi_{G,xx} + \Psi_{G,yy} = 0 \text{ in } A}$$

Equazione di Laplace

$P = P(x(s), y(s))$
$x \in \Gamma$
$n = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$
A
Γ
$r^2 = x^2 + y^2$
$P = P(s)$
$\in \Gamma$
$r(s)$
$t = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$
τ_z
$= \frac{dP(s)}{ds} = \begin{Bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{Bmatrix}$ versore tangente
$' = \frac{d}{ds}$
$dx = ds\cos\alpha$
$dy = ds\cos\beta$
$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = x'(s)$
$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = y'(s)$
$n = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_y \\ -t_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{Bmatrix} = \frac{dx}{dn}$
tale che $n \cdot t = 0$
– Equil. al contorno
$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ
$G\beta(\psi_{G,x} n_x - y n_x + \psi_{G,y} n_y + x n_y) = 0$
$\psi_{G,x} n_x + \psi_{G,y} n_y = -n_y x + n_x y$ su Γ
c.c. di Neumann-Dini (flusso normale della f. ne ψ_G)
$\psi_{G,n} = -n_y x + n_x y$ su Γ
$= t_x x + t_y y$
$= t \cdot x$
ciò configura un pb. di N-D. per l'equazione di Laplace
Sez. circolare
$= x'(s)x(s) + y'(s)y(s)$
$= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\frac{dr^2(s)}{ds} = r(s)r'(s)$
$r'(s) = 0$
$r(s) = R$
$\psi_{G,n} = 0 \Rightarrow \psi_G \equiv 0$
$\nabla^2\psi_G = 0$
(no ingobbamento in sezioni circolari)
– Equivalenza statica $\tau_z \leftrightarrow M_t$
$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)\, dA$
$= G\beta \int_A (\psi_{G,y} x + x^2 - \psi_{G,x} y + y^2)\, dA$
$J = \frac{M_t}{G\beta} = \int_A (x^2+y^2)\, dA - \int_A (\psi_{G,x} y - \psi_{G,y} x)\, dA$

Equil. al contorno
τz · n = τzx nx + τzy ny = 0 su Γ
Gβ(ψG,x nx − y nx + ψG,y ny + x ny) = 0
= −ny x + nx y su Γ
c.c. di Neumann-Dini (flusso normale della f.ne ψG)
ψG,n = −ny x + nx y su Γ
= tx x + ty y
= t · x
Ciò configura un pb.
di N-D. per l'equazione
di Laplace
Sez. circolare
r(s) = R
ψG,n = 0
⇒ ψG ≡ 0
r(s) distanza radiale di P(s) da G
Equivalenza statica τz ↔ Mt
Mt = ∫A (τzy x − τzx y) dA
= Gβ ∫A (ψG,y x + x² − ψG,x y + y²) dA
J = Mt / Gβ = ∫A (x² + y²) dA − ∫A (ψG,x y − ψG,y x) dA > 0
mom. d'inerzia torsionale
mom. d'inerzia JG polare rispetto a G
J = JG / η
dϑ = β dz = Mt / GJ dz
= η Mt / GJG dz
η = 1, sez. circolare


Eq.ni al contorno
$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ
$\psi_{G,n} = -n_y x + n_x y$ su Γ
Sez. circolare
Equivalenza statica $\tau_z \leftrightarrow M_t$
$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$
$= G\beta \int_A (\psi_{G,y} x + x^2 - \psi_{G,x} y + y^2) dA$
$J = \frac{M_t}{G\beta} = \int_A (x^2 + y^2) dA - \int_A (\psi_{G,x} y - \psi_{G,y} x) dA > 0$
mom. d'inerzia J_G polare rispetto a G
$0 \le J^*_{\psi_G} = \int_A [(\psi_{G,x})^2 + (\psi_{G,y})^2] dA < J_G$
$d\vartheta = \beta dz = \frac{M_t}{GJ} dz$
$= \eta \frac{M_t}{G J_G} dz$
($\eta = 1$, sez. circolare)
$J = \frac{J_G}{\eta}$
η fattore di torsione
$\eta = \frac{J_G}{J} = \frac{J_G}{J_G - J^*} = \frac{1}{1 - J^*/J_G}$