

Centro di torsione (C)

- Inizialmente abbiamo considerato $C \equiv G, \Psi_G(x,y)$

$$(x_c = y_c = 0)$$

Campo di spostamenti

$$\begin{cases} \Delta x = -\beta z (y - y_c) \\ \Delta y = \beta z (x - x_c) \\ \Delta z = \beta \Psi_C(x,y) \end{cases}$$

Campo delle τ_z , $\tau_{zi} = G \gamma_{zi} = G(\partial_{z,i} + \partial_{i,z})$ Si ottiene

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta(\Psi_{C,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta(\Psi_{C,y} + x - x_c) \end{cases}$$

$$\Delta z = \beta \Psi_C \Leftrightarrow \Psi_C = \Psi_G + \frac{1}{2}(-y_c x + x_c y) \quad (*)$$

- Eq. di congr.:

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -e = G\beta(\Psi_{C,xy} - 1 - \Psi_{C,yx} - 1) = -2G\beta = -e$$

- Eq. di equil.

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \Rightarrow G\beta(\Psi_{C,xx} + \Psi_{C,yy}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Psi_C = 0 \text{ in } A \quad (\nabla^2 \Psi_G = 0 \text{ in } A)$$

- Equl. al contorno: $\tau_z \perp \mathbf{n}$ su Γ

$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0 \Rightarrow G\beta(\Psi_{C,x}n_x - y n_x + y_c n_x + \Psi_{C,y}n_y + x n_y - x_c n_y) = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$\Psi_{C,n} + y_c n_x - x_c n_y = y n_x - x n_y$$

$$\Psi^* = \Psi_G + k \Leftrightarrow \Psi_{G,n} = (\Psi_G + y_c x - x_c y)_{,n} = y n_x - x n_y \quad \text{e.e. di Neumann-Dini}$$

- In generale attendo che $\Psi_C \neq \Psi_G$ e che possano differire per un campo di rotazioni di rot. z

- In tal senso, visto che non sono impediti i moti rigidi, è opportuno assumere spost. nodi fuori piano nullo (per bloccare la trasl. rigida in direz. z)

$$\Delta z = \frac{1}{A} \int_A \beta \Psi_G dA = 0$$

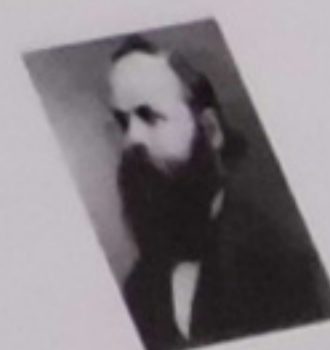
$$\int_A \Psi_C dA = 0$$

Si definisce centro di torsione

il p.to C rispetto al quale la funzione di spostamento

potrebbe essere nulla

in senso medio (o p.v.).

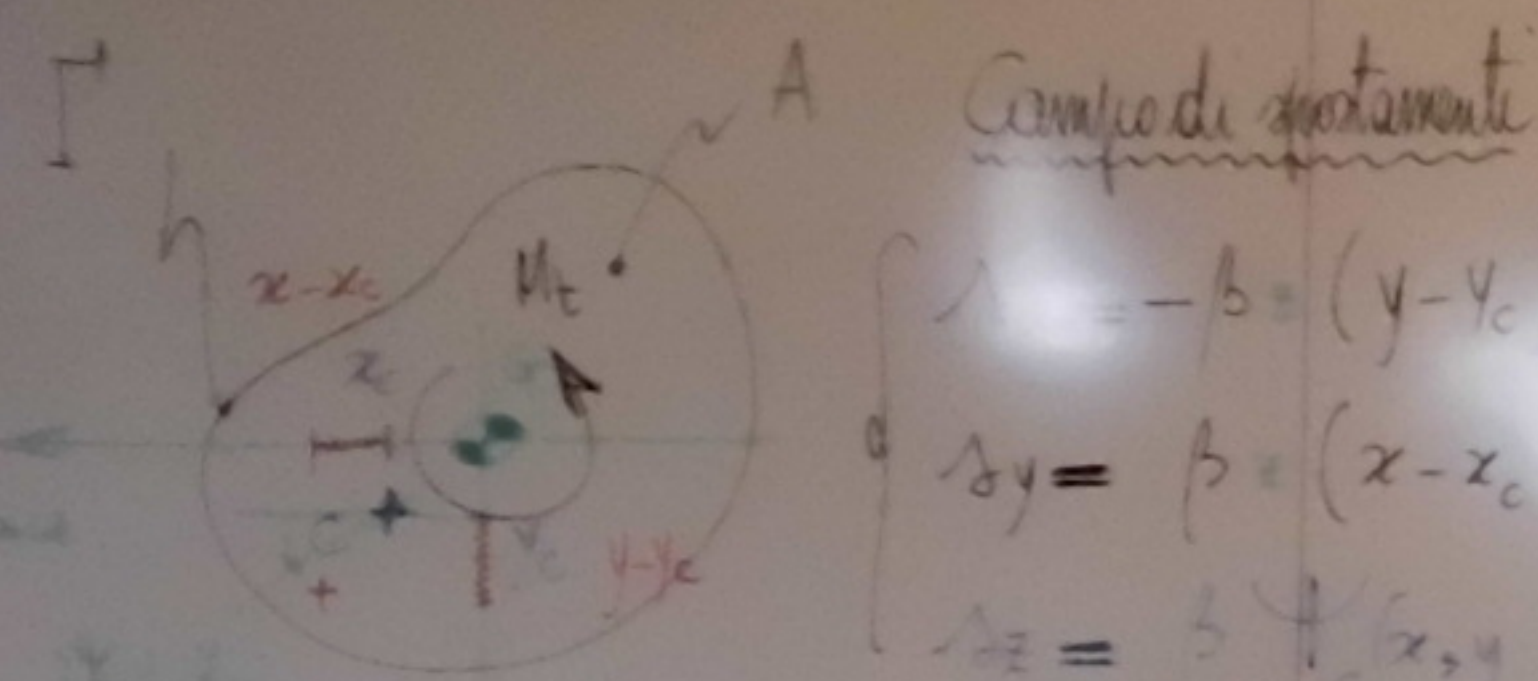


Hermann Schwarz
lived from 1843 to 1921

Schwarz is credited with the continuous mapping of polyhedra onto the sphere and to a proof of the existence of solutions, namely, surfaces of least area.

Centro di torsione (C)

Inizialmente abbiamo considerato $C \equiv G$, $\Psi_G(x, y)$



Campo di spostamenti

$$\begin{cases} u = -\beta(y - y_c) \\ v = \beta(x - x_c) \\ w = \beta \Psi_G(x, y) \end{cases}$$

In generale attendo che $\Psi_C \neq \Psi_G$ e che possiamo definire un campo di spostamenti di torsione.

In tal caso, visto che non sono impediti i movimenti di torsione, la sezione si deforma in modo da restare rigida in direzione z.

Campo delle τ_z , $\tau_{zi} = G \gamma_{zi} = G(\partial z_i / \partial x + \partial x_i / \partial z)$ Si ottiene

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta(\Psi_{C,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta(\Psi_{C,y} + x - x_c) \end{cases}$$

Eq. di congr.

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -G\beta(\Psi_{C,xy} - 1 - \Psi_{C,yx} - 1) = -2G\beta = -G$$

Eq. di equil.

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \Rightarrow G\beta(\Psi_{C,xx} + \Psi_{C,yy}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \Psi_C = 0 \text{ in } A \quad (\nabla^2 \Psi_G = 0 \text{ in } A)$$

Eq. di equil. al contorno: $\tau_z \perp \mathbf{n}$ su Γ

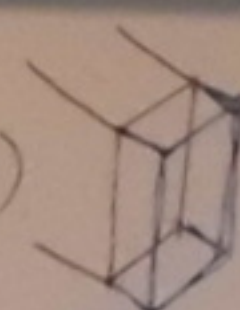
$$\tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = 0 \Rightarrow G\beta(\Psi_{C,x}n_x - y n_x + y_c n_x + \Psi_{C,y}n_y + x n_y - x_c n_y) = 0 \text{ in } \Gamma$$

$$\Psi_{C,n} + y_c \frac{dx}{dn} - x_c \frac{dy}{dn} = y n_x - x n_y$$

$$\Psi^* = \Psi_G + K \Leftrightarrow \Psi^*_{,n} = (\Psi_G + y_c x - x_c y)_{,n} = y n_x - x n_y \quad \text{e.c. di Neumann-Dini}$$

$$\Delta z = \beta \Psi_C \Leftrightarrow \Psi_C = \Psi_G + K - y_c x + x_c y \quad (*)$$

comp. di moto rigido fuori piano



$$\Delta z = \beta \Psi_C$$

$$\Delta z = \beta \Psi_C$$

Si definisce Centro di torsione, il p.to C rispetto al quale la funzione di spostamento presenta rotazione media.

τ_z, τ_{θ} nulle (valutate in senso orario via PLV).

$$\bar{\tau}_z = \frac{1}{A} \int_A \tau_z dA = 0 \quad \text{Torsione} = \frac{M_x}{J_z} = \frac{M_x}{\int_A y^2 dA}$$

$$\bar{\tau}_z = \frac{1}{A} \int_A \tau_z dA = 0 \quad \text{media porta di } \tau_z \text{ su } A$$

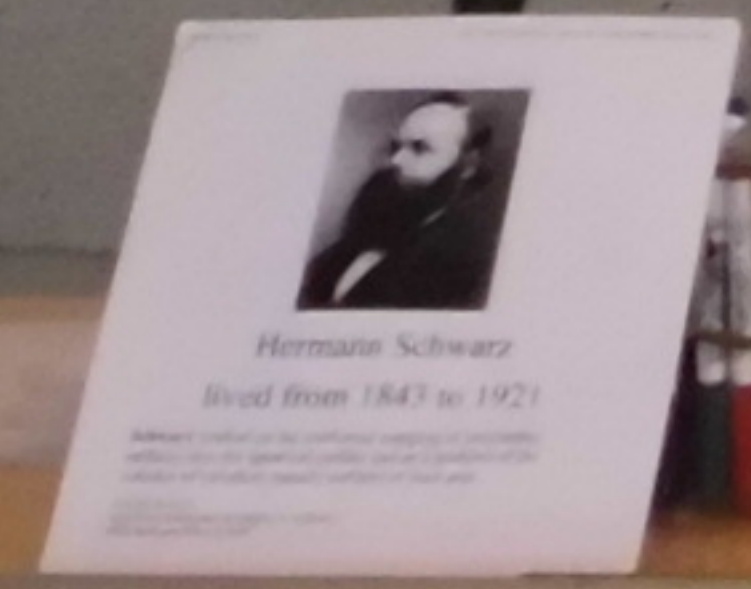
$$\bar{\tau}_z = \frac{1}{A} \int_A \tau_z dA = 0 \quad \text{media porta di } \tau_z \text{ su } A$$

$$\bar{\tau}_z = \frac{1}{A} \int_A \tau_z dA = 0 \quad \text{media porta di } \tau_z \text{ su } A$$

$$\bar{\tau}_z = \frac{1}{A} \int_A \tau_z dA = 0 \quad \text{media porta di } \tau_z \text{ su } A$$

$$\bar{\tau}_z = \frac{1}{A} \int_A \tau_z dA = 0 \quad \text{media porta di } \tau_z \text{ su } A$$

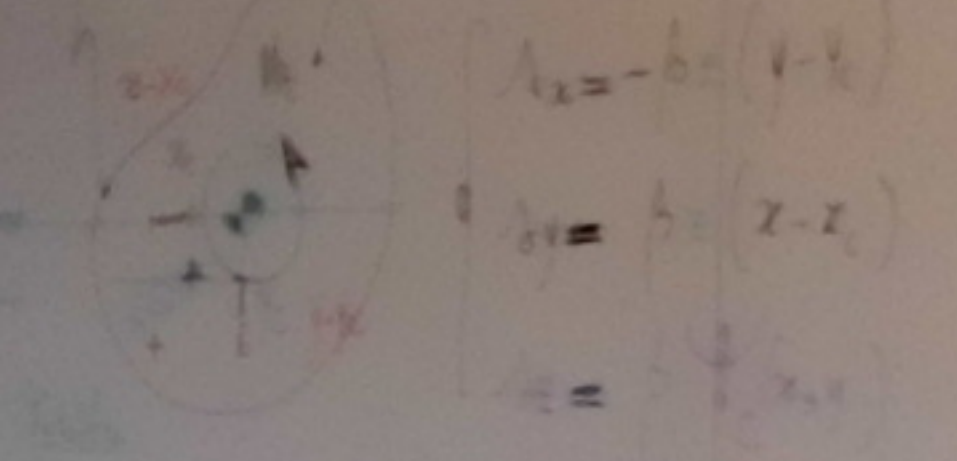
$$\bar{\tau}_z = \frac{1}{A} \int_A \tau_z dA = 0 \quad \text{media porta di } \tau_z \text{ su } A$$



Centro di torsione

Intensità della torsione $C = G \theta$

Comp. di torsione



Compo. della τ_{xz} , $\tau_{zx} = G \theta r = G (\partial z / \partial x + \partial z / \partial y)$ Si ottiene:

$$\tau_{xz} = G \theta (\psi_{c,x} - y + y_c)$$

$$\tau_{zy} = G \theta (\psi_{c,y} + x - x_c)$$

$$\psi_c = \psi_g + k(-y_c x + x_c y) \quad (*)$$

comp. di moto rigido fuori piano

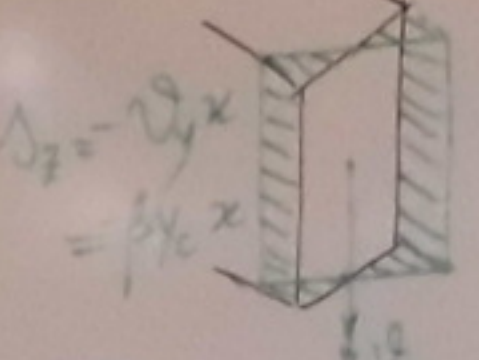


Eq. di compat.

$$\tau_{xz,y} - \tau_{zy,x} = -e \Rightarrow G \theta (\psi_{c,xy} - 1 - \psi_{c,yx} - 1) = -2G\theta = -e$$

Eq. di equil.

$$\tau_{xz,x} + \tau_{zy,y} = 0 \Rightarrow G \theta (\psi_{c,xx} + \psi_{c,yy}) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi_c = 0 \text{ in } A$$



$$\partial z = \psi_{c,x} y = \beta x_c y$$

Eq. di equil. $\tau_z \perp \Pi_{xy}$

eq. di Laplace

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \Rightarrow G \theta (\psi_{c,x} n_x - y n_x + \psi_{c,y} n_y + x n_y - x_c n_y) = 0 \text{ in } \Gamma$$

Ant. $\psi^* = \psi_g + k(-y_c x + x_c y)$

$$\psi^*_{,n} = \psi^*_{,x} n_x + \psi^*_{,y} n_y = y n_x - x n_y$$

Si definisce centro di torsione, il p.to C rispetto al quale la funzione di ingobbamento presenta rotazioni nulle τ_x, τ_y nulle (valutate in senso energetico via PLV).

Torsione = $\int_A \frac{M_x}{J_x} y \partial z dA$

media pesata di $\frac{\partial z}{y}$ con pesi J_x

$$\bar{\psi}_x = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\partial z}{y} y dA$$

$$\bar{\psi}_y = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\partial z}{x} x dA$$

$\partial z = \beta \psi_c$

$$\bar{\psi}_x = \bar{\psi}_y = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c y dA = 0, \int_A \psi_c x dA = 0$$

coord. del C.T.

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_c(x,y) y dA$$

$$y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \psi_c(x,y) x dA$$

Analogamente, C.T.

Nota ψ_c da pb. di N. Dirl'eq. di Laplace e note x_c, y_c si det. ψ_c dalla (*)

- + Approccio agli sforzi (pago a forza l'equil, impongo la congr.)
- Hp. nel campo di sforzo: (ϕ funzione potenziale di sforzo o di AIRY)

$$\tau_{zx} = \phi(x,y)_{,y} ; \tau_{zy} = -\phi(x,y)_{,x}$$

- Equaz. di equil.

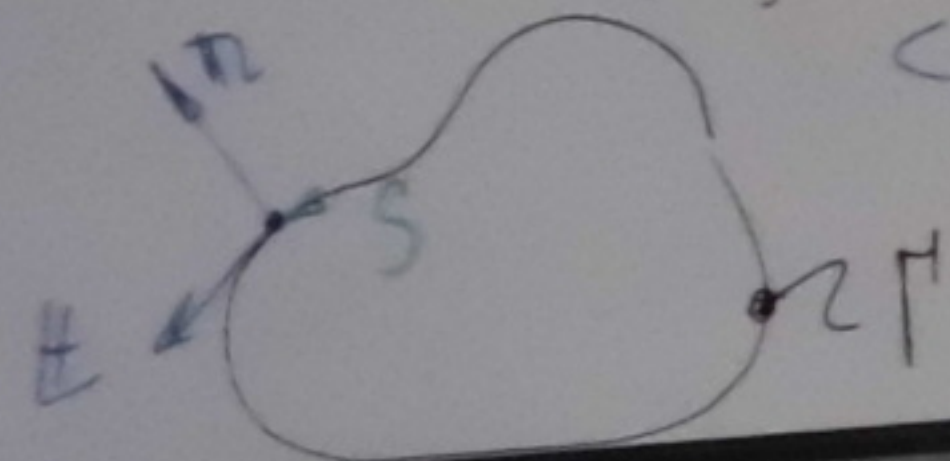
$$\tau_{zx,z} + \tau_{zy,y} = 0 \Rightarrow \phi_{,yx} + \phi_{,xy} = 0 \quad \text{th. di Schwarz}$$

- Equaz. di comp.

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -e \Rightarrow \phi_{,yy} + \phi_{,xx} = -e \Rightarrow \nabla^2 \phi(x,y) = -e \text{ in } A$$

- Equil. al contorno:

$$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma \Rightarrow \phi_{,y} n_x - \phi_{,x} n_y = 0$$



$$\phi_{,ss} = \phi_{,xx} + \phi_{,yy} = 0 \text{ su } \Gamma$$

+ $\phi(x,y) = 0$ su Γ^*
c.c. di Dirichlet
Si ottiene un pb. di Dirichlet per
l'eq. di Poisson

- $\phi \leftrightarrow M_t$, e tramite equiv. statica:

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \\ &= \int_A (-\phi_{,xx} x - \phi_{,yy} y) dA = \\ &= - \int_A [(\phi_{,xx} x + \phi_{,yy} y)] dA + 2 \int_A \phi dA \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 (x n_x + y n_y) d\Gamma + 2 \int_A \phi dA = M_t \end{aligned}$$

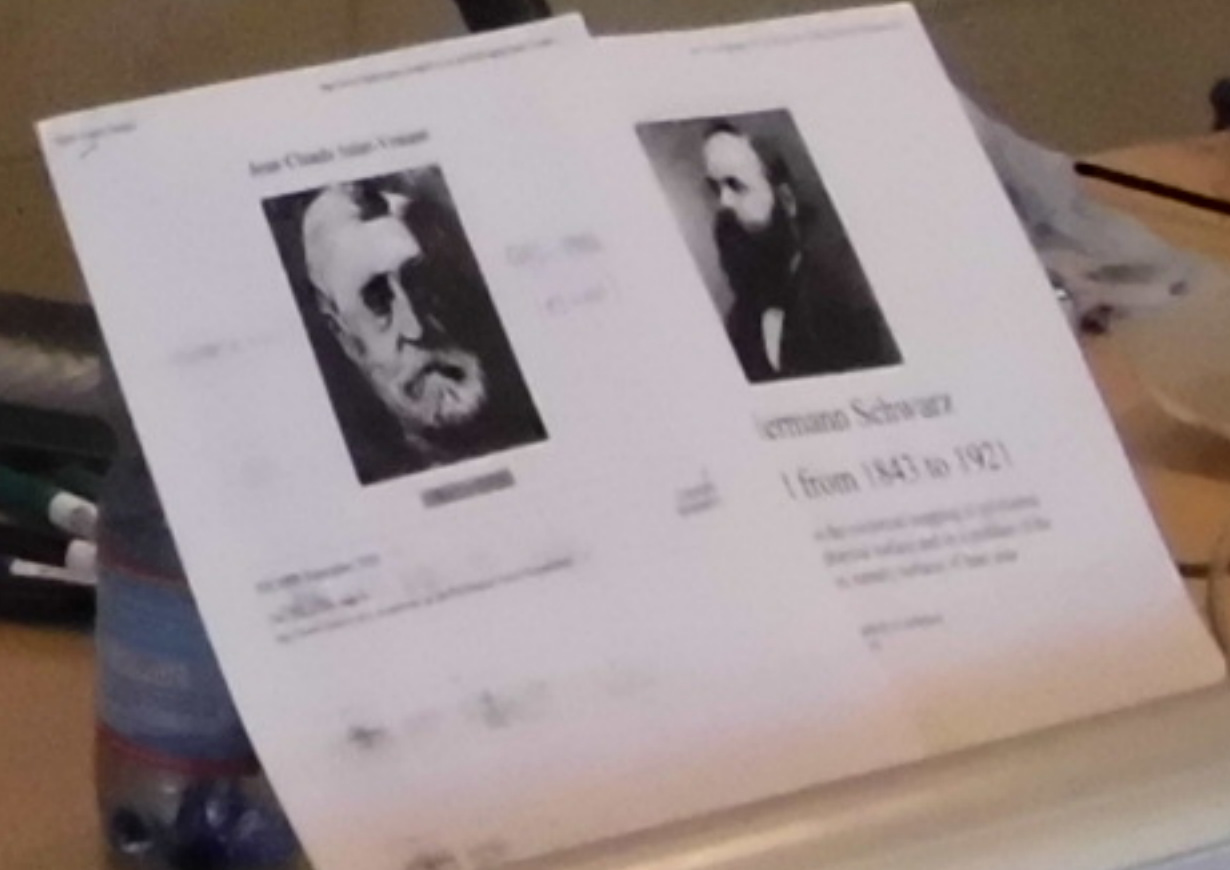
Quattro teoremi: relazione tra M_t e M_e
Approccio agli spostamenti
in $\phi, \psi(x,y)$

pb. di H-B in piano di Laplace $\nabla^2 \psi = 0 \text{ in } A$ $\psi_{,xy} = \psi_{,yx} = -n_x x + n_y y \text{ su } \Gamma$	in $A, \psi(x,y)$ $\psi_{,xy} = \psi_{,yx}$ $\psi_{,xy} = \psi_{,yx} = -n_x x + n_y y \text{ su } \Gamma$
---	---

- Metodi analitici:

- Soluz. in forma chiusa, esatte (a. r. ellittica) o appross. (a. iperboliche)
- Soluz. in serie di Fourier (a. r. iperboliche) o appross. (a. iperboliche)

$$\begin{aligned} \phi_{,xy} &= G(\psi_{,xx} - \psi_{,yy}) \\ \phi_{,xx} &= G(\psi_{,xx} - \psi_{,yy}) \\ \psi_{,xx} &= \frac{1}{G} \phi_{,xx} + \psi_{,yy} \\ \psi_{,yy} &= \frac{1}{G} \phi_{,yy} + \psi_{,xx} \end{aligned}$$



- + Approccio agli sforzi (paga a forza l'equil, impongo la comp.)
- Hlp nel campo di sforzo (Φ funzione potenziale di sforzo o di AIRY)

$$\tau_{xz} = \Phi(x,y)_{,y} ; \tau_{zy} = -\Phi(x,y)_{,x}$$

- Equil. di equil.

$$\tau_{xz,z} + \tau_{zy,y} = 0 \Rightarrow \Phi_{,yxx} + \Phi_{,xyy} = 0$$

- Equil. di comp.

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = e \Rightarrow \Phi_{,yyx} + \Phi_{,xyx} = -e \Rightarrow \nabla^2 \Phi(x,y) = -e \text{ in } A$$

- Equil. nel contorno:

$$\tau_{z,n} = \tau_{xz}n_x + \tau_{zy}n_y = 0 \text{ su } \Gamma \Rightarrow \Phi_{,y}n_x - \Phi_{,x}n_y = 0$$

$$\Phi_{,n} = \Phi_{,x}n_x + \Phi_{,y}n_y = 0$$

$$\Phi_{,t} = 0 \text{ su } \Gamma$$

Sistemi un po' di Dirichlet per l'eqn di Poisson

- $\Phi \leftrightarrow M_t$, e tramite equiv statica

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{xz}y) dA$$

$$= \int_A (-\Phi_{,xx}x - \Phi_{,yy}y) dA =$$

$$= - \int_A [(\Phi_{,xx}x + \Phi_{,yy}y)] dA + 2 \int_A \Phi dA$$

$$= - \int_A (x n_x + y n_y) d\Gamma + 2 \int_A \Phi dA = M_t$$

$$+ 2 \int_A \Phi dA = M_t$$

Quadro sintetico (forse alla DSV - $M_t = M_E$)

Approccio agli spostamenti

$$\text{in } \beta, \psi(x,y)$$

$$\text{pb di N-D } \nabla^2 \psi = 0 \text{ in } A$$

$$\text{funzione di Laplace } \psi_{,xx} = \psi_{,yy} = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} ; J = \frac{J_0}{2}$$

Approccio agli sforzi

$$\text{in } e, \Phi(x,y)$$

$$\nabla^2 \Phi = -e \text{ in } A$$

$$\Phi = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$e = \frac{2}{A} \int_A \Phi dA$$

• Metodi analitici:

- Solut. in forma chiusa, esatte

(es. rot. ellittica) o approx (es. prof. isottile)

- Solut. in sviluppo in serie (approx per troncamento)

$$\psi_{,y} = G\beta(\psi_{,x} - y)$$

$$\psi_{,x} = -G\beta(\psi_{,y} + x)$$

$$\psi_{,x} = \frac{1}{G\beta}(\psi_{,y} + y)$$

$$\psi_{,y} = -\frac{1}{G\beta}(\psi_{,x} + x)$$

• Metodi numerici

- Metodo delle differenze finite

- Metodo degli elementi finiti

(Finite Element - FEM) 2D, 3D

Method

- Approssio agli spostamenti (per la torsione) $\varphi \leftrightarrow M_t$, e tramite equiv statica:
 $M_t = \int_A (\tau_{xy} x - \tau_{yx} y) dA$
 $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$; $\tau_{yx} = -G \gamma_{xy}$
 $\gamma_{xy} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$
 $\varphi = \varphi(x, y)$
 $\tau_{xy} = G \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\tau_{yx} = -G \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
 $M_t = \int_A (G \frac{\partial \varphi}{\partial x} x + G \frac{\partial \varphi}{\partial y} y) dA = 2G \int_A \varphi dA$
 $\varphi = 0$ su Γ
 $\Delta \varphi = -\frac{M_t}{2GJ}$ in A
 $J = \int_A (x^2 + y^2) dA$
 $\beta = \frac{M_t}{GJ}$; $J = \frac{J_0}{\eta} \geq 1$

Approssio agli spostamenti
 inc. $\beta, \varphi(x, y)$

pb di H-D $\Delta^2 \varphi = 0$ in A
 per l'eq. di Laplace $\varphi_{,xx} = \pm x = -nyx$ su Γ

$\beta = \frac{M_t}{GJ}$; $J = \frac{J_0}{\eta} \geq 1$

• Metodi analitici:
 - Soluz. in forma chiusa, esatte (es. ret. ellittica) o approx (es. profili sottili)
 - Soluz. in sviluppo in serie (approx per troncamento)

$\varphi_{,y} = G\beta(\varphi_{,x} - y)$
 $\varphi_{,x} = -G\beta(\varphi_{,y} + x)$
 oppure
 $\varphi_{,x} = \frac{1}{G\beta} \varphi_{,y} + y$
 $\varphi_{,y} = -\frac{1}{G\beta} \varphi_{,x} + x$

Quadro sintetico (torsione alla DSV - $M_t = M_{tE}$)
 Approssio agli spostamenti

inc. $\varphi, \varphi(x, y)$
 pb di D $\Delta^2 \varphi = -c$ in A
 per l'eq. di Poisson $\varphi = 0$ su Γ

$c = \int_A 2\varphi dA$

$c = 2G\beta$

• Metodi numerici
 - Metodo delle differenze finite
 - Metodo degli elementi finiti (Finite Element - FEM) $\rightarrow$ MCSS Method